

SÉMINAIRE SCHWARTZ

Complément à l'exposé n° 6

Séminaire Schwartz, tome 3 (1955-1956), exp. n° 6 bis, p. 7-8

http://www.numdam.org/item?id=SLS_1955-1956__3__A7_0

© Séminaire Schwartz
(Secrétariat mathématique, Paris), 1955-1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schwartz » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

COMPLÉMENT A L'EXPOSÉ N° 6

Nous avons annoncé le théorème :

THÉORÈME. - Si Ω est borné, l'injection de $\mathcal{O}_1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte (complètement continue).

Appelons $\mathcal{O}_{1, \bar{\Omega}}(\mathbb{R}^n)$ le sous-espace de $\mathcal{O}_1(\mathbb{R}^n)$ formé des fonctions à support dans $\bar{\Omega}$. On sait ([1], 11-02, théorème 1) que, si on appelle \tilde{f} la fonction sur \mathbb{R}^n obtenue en prolongeant $f \in \mathcal{O}_1(\Omega)$ par 0 sur $\bar{\Omega}^c$, $f \rightarrow \tilde{f}$ est une application continue $\mathcal{O}_1(\Omega) \rightarrow \mathcal{O}_{1, \bar{\Omega}}(\mathbb{R}^n)$. D'autre part, si g_Ω est la restriction à Ω d'une fonction $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $g \rightarrow g_\Omega$ est une application continue $L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\Omega)$. Comme alors l'injection $\mathcal{O}_1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ se factorise en $\mathcal{O}_1(\Omega) \rightarrow \mathcal{O}_{1, \bar{\Omega}}(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\Omega)$, il suffit de démontrer que l'injection $\mathcal{O}_{1, \bar{\Omega}}(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ est compacte, c'est-à-dire que la boule unité de $\mathcal{O}_{1, \bar{\Omega}}(\mathbb{R}^n)$ est relativement compacte dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Nous nous appuyerons sur le

LEMME. - Dans un espace métrique complet, tout ensemble A , relativement compact à ε près quel que soit ε , est relativement compact.

Relativement compact à ε près signifie : il existe un relativement compact K_ε tel que tout point de K soit distant de K_ε d'au plus ε . Il existe en effet un recouvrement de $K_{\varepsilon/4}$ par un nombre fini de boules de rayon $\varepsilon/4$. Les boules concentriques de rayon ε recouvrent A . Par suite, quel que soit $\varepsilon > 0$ il existe un recouvrement de A par un nombre fini de boules de rayon ε , ce qui entraîne bien que A soit précompact donc relativement compact puisque l'espace est complet. Le lemme est démontré.

Soit alors $\rho \in \mathcal{D}$ et pour l'instant fixe. \mathcal{B} est bornée dans $\mathcal{O}_{1, \bar{\Omega}}(\mathbb{R}^n)$ donc dans \mathcal{E}' , donc l'ensemble des $f * \rho$, où $f \in \mathcal{B}$, est borné donc relativement compact dans \mathcal{D} , et par suite dans L^2 dont la topologie est moins fine.

Nous allons maintenant montrer que, quel que soit ε , on peut choisir $\rho \in \mathcal{D}$ de façon que $\|f * \rho - f\|_{L^2} \leq \varepsilon$ pour $f \in \mathcal{B}$. Nous nous servirons d'une

paramétrix de l'équation de Laplace : si on prend une fonction α , égale à $-C = -\frac{1}{(n-2)S_n}$ au voisinage de 0, vérifiant $0 \geq \alpha \geq -C$, et ayant son support dans la boule $B_{\varepsilon_1} : |x| \leq \varepsilon_1$, on a :

$$\Delta \left(\frac{\alpha}{r^{n-2}} \right) = \delta - \rho \quad \text{où } \rho \in \mathcal{D} \text{ et support de } \rho \subset B_{\varepsilon_1}$$

et par suite : $f * \Delta \left(\frac{\alpha}{r^{n-2}} \right) = f - \rho * f$

ou encore
$$f - \rho * f = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} * \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\alpha}{r^{n-2}} \right)$$

On sait que si $g \in L^2$ et μ est une mesure à support compact, $g * \mu \in L^2$ et :

$$\|g * \mu\|_{L^2} \leq \|g\|_{L^2} \int |\mu| :$$

ce qui donne ici :

$$\|f - \rho * f\|_{L^2} \leq \sum \left\| \frac{\partial f}{\partial x^i} \right\|_{L^2} \cdot \int_{B_{\varepsilon_1}} \left| \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\alpha}{r^{n-2}} \right) \right| dx$$

nous avons donc maintenant à majorer :

$$\int_{B_{\varepsilon_1}} \left| \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\alpha}{r^{n-2}} \right) \right| dx \leq \int \left| (2-n) \frac{x^i \alpha}{r^n} \right| dx + \int \frac{1}{r^{n-2}} \left| \frac{\partial \alpha}{\partial x^i} \right| dx$$

or :
$$\int_{B_{\varepsilon_1}} \left| \frac{x^i \alpha}{r^n} \right| dx \leq C \int_{B_{\varepsilon_1}} \frac{1}{r^{n-1}} dx = \int_0^{\varepsilon_1} k_1 dr = k_1 \varepsilon_1$$

On peut prendre α de façon que $\left| \frac{\partial \alpha}{\partial x^i} \right| \leq \frac{k_2}{\varepsilon_1}$ (il suffit de prendre une fonction α_0 égale à $\frac{-1}{(n-2)S_n}$ au voisinage de 0 et de support contenu dans la

boule B_1 de cent. 0 et de rayon 1, et $\alpha(x) = \alpha_0 \left(\frac{x}{\varepsilon_1} \right)$, donc :

$$\int_{B_{\varepsilon_1}} \frac{1}{r^{n-2}} \left| \frac{\partial \alpha}{\partial x^i} \right| dx \leq \int \frac{k_2}{\varepsilon_1} \frac{dx}{r^{n-2}} = \int_0^{\varepsilon_1} \frac{k_3}{\varepsilon_1} r \cdot dr = k_3/2 \cdot \varepsilon_1$$

et finalement
$$\int_{B_{\varepsilon_1}} \left| \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\alpha}{r^{n-2}} \right) \right| dx \leq k \varepsilon_1$$

d'où $\|f - \rho * f\|_{L^2} \leq k' \varepsilon_1$.

En prenant $k' \varepsilon_1 = \varepsilon$ cela montre bien que \mathcal{D} est relativement compacte à ε près.

Référence bibliographique

[1] SCHWARTZ L., Séminaire, 2.- Paris, 1954/55 (multigraphié).