Martin Zerner

Principes de Phragmèn-Lindelöf

Séminaire Schwartz, tome 4 (1959-1960), exp. nº 17, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1959-1960__4__A17_0>

Séminaire SCHWARTZ
4e année, 1959/60, n° 17

8 mars 1960

PRINCIPES DE PHRAGMÈN-LINDELÖF

par Martin ZERNER

(d'après LANDIS [3])

Cet exposé concerne encore un opérateur à n variables. Les conventions et notations de l'exposé précédent restent en vigueur. Si A est un sous-ensemble de R^n, $\mu_n A$ désigne sa mesure de Lebesgue. S'il est porté par une sphère, $\mu_{n-1} A$ désigne sa mesure superficielle. On appelle S_a la sphère $|x| = a$ et B_a la boule ouverte qu'elle limite. La lettre G éventuellement munie de divers indices désigne toujours un ouvert connexe.

LEMME. - Soit h un nombre compris entre 0 et 1. Il existe une constante C_0 telle que, pour tout $a \leq 1$ et pour tout domaine G vérifiant :

a. $G \subset B_a$

b. $0 \in G$

c. $\bar{G} \cap S_a \neq \emptyset$

et

(1) $$C_0 \mu_n G < a^n$$

pour toute fonction positive u vérifiant :

A. u est continue sur $\bar{G}$.

B. u s'annule sur la partie de la frontière de G qui est contenue dans B_a.

C. u est deux fois continûment différentiable sur G et y vérifie :

$$Lu = 0$$

où L est défini sur $\bar{B}_a$ (et bien entendu y satisfait aux hypothèses énoncées dans l'exposé précédent). u vérifie **aussi :**

$$u(0) \leq h \sup_{x \in \bar{G}} u(x) \quad .$$

DÉMONSTRATION. - D'après (1), il existe un nombre b compris entre 0 et a tel que :

$$\mu_{n-1} G \cap S_b < \frac{nb^{n-1}}{C_0} \quad .$$

Appelons ψ la fonction (continue) définie sur S_b comme égale à u sur $S_b \cap \bar{G}$ et nulle ailleurs. K_- étant le noyau relatif à S_b dont l'existence est affirmée par le théorème de l'exposé précédent, posons :

$$v(x) = \int_{S_b} K_-(x , y) \psi(y) d\sigma$$

K_- étant positif, on a : $u \leqslant v$ sur la frontière de $G \cap B_b$ (puisque $u = v$ aux points de cette frontière qui appartiennent à S_b d'après la propriété (ii) de K_- (théorème cité) et $u = 0$ en les autres points de la frontière).

Enfin, sur $G \cap B_b$, vu la propriété (i) dans le théorème invoqué :

$$L(v - u) \leqslant 0$$

donc, (principe du maximum) :

$$u \leqslant v \qquad \text{sur } G \cap B_b \qquad ,$$

mais alors, d'après (2) et la propriété (iii) de K_- :

$$u(0) \leqslant \frac{n\beta}{C_0} \sup_{x \in \bar{G} \cap S_b} u(x) \qquad ,$$

d'ou le lemme en prenant :

$$C_0 = \frac{n\beta}{h} \qquad .$$

REMARQUE. - Comme on l'a fait observer à l'exposé précédent, on est obligé de limiter le rayon a de la boule. Voici un exemple montrant que cette restriction ne tient pas à la méthode employée :

$$n = 2 \qquad L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y}$$

$$G_a = \{ (x , y) ; x^2 + y^2 < a^2 , x^2 - 2(y + a^{3/2}) < 0 \}$$

$$u_a = - x^2 + 2(y + a^{3/2})$$

quand $a \longrightarrow \infty$:

$$\frac{\mu_2 G_a}{a^2} \longrightarrow 0$$

$$\frac{u_a(0)}{\sup_{G_a} u_a(x)} \longrightarrow 1 \qquad .$$

Par contre, cette restriction peut être levée si on ajoute l'hypothèse :

Les fonctions $|x| b^i$, $|x|^2 c$ sont bornées .

(On se rappelle qu'on passe de la construction des noyaux $K_\pm$ pour $a = 1$

à celle des autres par une homothétie. Sous la nouvelle hypothèse, les opérateurs L transformés par les homothéties correspondant à tous les a satisfont à la même condition d'ellipticité uniforme et ont des coefficients bornés par un même nombre).

THÉORÈME. - Il existe deux constantes positives C, C_1 telles que, pour tout $a \leqslant 1$ (resp. tout a), tout domaine G vérifiant les conditions (a), (b), (c) du lemme, toute fonction u, (positive ou non), vérifiant les conditions (A), (B), (C), du lemme (resp. si de plus $|x|\, b^i$ et $|x|^2\, c$ sont des fonctions bornées), en posant :

$$s = a^{-n} \mu_n G \quad ,$$

$$s < C_1$$

entraîne :

$$u(0) \leqslant \exp(- Cs^{-1/(n-1)}) \sup_{x \in G} u(x) \quad .$$

DÉMONSTRATION. - Si $u(0) \leqslant 0$, il n'y a rien à démontrer. Sinon, d'après le principe du maximum, le plus grand ouvert connexe contenant 0 où l'on ait $u > 0$ a des points adhérents sur S_a. En remplaçant au besoin G par cet ouvert, on peut supposer $u > 0$ sur G.

Dans ces conditions, on va partager B_a en N couronnes, et appliquer le lemme à un sous-ensemble judicieusement choisi de chacune de ces couronnes ou faire se pourra. Il restera à voir que cela se pourra dans un nombre assez grand de ces couronnes, ce qui résultera du choix de N.

Soit donc N un entier positif, pour le moment quelconque. Posons :

$$a_k = \frac{2k + 1}{2N}\, a \quad .$$

La restriction de u à $G \cap S_{a_k}$, étant nulle à la frontière, atteint son maximum en un point x_k. Soit G_k la composante connexe de x_k dans l'ouvert :

$$\left\{ x \ ; \ x \in G \quad \text{et} \quad |x - x_k| < \frac{a}{2N} \right\} \quad .$$

Choisissons un nombre $h < 1$. Soient C_0 la constante définie par le lemme, N_1 le nombre des ensembles G_k qui vérifient :

$$C_0\, \mu_n\, G_k < a^n\, 2^{-n}\, N^{-n} \quad .$$

et N_2 le nombre des autres, soit $N - N_1$. Comme :

$$u(x_{k+1}) > \sup_{x \in G_k} u(x) > u(x_k) \quad ,$$

il vient en appliquant le lemme :

$$u(0) < h^{N_1} \sup_{x \in G} u(x) \quad .$$

Or, il y a N_2 ensembles G_k vérifiant :

$$\mu_n G_k \geqslant \frac{a^n 2^{-n} N^{-n}}{C_0} \quad .$$

Ces ensembles sont disjoints et contenus dans G, d'où :

$$N_2 \leqslant C_0 2^n N^n s$$

$$N_1 \geqslant N - C_0 2^n N^n s \quad .$$

Pour rendre N_1 aussi grand que possible, on est conduit à poser :

$$N = [(\frac{1}{C_0 2^n ns})^{1/(n-1)}]$$

(le crochet désignant la partie entière), d'où :

$$N_1 \geqslant [(\frac{1}{C_0 2^n ns})^{1/(n-1)}] - C_0 2^n [(\frac{1}{C_0 2^n ns})^{1/(n-1)}]^n s \quad .$$

Pour $s \to 0$ le second membre équivaut à :

$$(\frac{1}{C_0 2^n n})^{1/(n-1)} (1 - 1/n) s^{-1/(n-1)}$$

ce qui établit le théorème.

Principe de Phragmèn-Lindelöf.

Soit L, défini dans tout l'espace, et tel que les fonctions $b^i|x|$, $c|x|^2$ soient bornées. Il existe deux constantes η_0, A strictement positives telles que, quel que soit le domaine G non borné pour lequel existent deux nombres $\eta < \eta_0$ et a tels que, pour tout $r \geqslant a$:

$$\mu_n G \cap B_r < \eta r^n \quad ,$$

toute fonction u continue sur $\bar{G}$, deux fois continûment différentiable sur G, négative ou nulle sur la frontière de G, vérifiant :

$$Lu = 0 \quad \text{dans } G$$

et

$$\liminf_{r \to \infty} [r^{-A\gamma^{-1/(n-1)}} \sup_{x \in G \cap S_r} u(x)] \leqslant 0$$

est négative ou nulle dans G.

DÉMONSTRATION. - Nous allons supposer qu'il existe un point x_0 où $u(x_0) > 0$ et construire A tel que :

$$\liminf_{r \to \infty} [r^{-A\gamma^{-1/(n-1)}} \sup_{x \in G \cap S_r} u(x)] > 0$$

en appliquant le théorème précédent.

Soit G_0 le plus grand ouvert connexe contenant x_0 où l'on ait $u > 0$. Le maximum $m(r)$ de $u(x)$ dans $\overline{G_0 \cap B_r}$ est atteint en un point x_r de S_r. Soient B_r^* la boule $|x - x_r| < r$ et G_r la composante connexe de x_r dans $B_r^* \cap G_0$. On a, pourvu que $r \geqslant a$:

$$\mu_n G_r < \gamma 2^n r^n \quad .$$

Si donc :

$$\gamma_0 \leqslant 2^{-n} C_1$$

où C_1 est définie par le théorème précédent, d'après ce théorème :

$$m(r) \leqslant \exp [- C(\gamma 2^n)^{1/(n-1)}] m(2r)$$

et, comme $m(r)$ est une fonction croissante :

$$m(r) \geqslant \exp (C_2 \gamma^{-1/(n-1)} [\log_2 \frac{r}{b}]) m(|x_0|)$$

(où $b = \sup \{a , |x_0|\}$) d'où, pour r assez grand, avec une constante $A > C_2 \operatorname{Log} 2$:

$$m(r) \geqslant A' r^{A\gamma^{-1/(n-1)}} \qquad (A' > 0) \quad .$$

REMARQUE 1. - Au lieu de borner u par 0, on aurait pu le faire par une constante positive.

REMARQUE 2. - LANDIS ([2]) a démontré à l'origine ce résultat par une méthode, semble-t-il plus compliquée, analogue à celles dont nous parlerons dans le prochain exposé. Les hypothèses étaient différentes.

REMARQUE 3. - GILBARG ([1]) et LAX ([4]) avaient obtenu de leur côté des principes de Phragmèn-Lindelöf différents.

COROLLAIRE. - Si u vérifie $Lu = 0$ dans le domaine limité par deux hyperplans parallèles et est bornée sur ces hyperplans, ou bien elle est bornée, ou bien elle n'est majorée par aucun polynôme.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GILBARG (David). - The Phragmèn-Lindelöf theorem for elliptic partial differential equations, J. of rational Mechanics and Analysis, t. 1, 1952, p. 411-417.

[2] LANDIS (E. M.). - O principe Fragmena-Lindelöfa djla rešeny elliptičeskikh uranenij, Doklady Nauk SSSR, t. 107, 1956, p. 508-511.

[3] LANDIS (E. M.). - Nekotorye voprosy kačestvennoj teorii elliptičeskikh i paraboličeskikh uravnenij, Uspehki Mat. Nauk, N. S., t. 14, 1959, p. 21-85.

[4] LAX (Peter D.). - A Phragmen-Lindelöf theorem in harmonic analysis and its application to some questions in the theory of elliptic equations, J. of Math. pure and appl., t. 10, 1957, p. 361-389.