SÉMINAIRE SCHWARTZ

ANDRÉ MARTINEAU

Analyse de la méthode de Carleman par Hörmander

Séminaire Schwartz, tome 4 (1959-1960), exp. nº 12, p. 1-4
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1959-1960__4__A12_0>

© Séminaire Schwartz
(Secrétariat mathématique, Paris), 1959-1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schwartz » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

2 février 1960

ANALYSE DE LA MÉTHODE DE CARLEMAN PAR HÖRMANDER [1]

par André MARTINEAU

NOTATIONS. - Ω est un ouvert borné de R^n et φ désigne une fonction de classe C^2 dans $\bar{\Omega}$. Notant φ' le gradiant de φ, on considère l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $\varphi'(x) - \varphi'(y)$, y fixe dans Ω, x variant dans Ω, et on suppose que cet espace est défini par les équations $x_{m+1} = x_{m+2} = \ldots = x_n = 0$. Autrement dit, à une fonction linéaire près, φ ne dépend que des variables $x_1, \ldots, x_n$. Si α est un multi-exposant, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, α^* désigne le multi-exposant $\alpha^* = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$. Les opérateurs différentiels considérés sont tous à coefficients constants. Si $P(\xi) \in C[\xi_1, \ldots, \xi_n]$, on désigne par $P(D)$ le polynôme différentiel $P(D) = P(-i\frac{\partial}{\partial x})$; on note l'ordre de $P(D)$ par p.

Soient P et Q deux opérateurs différentiels à coefficients constants. On appelle "inégalité de Carleman" une inégalité de la forme :

$$(1) \qquad \tau^\gamma \int |Q(D).u|^2.e^{2\tau\varphi}.dx \leq C \int |P(D)\ u|^2.e^{2\tau\varphi}.dx$$

où $\tau \geq 1$, $\gamma > 0$, $u \in \mathcal{D}(\Omega)$, C indépendant de τ et u.

Une telle inégalité, si elle vaut pour tout u de $\mathcal{D}(\Omega)$, vaudra aussi pour tout u suffisamment différentiable à support compact dans Ω.

PROPOSITION 1. - Si l'inégalité (1) a lieu, on a

$$(2) \qquad \tau^\gamma.\Big(\sum_\alpha |Q^{(\alpha)}(\xi + i\tau N)|^2.\tau^{|\alpha^*|}\Big) \leq C.\Big(\sum_\alpha |P^{(\alpha)}(\xi + i\tau.N)|^2.\tau^{|\alpha^*|}$$

pour tout N de l'ensemble $\{\varphi'(\bar{\Omega})\}$, pour tout $\xi \in R^n$, et tout $\tau \geq 1$, C une constante indépendante de N, ξ et τ.

DÉMONSTRATION. - Soit $V(x) \in \mathcal{D}(R^n)$, V non identiquement nulle et soit $x^0 \in \Omega$, $N_0 = \varphi'(x^0)$. On pose

$$V_{x_0,\varepsilon}(x) = V\Big(\frac{x_1 - x_1^0}{\varepsilon}, \ldots, \frac{x_m - x_m^0}{\varepsilon}, x_{m+1}, \ldots, x_m\Big) \quad .$$

Si ε est assez petit $V_{x_0,\varepsilon}(x) \in \mathcal{D}(\Omega)$. On peut alors appliquer l'inégalité (1) à :

$$u(x) = V_{x_0,\varepsilon}(x).e^{i\langle x, \xi + i\tau N\rangle} = V_{x_0,\varepsilon}(x).e^{i\langle x,\xi\rangle}.e^{\langle x,\tau N\rangle} \quad .$$

La formule de Leibniz-Hörmander donne :

(3) $$P(D)\,u = \sum_{\alpha} [P^{(\alpha)}(D)\, e^{i\langle x,\xi+i\tau N\rangle}]\, \frac{D^{(\alpha)} V_{x_0,\varepsilon}}{\alpha!}$$

et

(3') $$Q(D)\,u = \sum_{\alpha} [Q^{(\alpha)}(D).e^{i\langle x,\xi+i\tau N\rangle}].\frac{D^{(\alpha)} V_{x_0,\varepsilon}}{\alpha!}$$

d'où, écrivant (1) à l'aide de ces expressions,

(4) $$\tau^{\gamma}\int |\sum_{\alpha} Q^{(\alpha)}(\xi + i\tau N).\frac{D^{(\alpha)} V_{x_0,\varepsilon}(x)}{\alpha!}|^2\, e^{2\tau\psi(x)}.dx$$

$$\leq C \int |\sum_{\alpha} P^{(\alpha)}(\xi + i\tau N).\frac{D^{(\alpha)} V_{x_0,\varepsilon}(x)}{\alpha!}|^2 . e^{2\tau\psi(x)}$$

où $\psi(x) = \varphi(x) - \langle x , N_0\rangle - \varphi(x_0) + \langle x_0 , N_0\rangle$.

Comme $\varphi \in C^2(\bar{\Omega})$, si on pose $\varepsilon = \tau^{-1/2}$ on a sur le support de $V_{x_0,\varepsilon}$ $|\frac{\psi(x)}{\tau}| < a$ où a est indépendant de x_0 .

Donc

(5) $$e^{-2a} \leq e^{2\tau\psi(x)} \leq e^{2a} \quad .$$

(4) devient, après changement de la constante, en tenant compte de (5)

(6) $$\tau^{\gamma}\int |\sum_{\alpha} Q^{(\alpha)}(\xi + i\tau N) \frac{D^{(\alpha)} V_{x_0,\varepsilon}(x)}{\alpha!}|^2 .dx$$

$$\leq C \int |\sum_{\alpha} P^{(\alpha)}(\xi + i\tau N).\frac{D^{(\alpha)} V_{x_0,\varepsilon}(x)}{\alpha!}|^2\, dx \quad .$$

Nous effectuons le changement de variables

$$x_i - x_{i,0} \longrightarrow \frac{x_i - x_{i,0}}{\varepsilon} \qquad (1 \leq i \leq m) \quad .$$

Il vient, tenant compte de $\varepsilon^2\tau = 1$, après avoir divisé gauche et droite de (6) par le module du jacobien de ce changement de variables

(7) $$\tau^{\gamma}\int |\sum_{\alpha} Q^{(\alpha)}(\xi + i\tau N).\tau^{\frac{|\alpha^*|}{2}}.\frac{D^{(\alpha)} W(x)}{\alpha!}|\, dx$$

$$\leq C \int |\sum_{\alpha} P^{(\alpha)}(\xi + i\tau N).\tau^{\frac{|\alpha^*|}{2}}.\frac{D^{(\alpha)} V(x)}{\alpha!}|\, dx \quad .$$

Or, on a le lemme suivant :

LEMME. - Pour tout k, si $V \in \mathcal{D}(R^n)$ la forme quadratique des variables (t_α)

$$F(t_\alpha) = \int |\sum_{\alpha \leq k} t_\alpha \frac{D^\alpha V}{\alpha!}|^2 . dx$$

est définie positive.

Donc il existe des constantes C_1 et C_2 telles que :

(8) $$C_1(\sum t_\alpha^2) \leq F(t_\alpha) \leq C_2(\sum_\alpha t_\alpha^2) \quad .$$

Tenant compte de (8), (7) se transforme en

(9) $$\tau^\gamma.(\sum_\alpha |Q^{(\alpha)}(\xi + i\tau N)|^2.\tau^{|\alpha^*|}) \leq C.(\sum_\alpha |P^{(\alpha)}(\xi + i\tau N)|^2.\tau^{|\alpha^*|})$$

et la proposition 1 est démontrée.

En particulier, (1) implique

(10) $$\tau^\gamma |Q(\xi + i\tau N)|^2 \leq C. \sum_\alpha |P^{(\alpha)}(\xi + i\tau N)|^2.\tau^{|\alpha^*|}$$

inégalité plus facile à analyser que la précédente (9). On a le théorème suivant :

THÉORÈME. - Soit $P(\xi)$ un polynôme homogène de degré p. Pour que, pour tout polynôme Q de degré $p - 1$ et tout N, il existe une inégalité du type (10), il faut et il suffit que

i. Les $P^{(\alpha)}(\xi)$ $|\alpha| = 1$ n'aient que 0 comme zéro réel commun.

ii. Les $P^{(\alpha)}(\xi)$ $|\alpha| = 2$ n'aient que 0 comme zéro complexe commun.

DÉMONSTRATION.- Nécessité : Si $N = 0$, on a l'inégalité

(11) $$\tau^\gamma |Q(\xi)|^2 \leq C. \sum_\alpha |P^{(\alpha)}(\xi)|^2.\tau^{|\alpha^*|} \quad ,$$

C indépendant de ξ.

Si $P^{(\alpha)}(\xi_0) = 0$ pour un ξ_0, $|\alpha| = 1$, alors $P(\xi_0) = 0$ puisque P est homogène.

On peut trouver un polynôme Q homogène de degré $p - 1$ tel que $Q(\xi_0) \neq 0$. Donc $\tau^\gamma |Q(\xi_0 . t)|^2$ est de degré $2(p - 1)$ en t.

$|P^{(\alpha)}(t.\xi_0)|^2.\tau^{|\alpha^*|}$ est de degré $2(p - \alpha)$ en t au plus et $(\alpha \geqslant 2)$ si (i) n'est pas rempli. Si on a une inégalité (11), faisant tendre t vers l'infini, on aura une contradiction. (i) est nécessaire.

Soit maintenant $N \neq 0$, et soit $\xi_0 + i\tau_0 N_0$, un zéro commun aux $P^{(\alpha)}(\xi)$, $|\alpha| = 2$, donc aux $P^{(\alpha)}(\xi)$, $|\alpha| \leq 2$ puisque P et ses dérivées sont homogènes. Nous pouvons trouver Q homogène de degré $(p - 1)$ tel que $Q(\xi_0 + i\tau_0 N_0) \neq 0$.

Soit $\xi = t\xi_0$, $\tau = t\tau_0$, t variable. $(t\tau_0)^{\gamma}\ |Q(t(\xi_0 + i\tau_0 N_0))|^2$ est de degré $\gamma + 2(p-1)$ en t .

$$(t\tau_0)^{|\alpha^*|}\ |P^{(\alpha)}(t(\xi_0 + \tau_0 N_0))|^2 = t^{2[p-|\alpha|+|\alpha^*|]}\tau_0^{|\alpha^*|}\ |P^{(\alpha)}(\xi_0 + i\tau_0 N_0)|^2$$

donc ce terme est de degré inférieur ou égal à $2p - |\alpha|$ en t , et si (ii) n'est pas vérifié

$$|\alpha| \geqslant 3 \quad \text{et} \quad 2p - 3 < 2p - 2 + \gamma \quad (\gamma \geqslant 0) \quad .$$

Faisant tendre dans (10), t vers ∞ , C ne dépendant ni de τ ni de ξ , nous aboutissons à une contradiction. (ii) est bien nécessaire.

Suffisance : On fait $\alpha = \alpha^*$. Alors on a

$$(12) \qquad |\xi + i\tau N|^{2(p-1)} \leq C.\sum_{|\alpha|=1} |P(\xi + i\tau N)|^2.\tau + \sum_{|\alpha|=2} |P(\xi + i\tau N)|^2.\tau^2$$

En effet, chaque membre de cette inégalité est homogène de degré $(2p - 2)$, donc pour démontrer l'inégalité (12) il suffit de la démontrer pour $|\xi + i\tau N| = 1$. Mais (i) entraîne que $\sum_{|\alpha|=1} |P(\xi)|^2$ ne s'annule pas si $\xi \in R^n - \{0\}$, et (ii) entraîne que $\sum_{|\alpha|=2} |P(\xi + i\tau N)|^2.\tau^2$ ne s'annule pas pour $N \neq 0$. Comme nous sommes sur un compact, (12) en résulte.

Puisque $P \neq 0$, il existe une dérivée de P qui est une constante. On a donc l'inégalité

$$(13) \qquad 1 + |\xi + i\tau N|^{2(p-1)} \leq C.\sum_{\alpha} |P^{(\alpha)}(\xi + i\tau N)|^2.\tau^{\alpha}$$

et si Q est un polynôme quelconque de degré $p - 1$,

$$(14) \quad \text{puisque} \qquad \frac{|Q(\xi + i\alpha N)|^2}{1 + |\xi + i\tau N|^{2(p-1)}} \leq C$$

on en déduit une inégalité (10) avec $\alpha = \alpha^*$.

REMARQUE. - Si on suppose que le degré de Q est inférieur ou égal à $p - k$, on trouvera par le même raisonnement les conditions nécessaires et suffisantes

(i,i) les $P^{(\alpha)}(\xi)$, $|\alpha| \leq k$, n'ont que 0 comme zéro réel commun.

(ii,i) les $P^{(\alpha)}(\xi)$, $|\alpha| < 2k$, n'ont que 0 comme zéro complexe commun.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HÖRMANDER (Lars). - On the uniqueness of the Cauchy problem, Math. Scand., t. 6, 1958, p. 213-225.