Séminaire Schwartz

Henri Morel

Unicité de la solution du problème de Cauchy pour certains opérateurs elliptiques à coefficients variables

Séminaire Schwartz, tome 4 (1959-1960), exp. n° 14, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1959-1960__4__A14_0>

UNICITÉ DE LA SOLUTION DU PROBLÈME DE CAUCHY POUR CERTAINS OPÉRATEURS ELLIPTIQUES À COEFFICIENTS VARIABLES

par Henri MOREL

(d'après Lars HÖRMANDER [1])

Introduction.

Cet exposé concerne la deuxième partie du travail d'HÖRMANDER ; dans la première partie, (cf. les exposés précédents), l'auteur s'est posé la question de l'unicité de la solution pour des inéquations $|Pu| < C \sum_{|\alpha|<m} |D^{\alpha} u|$ où P est un opérateur homogène d'ordre m à coefficients constants ; il a examiné quelles sont les possibilités offertes par la méthode de Carleman pour résoudre ce problème, en s'imposant un poids $\exp(\tau\varphi(x))$; $\varphi(x)$ uniformément convexe, généralisant l'exposant de Treves.

Il résulte de son étude, faite dans ces conditions, que l'on est assuré, par la méthode de Carleman, du prolongement unique à travers un hyperplan défini par un covecteur N, si et seulement si P est à caractéristiques réelles simples et à caractéristiques complexes admettant au plus des rayons doubles de la forme $\xi + i\tau N$. Un contre-exemple annoncé avec $P = \Delta^3$ soulignerait l'importance de ce résultat ; il reste des problèmes à résoudre : se poser le problème pour les inéquations revient à chercher la classe des opérateurs homogènes telle qu'il y ait unicité pour tout opérateur ayant sa partie principale dans cette classe ; il y a lieu maintenant de faire des hypothèses plus précises sur les termes de l'opérateur d'ordre $< m$, ce qui n'exclut pas de se poser le problème pour des inéquations, dont le second membre serait de la forme $\sum |Q_i u|$ où les Q_i ne seraient pas tous les $D^{\alpha}_{|\alpha|<m}$.

Reste également à résoudre le cas des coefficients variables. Nous allons voir dans cet exposé et le suivant comment HÖRMANDER retrouve et élargit les résultats de CALDERÓN concernant les opérateurs elliptiques (exposé 8) et les résultats de MIZOHATA, précisés et complétés par MALGRANGE, concernant les produits de deux tels opérateurs. Ces résultats, on s'en souvient, avaient été obtenus avec des inégalités de Carleman plus simples, mais avec l'intermédiaire des opérateurs singuliers.

Dans cet exposé, on examine ce que devient l'identité de Treves pour un opérateur homogène à coefficients variables. On majore les termes nouveaux qui apparaissent et on obtient le théorème 1 qui peut être considéré comme généralisant l'inégalité de Treves et servira de lemme pour le théorème 2 de l'exposé suivant, où on obtient une inégalité de Carleman en coefficients variables. α , β , etc., désignent des multi-entiers. HÖRMANDER utilise des multi-indices. Ainsi, ce qu'entend HÖRMANDER par $\sum_{|\alpha|=m} |D^{\alpha} u|$ signifie dans nos notations $\sum_{|\alpha|=m} \binom{m}{\alpha} |D^{\alpha} u|$. Il en résulte des modifications sans importance dans les coefficients des inégalités.

1. <u>Rappel de résultats de TREVES et extension au cas des coefficients variables.</u>

Soit $D^j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x^j}$;

$$T(u , v) = \int u(x) \overline{v(x)} \exp(t_1^2 x_1^2 + \ldots + t_n^2 x_n^2) dx \quad .$$

Soit δ^j l'adjoint de D^j défini par $T(\delta^j u , v) = T(u , D^j v)$ pour $u , v \in \mathcal{D}$. En intégrant par partie :

$$T(u , D^j v) = \int \frac{1}{i}(\frac{\partial}{\partial x_j}) u + 2t_j^2 x_j u) \overline{v(x)} \exp(\sum_i t_i^2 x_i^2) dx \quad .$$

Donc, $\delta^j = D^j - 2it_j^2 x_j$. On a les relations :

$$\delta^j D^j - D^j \delta^j = 2t_j^2 = 2t_j^2(\frac{\partial}{\partial x_j} x_j - x_j \frac{\partial}{\partial x_j}) \quad ,$$

$$\delta^j D^K - D^K \delta^j = 0 \qquad \text{pour} \qquad K \neq j \quad .$$

TREVES démontre une identité :

$$(1) \qquad T(P(D) u , P(D) u) = \sum t^{2\alpha} \frac{2^{|\alpha|}}{\alpha!} T(\overline{P}^{\alpha}(\delta) u , \overline{P}^{\alpha}(\delta) u)$$

dont il déduit, par un argument que nous reprenons plus loin, son inégalité :

$$(2) \qquad t^{2\alpha} T(P^{\alpha}(D) u , P^{\alpha}(D) u) < 2^{m-|\alpha|} \alpha! \; T(P(D) u) , P(D) u \quad .$$

Nous généralisons (1) en coefficients variables :

PROPOSITION 1. - Soit $P(x , D) = \sum a_{\alpha}(x) D^{\alpha}$ un opérateur homogène de degré m ; les $a_{\alpha}(x)$ une fois dérivables. On a alors l'identité :

$$(1)' \quad T(P(D) u , P(D) u = \sum_{\alpha} t^{2\alpha} \frac{2^{|\alpha|}}{\alpha!} T(\overline{P}^{\alpha}(\delta) u , \overline{P}^{\alpha}(\delta) u) + R$$

où

$$R = \sum_{N(m,n)} t^{\gamma} T((a_{\alpha_1} , a_{\alpha_2})' (D , \delta)^{\beta_1} u , (D , \delta)^{\beta_2} u)$$

avec

$$|\gamma| + |\beta_1| + |\beta_2| = 2m - 1 \quad .$$

Précisons que $(D , \delta)^{\beta_1}$ signifie qu'on remplace dans D^{β_1} certains D^j par δ^j et que γ, α_1, α_2, β_1, β_2 sont des multi-entiers ; que $(\;)'$ signifie une seule dérivation par rapport à une variable non précisée ; que la somme comporte un nombre N de termes ne dépendant que de m et de la dimension n de l'espace. L'expression de R n'est pas explicite, mais constitue une description suffisante en vue de la majoration ultérieure.

DÉMONSTRATION. - On a :

$$T(P(D)\, u , P(D)\, u) = \sum T^{\alpha\beta}$$

où :

$$T^{\alpha\beta} = T(a_\alpha D^\alpha u , a_\beta D^\beta u)$$

Écrivons : $D^\alpha = D^k D^{\alpha'}$ où $D^k = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_k}$; de même $D^\beta = D^\ell D^{\beta'}$. On a :

$$T^{\alpha\beta} = T(a_\alpha \bar{a}_\beta D^k D^{\alpha'}_u , D^\ell D^{\beta'} u) = T(\delta^\ell a_\alpha \bar{a}_\beta D^k D^\alpha u , D^{\beta'} u)$$

or

$$\delta^\ell(\varphi\psi) = (D^\ell - 2it_\ell^2 x_\ell)(\varphi\psi) = D^\ell \varphi . \psi + \varphi . \delta^\ell \psi$$

donc

$$T^{\alpha\beta} = \underbrace{\frac{1}{i} T((a_\alpha \bar{a}_\beta)' D^k D^{\alpha'} u , D^{\beta'} u)}_{\text{terme de } R \text{ .}} + T(a_\alpha \bar{a}_\beta \delta^\ell D^k D^{\alpha'} , D^{\beta'} u)$$

On applique les relations de presque commutation au deuxième terme qui s'écrit ;

$$\sum c_{\gamma_i} t^{\gamma_i} T(a_\alpha \bar{a}_\beta D^{\alpha_i} \delta^\ell u , D^{\beta'} u)$$

où

$$|\gamma_i| + |\alpha_i| + 1 + |\beta'| = 2m \quad .$$

On transforme à nouveau ces termes ; finalement, on obtient :

$$T(P(D)\, u , P(D)\, u) = R + \sum c_{\alpha\beta}(a , t)\, T(\delta^\alpha u , \delta^\beta u)$$

où $c_{\alpha\beta}(a , t)$ est une forme quadratique en a_α à coefficients polynômes en t^γ, dont les coefficients numériques ne dépendent que de l'algorithme utilisé.

Pour les déterminer, supposons les $a_{\alpha\beta}$ constants : $R = 0$, on a alors :

$$\forall u \in \mathcal{D}\ ,\ \sum T(c_{\alpha\beta}(a\ ,\ t)\delta^{\alpha} u\ ,\ \delta^{\beta} u) = \sum t^{2\alpha} \frac{2^{|\alpha|}}{\alpha !} T(\bar{P}^{\alpha}(\delta)\ u\ ,\ \bar{P}^{\alpha}(\delta)\ u)$$

cette identité sera valable pour $a_{\alpha\beta}$ non constants si elle implique que les coefficients numériques intervenant des 2 côtés sont égaux chacun à chacun, ce qui est une conséquence du lemme suivant (unicité du second membre de l'identité de Treves en coefficients constants).

LEMME 1. - Soit les $c_{\alpha\beta}$ constants ; si, pour $\forall u \in \mathcal{D}$, on a :

(3) $$\sum T(c_{\alpha\beta}\ \delta^{\alpha} u\ ,\ \delta^{\beta} u) = 0$$

alors : $c_{\alpha\beta} = 0$.

REMARQUE. - Le lemme pourrait sembler trivial à cause de la force de l'hypothèse : $\forall u \in \mathcal{D}$; la difficulté vient de ce que l'on ne se donne pas de relation entre $c_{\alpha\beta}$ et $c_{\beta\alpha}$. En prenant les D^{α} au lieu des δ^{α} et un poids constant, le lemme n'est plus vrai : on voit, par intégration par partie, que si $u \in \mathcal{D}(R^2)$:

$$\int \left\{ \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial x}\left(\overline{\frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}}\right) - \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}\left(\overline{\frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial x}}\right) \right\} dx\ dy = 0 \quad .$$

Démontrons le lemme 1, en remarquant qu'il serait encore valable pour le poids 1 , en gardant les δ^{α} , i. e. si (3) est remplacée par $\sum c_{\alpha\beta} \int \delta^{\alpha} u\ \overline{\delta^{\beta} u}\ dx = 0$. Soit $u \in \mathcal{D}$, $u \neq 0$; appliquons (3)

$$\check{u}(\dots\ ,\ \frac{x_j}{\varepsilon} - \frac{\eta_j}{t_j^2\,\varepsilon^2}\ ,\ \dots\ )$$

il vient, $\forall \varepsilon > 0$:

$$\int \sum a_{\alpha\beta}(D - 2it^2\ x)^{\alpha}\ u(\frac{x_1}{\varepsilon} - \frac{\eta_1}{t_1^2\varepsilon^2}\ ,\ \dots)\overline{(D - 2it^2\ x)^{\beta}\ u(\frac{x_1}{\varepsilon} - \frac{\eta_1}{t_1^2\,\varepsilon^2}\ ,\dots)}\exp(\textstyle\sum t_j\ x_j^2)\ dx = 0$$

(si $\varepsilon \longrightarrow 0$ le support de $u(\frac{x_1}{\varepsilon} - \frac{\eta_1}{t_1^2\,\varepsilon^2})$ devient très petit, mais s'éloigne à l'infini).

Changeons de variable : $\frac{x_i}{\varepsilon} - \frac{\eta_i}{t_i^2\,\varepsilon^2} = x_i$; $i = 1\ ,\ 2\ ,\ \dots\ ,\ n$; il vient :

$$\int \sum a_{\alpha\beta} \left\{ \frac{1}{\varepsilon}(D - 2i\eta) - 2it^2\,\varepsilon x \right\}^{\alpha} u(x) \overline{\left\{ id \right\}^{\beta} u(x)} \exp(\sum_j (t_j^2 \varepsilon^2\ x_j^2 + \frac{\eta_j^2}{\varepsilon^2} + 2\eta_j\ x_j))\ dx = 0\ ,$$

soit $\ell = \sup\limits_{a_{\alpha\beta} \neq 0} |\alpha| + |\beta|$; il vient ($\varepsilon \longrightarrow 0$) :

$$\int \sum_{|\alpha|+|\beta|=\ell} a_{\alpha\beta} (D - 2i\eta)^\alpha u \overline{(D - 2i\eta)^\beta u} \exp(2\langle x, \eta\rangle)\, dx = 0$$

ou, en posant $u = \exp(-\langle x, \eta\rangle)\, v$

$$\int \sum_{|\alpha|+|\beta|=\ell} a_{\alpha\beta} (D - i\eta)^\alpha v \overline{(D - i\eta)^\beta v}\, dx = 0$$

soit $w = \mathcal{F} v$. On a :

$$\int \Big(\sum_{|\alpha|+|\beta|=\ell} a_{\alpha\beta} (\xi - i\eta)^\alpha (\xi + i\eta)^\beta \Big) \omega\bar{\omega}\, d\xi = 0$$

d'où : $a_{\alpha\beta} = 0$ donc $\ell = 0$. Fin de la démonstration du lemme 1 et de la proposition 1.

REMARQUE. - Le lemme d'unicité ramène la démonstration de l'identité de Treves au cas des opérateurs D^α .

PROPOSITION 2. - Supposons que dans un ouvert Ω , les $a_\alpha(x)$ satisfont à une condition de Lipchitz uniforme, et admettent des dérivées premières. Si $P(x , D) = \sum a_\alpha(x) D^\alpha$ est un opérateur homogène d'ordre m , et R l'expression définie dans la proposition 1, on a :

$$|R|^2 < C T_m(u , u)\, T_{m-1}(u , u)$$

où

$$T_k(u , u) = \sum_{|\alpha|=k} T(D^\alpha u , D^\alpha u) \quad .$$

Voyons d'abord le lemme suivant :

LEMME 2. - On a : $T_k(u , u) < C(\ell)|t|^{2(k-\ell)}\, T_\ell(u , u) \quad , \ k \leq \ell \quad .$

DÉMONSTRATION. - Par récurrence, on voit qu'il suffit de voir que :

$$T_{\ell-1}(u , u) < C'(\ell)\ |t|^2\ T_\ell(u , u) \quad .$$

Appliquons l'inégalité de Treves à $P(D) = D^{\alpha+(i)}$, $|\alpha| = \ell - 1$ où $\alpha+(i)$ signifie qu'on ajoute 1 à α_i ; en minimisant le premier membre :

$$t_i^2\ T(D^\alpha u , D^\alpha u) < 2^\ell \cdot T(D^{\alpha+i} u , D^{\alpha+i} u) \quad ,$$

en sommant $\forall i = 1 , 2 , \ldots , n$, puis $\forall \alpha$ tel que $|\alpha| = \ell - 1$:

$$|t|^2\ T_{\ell-1}(u , u) < C'(\ell)\ T_\ell(u , u) \quad .$$

Démontrons la proposition 2. Soit :

$$R = \sum t^{\gamma} \; T((a_{\alpha_1} \overline{a_{\alpha_2}})'(D , \delta)^{\beta_1} u , (D , \delta)^{\beta_2} u) \quad .$$

Si M majore les $|(a_{\alpha_1} \overline{a_{\alpha_2}})'|$, on a, d'après Cauchy-Schwarz,

$$|R|^2 < NM |t|^{2|\gamma|} \; T(D , \delta)^{\beta_1} u , (D , \delta)^{\beta_1} u) \; T((D , \delta)^{\beta_2} u , (D , \delta)^{\beta_2} u)$$

ou, avec un symbolisme naturel, et tenant compte de $|\gamma| = 2m - 1 - |\beta_1| - |\beta_2|$

$$|R|^2 < C |t|^{2m-|\beta_1|} \; T(\beta_1 , \beta_1) |t|^{2m-1-|\beta_2|} \; T(\beta_2 , \beta_2) \quad ;$$

on applique les relations de commutation pour n'avoir que des δ ; il suffit alors de démontrer que :

$$|t|^{2k-|\gamma_1|-|\gamma_2|} \; T(D^{\gamma_1} u , D^{\gamma_2} u) < C T_k(u , u)$$

ce qui résulte du lemme 2 et de Cauchy-Schwarz. On a finalement le théorème suivant :

THÉORÈME 1. - Soit $P = \sum a_{\alpha}(x) \, D^{\alpha}$, un opérateur homogène d'ordre m à coefficients variables définis dans Ω et y satisfaisant à une condition de Lipchitz uniforme et admettant des dérivées premières. Alors, il existe une constante C dépendant seulement de m , n et des bornes des dérivées des a_{α} , telle que, $\forall u \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$t^{2\beta} \; T(P^{\beta}(x , D) u , P^{\beta}(x , D) u) \leq C \left\{ T(P(x , D) u , P(x , D) u) + [T_m(u , u) \; T_{m-1}(u , u)]^{1/2} \right\} \quad .$$

DÉMONSTRATION. - La proposition (1) permet d'écrire :

$$t^{2\beta} \; T(P^{\beta}(D) u , P^{\beta}(D) u) = \sum_{\gamma} t^{2\beta+2\gamma} \frac{2^{|\gamma|}}{\gamma!} \; T(P^{\gamma+\beta}(D) u , P^{\gamma+\beta}(D) u) + R$$

or :

$$T(P) u , P(D) u) > \sum_{\gamma} t^{2\beta+2\gamma} \frac{2^{|\beta|+|\gamma|}}{(|\beta|+|\gamma|)!} \; T(P^{\gamma+\beta}(\delta) u , P^{\gamma+\beta}(D) u) + R$$

d'où le théorème en utilisant $\binom{m}{\alpha} \leq 2^m$ et la proposition 2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HÖRMANDER (Lars). - On the uniqueness of the Cauchy problem II, Math. Scand., t. 7, 1959, p. 177-190.