SÉMINAIRE SCHWARTZ

LAURENT SCHWARTZ

Esquisse d'une résolution du problème mixte par la méthode des ondes stationnaires

Séminaire Schwartz, tome 3 (1955-1956), exp. n° 7, p. 1-2
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1955-1956__3__A8_0>

-:-:-:-

Séminaire SCHWARTZ

Problèmes mixtes
pour l'équation des ondes

Année 1955/56

-:-:-:-

6 juin 1956

Exposé n° 7

ESQUISSE D'UNE RÉSOLUTION DU PROBLÈME MIXTE PAR LA MÉTHODE DES ONDES STATIONNAIRES.

par Laurent SCHWARTZ

On se servira désormais de la suite des V_ν :

$$V_\nu = \sqrt{1 + s_\nu^2}\, U_\nu \quad , \ (\text{donc } \| V_\nu \|_{L^2} = 1)$$

On posera également : $\mathcal{D}_k = \mathcal{D}'_{-k}$ et $L^2 = \mathcal{D}'_0$.

On se propose d'abord d'étudier si les critères d'appartenance à $\mathcal{D}'_{-1}$, $\mathcal{D}'_0$, $\mathcal{D}'_1$ trouvés dans l'exposé précédent peuvent se généraliser aux autres espaces $\mathcal{D}'_k$. Ce n'est sûrement pas le cas pour $k \leq -2$ car alors les V_ν ne font plus partie de $\mathcal{D}'_k$. En tout état de cause on a vu qu'il ne peut plus y avoir d'unicité. Par contre on a le

<u>THÉORÈME</u> - Pour $k \geqslant -1$ une condition nécessaire et suffisante pour que $T \in \mathcal{D}'_k$ est qu'il existe un développement $T = \sum c_\nu V_\nu$ dans $\mathcal{D}'$ avec $\sum \frac{|c_\nu|^2}{s_\nu^{2k}} < \infty$.

- La condition est suffisante. <u>Si</u> k <u>est pair</u>, puisque $\sum \frac{|c_\nu|^2}{s_\nu^{2k}} < \infty$ il existe $S = \sum \frac{c_\nu}{s_\nu^k} V_\nu$ dans $\mathcal{D}'_0$. Alors $-\Delta S = \sum \frac{c_\nu}{s_\nu^{k-2}} V_\nu$ dans $\mathcal{D}'_2$; $(-\Delta)^2 S = \sum \frac{c_\nu}{s_\nu^{k-4}} V_\nu$ dans $\mathcal{D}'_4$ ... $(-\Delta)^{k/2} S = \sum c_\nu V_\nu = T$ dans $\mathcal{D}'_k$. <u>Si</u> k <u>est impair</u>, il existe $S = \sum \frac{c_\nu}{s_\nu^{k+1}} V$ dans $\mathcal{D}'_{-1}$. La suite du raisonnement est la même.

- La condition est nécessaire.

<u>Supposons d'abord</u> k <u>pair</u>. On rappelle que $(-\Delta + 1)^k$ établit un isomorphisme topologique de $\mathcal{D}'_{-k}$ sur $\mathcal{D}'_k$, ([1]) . Donc il existe R tel que

$(-\Delta + 1)^k R = T$ mais alors $S = (-\Delta + 1)^{k/2} R \in \mathcal{H}'_0$ donc $S = \sum d_\nu V_\nu$ avec $\sum |d_\nu|^2 < \infty$ d'où :

$$T = (-\Delta + 1)^{k/2} S = \sum d_\nu (1 + s_\nu^2)^{k/2} V_\nu = \sum c_\nu V_\nu \text{ , avec } \sum \frac{|c_\nu|^2}{s_\nu^{2k}} < \infty$$

Supposons ensuite k impair. On raisonne de même en passant par

$$S = (-\Delta + 1)^{\frac{k-1}{2}} R \in \mathcal{H}'_{-1} .$$

<u>Résolution du problème mixte</u>

On cherche une fonction u de t à valeurs dans un espace de distributions sur Ω et satisfaisant aux conditions :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = g(t) \\ u(0) = u'(0) = 0 \end{cases}$$

$g(t)$ est une fonction de t à valeurs dans un $\mathcal{H}'_k$. Elle a donc un développement (non unique si $k \geqslant 2$) $g(t) = \sum g_\nu(t) V_\nu(x)$. On va chercher un développement de la même forme pour u :

$$u = \sum u_\nu(t)\, V_\nu(x)$$

La fonction ainsi définie satisfera aux conditions demandées si :

$$\begin{cases} u''_\nu(t) + s_\nu^2 u_\nu(t) = g_\nu(t) \\ u_\nu(0) = u'_\nu(0) = 0 \end{cases}$$

L'équation différentielle ayant pour solution élémentaire :

$$e_\nu(t) = Y(t) \frac{\sin.\ s_\nu t}{s_\nu}$$

on aura :

$$u_\nu(t) = e_\nu(t) * g_\nu(t) .$$

Nous ne discuterons pas plus en détail le problème ; on voit que l'arbitraire dans le développement de $g(t)$ introduit un arbitraire dans la solution (sauf pour $k = 1$).

<u>Référence bibliographique</u>

[1] SCHWARTZ, L., Séminaire 2.- Paris, 1954/55 (multigraphié), page 17-03, exemple 1°) après la proposition 2 .