LAURENT SCHWARTZ

Effet d'une transformation de Laplace inverse sur G_{p^2}

Séminaire Schwartz, tome 3 (1955-1956), exp. n° 3, p. 1-2
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1955-1956__3__A3_0>

-:-:-:-

Séminaire SCHWARTZ 11 mai 1956

Problèmes mixtes
pour l'équation des ondes

Année 1955/56

Exposé n° 3

-:-:-:-

EFFET D'UNE TRANSFORMATION DE LAPLACE INVERSE SUR G_{p^2}

par Laurent SCHWARTZ

-:-:-:-

$p \longrightarrow G_{p^2}$ fonction holomorphe de la variable complexe p, pour $\mathcal{R}_p > 0$; $G_{p^2} \in \mathcal{L}(\mathcal{D}'_1 ; \mathcal{D}_1)$ (1), $\| G_{p^2} \| \leq A|p|$ pour $\xi = \mathcal{R}_p \geq \varepsilon > 0$; G_{p^2} est la transformée de Laplace d'une distribution : $G(\hat{t})$, à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{D}'_1 ; \mathcal{D}_1)$ (voir propriété de majoration), à support dans $(0, +\infty)$.

On a d'autre part, si J est l'injection canonique de $\mathcal{D}_1$ dans $\mathcal{D}'_1$, et si I (resp. I') est l'opérateur identique de $\mathcal{D}_1$(resp. $\mathcal{D}'_1$) :

1°) $G_{p^2}(p^2 J - \Delta) = I$

G_{p^2} est à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{D}'_1 ; \mathcal{D}_1)$

$p^2 J - \Delta$ est à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{D}_1 ; \mathcal{D}'_1)$

d'où

$G_{p^2}(p^2 J - \Delta)$ est à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{D}_1 ; \mathcal{D}_1)$.

Effectuons une transformation de Laplace inverse ; elle transforme la multiplication en convolution ; il vient :

$$G(\hat{t}) \sqsupset G_{p^2}$$

$$G(\hat{t}) * (J \otimes \delta''(\hat{t}) - \Delta \otimes \delta(\hat{t})) = I \otimes \delta(\hat{t})$$

où

$G(\hat{t}) \in \mathcal{D}'^{+}_t(\mathcal{L}(\mathcal{D}'_1 ; \mathcal{D}_1))$

$$\left\{\begin{array}{l} J \text{ injection de } \mathcal{D}_1 \text{ dans } \mathcal{D}'_1 \\ J \otimes \delta''(\hat{t}) \in \mathcal{D}'^{+}_t(\mathcal{L}(\mathcal{D}_1 ; \mathcal{D}'_1)) \\ \Delta \otimes \delta(\hat{t}) \quad \mathcal{D}'^{+}_t(\mathcal{L}(\mathcal{D}_1 ; \mathcal{D}'_1)) \\ I \text{ opérateur identique de } \mathcal{D}_1 \text{ dans } \mathcal{D}_1 . \end{array}\right.$$

(1) Nous abrégeons : $\mathcal{D}_1$ veut dire $\mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$, $\mathcal{D}'_1$ veut dire $\mathcal{D}'^1_{L^2}(\Omega)$.

ce qui peut s'écrire :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} G \circ J - G \circ \Delta = I \otimes \delta(\hat{t})$$

Ce sont des distributions en t à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{D}_1 ; \mathcal{D}_1)$.

Cela revient à dire que, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}_t$,

$$G(\varphi'') \circ J - G(\varphi) \circ \Delta = \varphi(0)\, I ,$$

relation entre opérateurs de $\mathcal{D}_1$ dans $\mathcal{D}_1$ (avec $G(\varphi) \in \mathcal{L}(\mathcal{D}'_1 ; \mathcal{D}_1)$, $G(\varphi'') \in \mathcal{L}(\mathcal{D}'_1 ; \mathcal{D}_1)$).

2°) $(p^2 J - \Delta)\, G_{p^2} = I$

relation qui donne :

$$J \circ \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \Delta \circ G = I' \otimes \delta(t)$$

I' opérateur identique de $\mathcal{D}'_1$ dans $\mathcal{D}'_1$ ce qui signifie que, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}_t$:

$$J \circ G(\varphi'') - \Delta \circ G(\varphi) = I'\, \varphi(0) .$$

On notera symboliquement : $\Box = J . \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$; c'est un opérateur différentiel en t à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{D}_1 ; \mathcal{D}'_1)$ puisque ses coefficients sont éléments de $\mathcal{L}(\mathcal{D}_1 ; \mathcal{D}'_1)$

on a donc :

$$\begin{cases} G \,\Box = I\,\delta \\ \Box\, G = I'\,\delta \end{cases}$$