Henri Morel

Unicité de la solution du problème de Cauchy pour certains opérateurs elliptiques à coefficients variables (fin)

Séminaire Schwartz, tome 4 (1959-1960), exp. nº 15, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1959-1960__4__A15_0>

23 février 1960

UNICITÉ DE LA SOLUTION DU PROBLÈME DE CAUCHY POUR CERTAINS OPÉRATEURS ELLIPTIQUES À COEFFICIENTS VARIABLES (fin)

par Henri MOREL

d'après Lars HÖRMANDER [1]

Introduction.

On démontre une inégalité de Carleman à coefficients variables (théorème 2) en utilisant le théorème 1 de l'exposé précédent ; puis un théorème 2' pour des opérateurs satisfaisant à des conditions un peu moins restrictives. On obtient enfin des théorèmes 3 et 3' de prolongement unique à travers des hypersurfaces, avec une restriction portant sur la courbure de ces hypersurfaces, dans le théorème 3' ; enfin des théorèmes sur les produits de deux opérateurs satisfaisant aux hypothèses de 3.

THÉORÈME 2. - Soit $P(x , D) = \sum a_\alpha (x) D^\alpha$ un opérateur homogène d'ordre m, où les $a_\alpha(x)$ satisfont à une condition de Lipchitz uniforme dans un ouvert Ω contenant l'origine. Supposons $P(x , D)$ elliptique à l'origine :

$$(H_0) \qquad (P(0 , \xi) = 0 , \xi \in R^n) \Longrightarrow \xi = 0$$

et une condition de simplicité des caractéristiques remplie :

$$(H_1) \qquad (P(0 , \zeta , \xi_2 , \ldots , \xi_n) = 0$$

$$(\xi_2 , \ldots , \xi_n) \in R^n - \{0\}) \Longrightarrow P^1(0 , \zeta , \xi_2 , \ldots , \xi_n) \neq 0$$

alors on a une inégalité de Carleman :

$$\exists (C > 0 , \delta_0 > 0 , M > 0) \ \forall (\tau , \delta , \delta < \delta_0 , \tau\delta > M) \ \exists \mathcal{U}_\delta \subset \Omega ,$$

$\mathcal{U}_\delta$ ouvert contenant 0, tel que, $\forall u \in \mathcal{D}\, \mathcal{U}_\delta$

$$(I_0) \qquad (1 + \tau\delta^2)^{m-|\alpha|-1} \tau^{m-|\alpha|} \int \exp(2\tau \varphi_\delta) \, |D^\alpha u|^2 \, dx < C \int \exp(2\tau\varphi_\delta) \, |P(x , D) u|^2 \, dx$$

où $\varphi_\delta = (x_1 - \delta)^2 + \delta (x_2^2 + \ldots + x_n^2)$.

DÉMONSTRATION.

Première partie. - On va déduire de (H_0) et (H_1) deux inégalités, (I_1) et (I_2).

LEMME 1. - Les conditions (H_1) et (H_2) impliquent qu'il existe deux constantes C_1 et D_1, un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de l'origine, un voisinage $\mathcal{V}$ du covecteur $(1, 0, \dots, 0)$ tels que $\forall x \in \mathcal{U}$, $\forall N \subset \lambda V$, $\lambda > 0$, on ait $\forall \tau > 0$, ξ réels :

$$(I_1) \quad |\xi + i\tau N|^{2m} < C_1(|P(x, \xi + i\tau N|^2 + \tau^2 |N|^2 |\, P^1(x, \xi + i\tau N)|^2$$

$$(I_2) \quad |\xi + i\tau N|^{2(m-1)} < C_1'(\sum_{j=1}^{m} |P^j(x, \xi + i\tau N)|^2) \quad .$$

DÉMONSTRATION. - Démontrons (I_1) : supposons $|\xi + i\tau N|^2 = 1$, et montrons que pour $x = 0$, $N = (1, 0, \dots, 0)$, le deuxième membre ne s'annule pas.

Premier cas : $\tau = 0$, on aurait $P(0, \xi) = 0$ donc $\xi = 0$: contradiction.

Deuxième cas : $\tau \neq 0$, si $(\xi_2, \dots, \xi_n) \neq 0$ (H_1) implique le deuxième membre de (I_1) ne peut s'annuler ; si $(\xi_2, \dots, \xi_n) = 0$ le premier membre est $|\xi_1 + i\tau|^{2m}$, le deuxième membre contient un terme proportionnel (H_0). On démontre (I_2) sans peine ; on trouve $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ par continuité.

Deuxième partie. - (I_1) et (I_2), où on laisse x fixe, ($x = x_g$) vont donner à l'aide de la transformation de Fourier une première ébauche de (I_0) où figurera $P(x_g, D)$. On passera à une inégalité avec $P(x, D)$ en utilisant la condition de Lipchitz à laquelle sont soumis les coefficients de $P(x, D)$. Pour cela, on va décomposer u à l'aide de la partition de l'unité déjà utilisée (cf. les exposés 12 et 13)

$$\sum_{g \in Z^n} \Theta(x - g) = 1$$

soit $u_g = \Theta(x_1 \sqrt{\tau} - g_1, x_2 \sqrt{\tau\delta} - g_2, \dots, x_n \sqrt{\tau\delta} - g_n)\, u(x)$ la partition de l'unité est localement finie : au plus 2^n de ses termes sont différents de 0 en un point. On a

$$u = \sum u_g \quad .$$

Prenons $x_g = (g_1/\sqrt{\tau}, \dots, g_i/\sqrt{\tau\delta}, \dots)$; soit $N_g = \operatorname{grad} \varphi_\delta(x_g)$. Les composantes de $\frac{1}{2} N_g$ sont :

$$\frac{1}{2} N_g(x_{g_1} - \delta \ , \ \delta x_{g_2} \ , \ \dots \ , \ \delta x_{g_n}) \qquad ;$$

on aura $N_g \in \lambda \mathcal{V}$, pour tout x_g sur le support de u si les rapports

$$r_i = \frac{\delta x_{g_i}}{x_{g_1} - \delta}$$

sont assez petits : $r_i < \delta_0$; faisons l'hypothèse :

(H_2) $$u \in \mathcal{D}(\mathcal{U}_\delta) \qquad ,$$

les diamètres apparents de $\mathcal{U}_\delta$ étant $< \frac{\delta}{2}$ alors $r_i < \delta$ supposons $\delta < \delta_0$. Multiplions chaque membre de (I_i) $(i = 1 \ , \ 2)$, écrite pour $x = x_g \in \mathcal{U}_g$, $N = N_g = \operatorname{grad} \varphi_\delta(x_g)$, par $|\mathcal{F} u_g(\xi + i\tau N_g|^2$ et intégrons. En appliquant la formule de Parseval et le théorème de translation, il vient :

(I_3) $$\int \sum_{|\alpha|=m} \binom{m}{\alpha} \ |D^\alpha u_g|^2 \exp(2\tau < x \ , \ N_g >) \, dx$$
$$< C_1 \int (P(x_g \ , D) \ u_g|^2 + \tau^2 |N|^2 |P^1(x_g \ , \ D) u_g|^2 \times \exp(2\tau < x \ , \ N_g >) \, dx$$

(I_4) $$\int \sum_{|\alpha|=m-1} \binom{m-1}{\alpha} |D^\alpha u_g| \ \exp(2\tau < x \ , \ N_g >) \, dx$$
$$< C_1' \int (\sum_j |P^j(x_g \ , \ D) \ u_g|^2) \ \exp(2\tau < x \ , \ N_g >) \, dx$$

où les $\binom{m}{\alpha}$ sont les coefficients du binôme de $d^0 m$ à n variables. (En effet, transformons par exemple le premier membre, $\mathcal{T}_a$ désignant l'opérateur de translation par a :

$$\int | \xi + i\tau N_g|^{2m} |u_g(\xi + i\tau N_g)^2 \, d\xi = \int \mathcal{T}_{-i\tau N_g} \ |\xi|^{2m} |u_g(\xi)|^2 \, d\xi \qquad .$$

Or $|\xi|^{2m} = \sum_{|\alpha|=m} \binom{m}{\alpha} \ \xi^{2\alpha}$; il vient :

$$\int \mathcal{T}_{-i\tau N_g} \sum \binom{m}{\alpha} \ \xi^\alpha \ u_g(\xi) \ \overline{\xi^\alpha \ u_g(\xi)} \ d\xi = \int \mathcal{T}_{-i\tau N_g} \ \sum \binom{m}{\alpha} \mathcal{F} D^\alpha \ u_g \overline{\mathcal{F} D^\alpha} \ u_g \ d\xi \qquad .$$

Il vient enfin :

$$\int \sum \binom{m}{\alpha} \mathcal{F}(D^\alpha \ u_g . \exp(\tau < x \ , \ N_g >)) \mathcal{F}(u_g \ \exp(\tau < x \ , \ N_g >)) \ d\xi \qquad ,$$

soit : $\int \sum \binom{m}{\alpha} |D^\alpha \ u_g|^2 \ \exp(2\tau < x \ , \ N_g >) \ dx$.

Troisième partie. - On fait apparaître le poids $\exp(2\tau\varphi_\delta)$. On a, sur le support de u_g : $|x_1 - x_{g_1}|^2 < \tau^{-1}$, $|x_i - x_{g_i}| < \tau^{-1}\,\delta^{-1}$ $i = 2, 3, \ldots, n$

$$|\varphi_\delta(x) - \varphi_\delta(0) - \langle x, N_g\rangle| = |(x_1 - x_{g_1})^2 + \delta((x_2 - x_{g_2})^2 + \ldots)| < n\tau^{-1}$$

donc en posant $C_2 = C_1 \exp(2n)$, $C_2' = C_1' \exp(2n)$, il vient :

$$(I_5) \quad A_{m,g} = \int \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u_g|^2 \exp(2\tau\varphi_\delta)\,dx$$
$$< C_2 \int (|P(x_g, D)\,u_g|^2 + \tau^2|N_g|^2|P^1(x_g, D)u_g|^2) \exp(2\tau\varphi_\delta)\,dx$$

$$(I_6) \quad A_{m-1,g} = \int \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u_g| \exp(2\tau\varphi_\delta)\,dx$$
$$< C_2' \int (\sum_j |P^j(x_g, D)\,u_g|^2 \exp(2\tau\varphi_\delta)\,dx \quad .$$

Quatrième partie. - On fait apparaître aux seconds membres de (I_5) et (I_6) $P(x, D)$, avec x variable : sur le support de u_g , on a

$$|a_\alpha(x) - a_\alpha(x_g)| < c\,\tau^{-1/2}\,\delta^{-1/2} \quad ,$$

si on suppose :

$$(H_3) \qquad \delta < 1 \quad ,$$

donc (Cauchy-Schwarz) :

$$|P(x, D)\,u - P(x_g, D)\,u|^2 < C'\,\tau^{-1}\,\delta^{-1} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2 \quad ; \qquad C' > 0 \ .$$

D'autre part, prenons $\mathcal{U}_\delta \subset \Omega$, ouvert contenant l'origine tel que

$$(H_4) \qquad x \in \mathcal{U}_\delta \Rightarrow |\mathrm{grad}\,\varphi_\delta(x) - \mathrm{grad}\,\varphi_\delta(0)| < \delta \quad ;$$

il suffit pour cela de restreindre un peu plus $\mathcal{U}_\delta$ que ne le fait (H_2) . Si $u \in \mathcal{D}\,\mathcal{U}_\delta$, $u_g \in \mathcal{D}\,\mathcal{U}_\delta$ et sur le support de u_g on a :

$$|N_g| < 3\,\delta$$

car $|\mathrm{grad}\,\varphi_\delta(0)| = 2\delta$; on obtient donc avec de nouvelles constantes :

$$(I_7) \quad A^2_{m,g} < C_3 \int \Big\{ |P(x, D)\,u_g|^2 + \tau^{-1}\,\delta^{-1} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u_g|^2 + \tau^2\,\delta^2 |P^1(x, D)\,u_g|^2$$
$$+ \tau\delta \sum_{|\alpha|=m-1} |D^\alpha u_g|^2 \Big\} \exp(2\tau\varphi_\delta)\,dx$$

si on suppose :

(H_5) $\qquad \tau\delta > 2C_3 \quad$ et $\quad C_4 = 2C_3$

et

(H_6) $\qquad \tau\delta > 2D_3 \quad$ et $\quad D_4 = 2D_3 \quad$:

$$(I_8) \quad A^2_{m,g} < C_4 \int \left\{ |P(x\,,\,D)\,u_g|^2 + \tau^2\delta^2|P^1(x\,,\,D)\,u_g|^2 + \tau\delta \sum_{|\alpha|=m-1} |D^\alpha u_g|^2 \right\} \exp(2\tau\varphi_\delta)\,dx$$

de même :

$$(I_9) \quad A^2_{m-1,g} < C'_4 \int (\sum_j |P^j(x\,,\,D)\,u_g|^2 \exp(2\tau\varphi_\delta)\,dx \quad .$$

Compte tenu de (I_9) , (I_8) devient :

$$(I_{10}) \quad A^2_{m,g} < C_5 \int \left\{ (P(x\,,\,D)\,u_g|^2 + \tau^2\delta^2|P^1(x\,,\,D)\,u_g|^2 + \tau\delta \sum_j |P^j(x\,,D)\,u_g|^2 \right\} \exp(2\tau\varphi_\delta)\,dx \quad .$$

Cinquième partie. - On va faire apparaître u au lieu de u_g .

a. De ce qu'en un point au plus 2^ν fonctions u_g ne s'annulent pas, il vient par Cauchy-Schwarz :

$$(1) \qquad |D^\alpha u|^2 < 2^\nu \sum_g |D^\alpha u_g|^2$$

ce qui donne, en posant $A^2_m = \int \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u_g|^2 \exp(2\tau\varphi_\delta)\,dx$,

$$A^2_m \leq 2^\nu \sum_g A^2_{m,g} \quad .$$

b. Application du théorème 1 (exposé précédent) : pour majorer, à l'aide d'expressions correspondantes en u , les sommes des termes en u_g apparaissant en sommant $\forall g$ les deuxièmes membres de (I_{10}) et (I_{11}) , on a, (Leibniz), en écrivant β^* pour le multientier dont on enlève la première composante et en écrivant P pour $P(x\,,\,D)$:

$$P^\alpha u_g = \sum P^{\alpha+\beta}\, u \tau^{|\beta|/2}\, \delta^{|\beta^*|/2} \frac{D^\beta \Theta}{\beta!} \quad ,$$

les $\frac{D^\beta \Theta}{\beta!}$ ayant une borne supérieure, il vient par Cauchy-Schwarz, et (1) :

$$\tau^{|\alpha|}\ \delta^{|\alpha^*|} \sum_g |P^{\alpha}\ u_g|^2 \leq C'' \sum_{\beta} \tau^{|\alpha|+|\beta|}\ \delta^{|\alpha^*|} |P^{\alpha+\beta}\ u|^2 \quad .$$

Or, on peut appliquer le théorème 1 : ici, le poids $\exp(2\tau\varphi_\delta)$ est différent de celui de l'énoncé du théorème 1 ; on s'y ramène par une translation ; (la constante du théorème 1 ne dépend pas de l'ouvert) ; si on pose $t_1^2 = 2$, $t_2^2 = \dots = t_n^2 = 2\tau\delta$, il vient :

$$(2) \quad \tau^{|\alpha|}\ \delta^{|\alpha^*|} \sum_g \int |P^{\alpha}\ u_g|^2 \exp(2\tau\varphi_\delta)\ dx < C''' (B^2 + A_m\ A_{m-1})$$

où

$$B^2 = \int |Pu|^2 \exp(2\tau\varphi_\delta)\ dx \quad .$$

c. On écrit pour tout g les inégalités (I_i) $(i = 9\ ,\ 10)$ et on somme $\forall g$; les inégalités (I_9) donnent, compte tenu de (1) et (2) :

$$(I_{11}) \qquad A_{m-1}^2 < C_5'\ \tau^{-1}\ \delta^{-1}(B^2 + A_m\ A_{m-1}) \quad ,$$

les inégalités (I_{10}) donnent :

$$(I_{12}) \qquad A_m^2 < C_6(1 + \tau\delta^2)(B^2 + A_m\ A_{m-1}) \quad .$$

Il reste à faire une transformation élémentaire sur (I_{11}) et (I_{12}) ; (I_{12}) devient (I_{14}) tenant compte de

$$A_m\ \lambda\ A_{m-1} < \frac{A_m^2}{2} + \frac{\lambda^2\ A_{m-1}^2}{2}$$

$$(I_{14}) \qquad A_m^2 < 2C_6(1 + \delta^2\tau)\ B^2 + C_6^2(1 + \delta^2\ \tau)^2\ A_{m-1}^2$$

de même (I_{11}) devient :

$$A_{m-1}^2 < C_5'\ \tau^{-1}\ \delta^{-1}(B^2 + A_m^2/2(1 + \delta^2\tau) + (1 + \delta^2\tau)\ A_{m-1}^2/2$$

d'où :

$$(I_{15}) \qquad A_{m-1}^2 < C_5'\ (1 + C_6^2)(1/\tau\delta + \delta\ )) \leq C_5'(1 + C_6)(\tau\delta)^{-1}\ B^2$$

on choisit alors δ_0 et M tels que :

$$\tau\delta > M\ ,\ \delta < \delta_0 \Rightarrow H_i \qquad (\ i > 2\ )$$

et

$$C_5'(1 + C_6^2)(M^{-1} + \delta_0) < 1 \quad ;$$

on a alors : $A_{m-1}^2 \leq C_6'\ B^2\ \tau^{-1}\ \delta^{-1}$ donc, d'après (I_{14}) :

$$(I_{16}) \qquad A_m^2 \leq C_7(1 + \delta^2\ \tau)\ B^2 \quad .$$

<u>Sixième partie</u>. - L'inégalité (I_{16}) est celle du théorème 2 pour $|\alpha| = m$.
On démontre par un calcul presque identique à celui de l'exposé 8, paragraphe 1, que :

$$(3) \quad \tau(1 + \delta^2 \tau) \int |x|^2 \exp(2\tau\varphi_\delta)\, dx \leq \int |D^1 v|^2 \exp(2\tau\varphi_\delta)\, dx \qquad \forall\ v \in \mathcal{D}\mathcal{U}_\delta$$

en supposant $x \in \mathcal{U}_\delta \Rightarrow |x_i| < \frac{\delta}{2}$. De (3) on déduit, si $|\alpha| < m$:

$$\tau^{k-\ell}(1 + \delta^2 \tau)^{k-\ell} A_\ell^2 < C(k)\ A_k^2 \qquad \ell < k$$

donc :

$$\tau^{m-|\alpha|}(1 + \delta^2 \tau)^{m-|\alpha|} \int \exp(2\tau\varphi_\delta) |D^\alpha u|^2\, dx < A_m^2$$

ce qui, avec (I_{16}), établit définitivement le théorème 2.

De la même façon, on obtient :

THÉORÈME 2'. - Soit $\varphi_\delta = (x_1 - \delta)^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$. Supposons les mêmes conditions vérifiées par les coefficients de $P = \sum a_\alpha D^\alpha$; supposons (H_0) et (H_1') :

$$\sum_{j=1}^{n} |P^j(0\,,\ \xi + i\tau N_0)|^2 \neq 0$$

pour ξ, τ réels $\neq (0\,,\,0)$. Alors $\exists\, C > 0\,,\ \delta_0 > 0\,,\ M > 0\,,$ $\forall(\tau\,,\ \delta\,,\ \delta < \delta_0\,,\ \tau\delta > M)$, $\exists\ \mathcal{U}_\delta \subset \Omega$, tel que $\forall u \in \mathcal{D}\mathcal{U}_\delta$ on a :

$$(I_0') \quad (1 + \delta^2 \tau)^{m-|\alpha|-1}\, \tau^{m-|\alpha|} \int |D^\alpha u|^2 \exp(2\tau\varphi_\delta)\, dx \leq C \int |P(x\,,\,D)\,u|^2 \exp(2\tau\varphi_\delta)\, dx \quad .$$

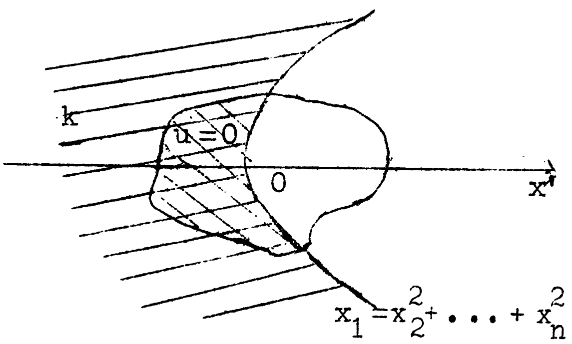
On remplace (I) par (I_1'), où $\sum_1^n |P^j(x\,,\ \xi + i\tau N)|^2$ remplace $|P^1(x\,,\ \xi + i\tau N)|^2$; des théorèmes 2 et 2' on déduit :

THÉORÈME 3. - Soit $k = \left\{x\,,\ x_1 < x_2^2 + \dots + x_n^2\right\}$; soit $P(x\,,\,D)$ vérifiant les conditions du théorème 2 ; soit u, vérifiant dans un ouvert $\mathcal{U}$, contenant l'origine

$$|P(x\,,\,D)\,u| < C \sum_{|\alpha| < m} |D^\alpha u|$$

et $u(x) = 0$ pour $x \in k \cap \mathcal{U}_1$ alors, $\exists\,\mathcal{U}$, ouvert contenant 0 tel que :

$$x \in \mathcal{U} \Rightarrow u(x) = 0 \quad .$$



DÉMONSTRATION du théorème 3. - Soit $\mathcal{U}_\delta \subset \mathcal{U}_1$ et tel que $x \in \mathcal{U}_\delta \Longrightarrow |x^1| < \delta$. Soit $\chi \in \mathcal{D}\mathcal{U}_\delta$ $\chi(x) = 1$ sur $\mathcal{U}_2 \subset \mathcal{U}_1$ ($\mathcal{U}_2$ ouvert , $0 \in \mathcal{U}_2$) ; on a $v = \chi u \in \mathcal{D}\mathcal{U}_\delta$. D'après le théorème 1, on a donc :

$$(1 + \tau\delta^2)^{m-|\alpha|-1} \tau^{m-|\alpha|} \int \exp(2\tau\varphi_\delta(x)) \, |D^\alpha v|^2 \, dx$$
$$\leq C \int \exp(2\tau\varphi_\delta(x)) |P(x , D) v|^2 \, dx \quad .$$

Or, sur $\mathcal{U}_2$, $v = u$ donc $|P(x , D) v \leq C , \sum |D^\alpha u|$ en se restreignant au premier membre :

$$(1 - CC_1 \tau^{-1}) \int_{\mathcal{U}_2} \exp(2\tau\varphi_\delta(x)) \sum |D^\alpha v|^2 \, dx$$
$$\leq C \int_{\complement\mathcal{U}_2} \exp(2\tau\varphi_\delta(x)) |P(x , D) v|^2 \, dx$$

or $v(x) \neq 0 \Longrightarrow x_1 > x_2^2 + \ldots + x_n^2 \Longrightarrow (\varphi_\delta(x) < (x_1 - \delta)^2 + \delta x_1 < \delta^2)$ $x \neq 0$, donc $(x \in \complement\mathcal{U}_2) \Longrightarrow (\varphi_\delta(x) < \delta^2 - \alpha)$ où α fixe > 0 ; or $\varphi_\delta(0) = \delta^2$; il existe $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_2$, $\mathcal{U}$ voisinage ouvert de l'origine, tel que

$$x \in \mathcal{U} \Longrightarrow \varphi_\delta(x) > \delta^2 - \frac{\alpha}{2} \quad .$$

On obtient alors :

$$(1 - CC_1 \tau^{-1}) \exp(\tau\alpha) \int_{\mathcal{U}} \sum |D^\alpha u|^2 \, dx < C \int_{\complement\mathcal{U}_2} |P(x , D) u|^2 \, dx$$

si $\tau \longrightarrow \infty$ on voit que $u(x) = 0$ pour $x \in \mathcal{U}$.

THÉORÈME 3'. - Même énoncé que le théorème 3, $P(x , D)$ vérifiant lrs hypothèses du théorème 2' , et k étant remplacé par l'extérieur de $\psi_\delta(x) \leq \delta^2$.

REMARQUE. - $\varphi_\delta(x) = \varphi_\delta(0)$ avait un contact du second ordre avec le paraboloïde : $x_1 = \frac{1}{2}(x_2^2 + \ldots + x_n^2)$. Il n'en est pas de même pour ψ_δ qui a dû être introduit pour obtenir une inégalité de Carleman dans les conditions du théorème 2' ; si bien que le théorème 3' ne donne l'unicité du prolongement qu'à travers des surfaces assez convexes.

THÉORÈME 4. - Le produit de deux opérateurs satisfaisant aux conditions du théorème 2 donne lieu à une inégalité de Carleman et un théorème de prolongement unique.

Démonstration analogue à celle de l'exposé 8.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HÖRMANDER (Lars). - On the uniqueness of the Cauchy problem II, Math. Scand., t. 7, 1959, p. 177-190.