Laurent Schwartz

Rappels divers

Séminaire Schwartz, tome 3 (1955-1956), exp. nº 2, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1955-1956__3__A2_0>

Faculté des Sciences de Paris

-:-:-:-

Séminaire SCHWARTZ

Problèmes mixtes
pour l'équation des ondes

Année 1955/56

-:-:-:-

4 mai 1956

Exposé n° 2

RAPPELS DIVERS

par Laurent SCHWARTZ

- 1 -

DISTRIBUTIONS A VALEURS VECTORIELLES

1.- Définition des distributions à valeurs vectorielles. Espace $\mathcal{D}'(E)$.

Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe complet. $\mathcal{D}$ désigne l'espace des fonctions scalaires définies sur R^n , indéfiniment différentiables à support compact, muni de la topologie habituelle [1] . On désigne par $\mathcal{D}'(E)$, espace des distributions à valeurs dans E , l'espace $\mathcal{L}_b(\mathcal{D}, E)$ des applications linéaires continues de $\mathcal{D}$ dans E , muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées (ou ce qui est équivalent, sur les parties compactes) de $\mathcal{D}$.

Toute fonction $x \longrightarrow \vec{u}(x)$ continue de R^n dans E , définit une distribution de $\mathcal{D}'(E)$ (notée encore $\vec{u}$) par

$$\vec{u}(\varphi) = \int \vec{u}(x)\, \varphi(x)\, dx$$

intégrale à valeurs dans E , $\varphi \in \mathcal{D}$.

De même, un élément de l'espace $\mathcal{D}' \otimes E$ ($\mathcal{D}'$ espace des distributions scalaires) est une distribution de $\mathcal{D}'(E)$. $T \otimes \vec{e}$, $T \in \mathcal{D}'$, $\vec{e} \in E$, définit en effet une distribution de $\mathcal{D}'(E)$ par

$$(T \otimes \vec{e})(\varphi) = T(\varphi)\, \vec{e} \qquad \varphi \in \mathcal{D}$$

On définit le support, dans R^n , d'une distribution $\vec{T} \in \mathcal{D}'(E)$ comme dans le cas scalaire.

2.- Opérations sur les distributions à valeurs vectorielles.

N.B. Dans ce paragraphe et dans les 2 suivants (transformations de Fourier et de Laplace) nous nous proposons seulement de rappeler certaines définitions et certaines propriétés relatives aux distributions à valeurs vectorielles. Nous ne donnerons donc aucune démonstration des résultats énoncés.

- Si $\vec{T} \in \mathcal{D}'(E)$, sa dérivée $\dfrac{\partial \vec{T}}{\partial x_k} \in \mathcal{D}'(E)$ est définie par

$$\left\langle \frac{\partial \vec{T}}{\partial x_k} , \varphi \right\rangle = - \left\langle \vec{T} , \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right\rangle \qquad \varphi \in \mathcal{D}$$

- Soit F , un espace vectoriel topologique localement convexe, complet. Soit $u \in \mathcal{L}(E , F)$. On appelle image de $\vec{T} \in \mathcal{D}'(E)$ par u , et on note $u \circ \vec{T}$ ou $u(\vec{T})$ ou $u \vec{T}$, la distribution $\vec{S} \in \mathcal{D}'(F)$ définie par

$$\vec{S}(\varphi) = u[\vec{T}(\varphi)] \qquad \varphi \in \mathcal{D} .$$

- Si $\alpha \in \mathcal{E}$, espace des fonctions indéfiniment différentiables, définies sur R^n , à valeurs scalaires, muni de la topologie usuelle [1] , $\alpha \vec{T} \in \mathcal{D}'(E)$ est défini par

$$\langle \alpha \vec{T} , \varphi \rangle = \langle \vec{T} , \alpha \varphi \rangle \qquad \varphi \in \mathcal{D} .$$

- Si $S \in \mathcal{D}'$, moyennant certaines conditions sur les supports de S et de $\vec{T} \in \mathcal{D}'(E)$, on définit $\vec{T} * S \in \mathcal{D}'(E)$ par

$$\langle \vec{T} * S , \varphi \rangle = \langle \vec{T} , \check{S} * \varphi \rangle \qquad \varphi \in \mathcal{D} .$$

En particulier, on peut définir la régularisée $\vec{S}(x)$ de $\vec{T} \in \mathcal{D}'(E)$ par $\alpha \in \mathcal{D}$:

$$\vec{S}(x) = \vec{T} * \alpha = \langle \vec{T}_\xi , \alpha(x - \xi) \rangle \quad .$$

$\vec{S}(x)$ est une fonction indéfiniment différentiable de x à valeurs dans E

<u>Produit de composition de</u> $\vec{S} \in \mathcal{D}'(E)$ <u>par</u> $\vec{T} \in \mathcal{E}'(F)$. (E et F Banach).
$\mathcal{E}'(F)$ est formé des distributions de $\mathcal{D}'(F)$ à support compact ; il sera muni de la topologie $\mathcal{L}_b(\mathcal{E}, F)$.

Soit B une application bilinéaire continue de $E \times F$ dans G .

Si $\vec{f}$ est une fonction continue à valeurs dans E et $\vec{g}$ une fonction continue à valeurs dans F et à support compact.

$$h(x) = \vec{f} * \vec{g} = \int B(\vec{f}(x - \xi) , \vec{g}(\xi)) \, d\xi \quad .$$

définit une fonction continue de x à valeurs dans G que l'on appelle produit de composition des fonctions $\vec{f}$ et $\vec{g}$, relativement à B .

Cette notion se généralise et on peut définir le produit de composition $\vec{S} * \vec{T} = \vec{U}$, relativement à B . $\vec{U}$ sera alors une distribution de $\mathcal{D}'(G)$ et l'application $(\vec{S} , \vec{T}) \longrightarrow \vec{S} * \vec{T}$ de $\mathcal{D}'(E) \times \mathcal{E}'(F)$ dans $\mathcal{D}'(G)$ est hypocontinue par rapport aux parties bornées (pour une définition précise de $\vec{S} * \vec{T}$, voir [2] , exposés 23 et 24).

3.- Transformation de Fourier.

$\mathcal{S}$, $\mathcal{O}_M$, et $\mathcal{O}'_C$ désignent respectivement les espaces des fonctions indéfiniment différentiables à décroissance rapide, à croissance lente, et l'espace des distributions à décroissance rapide. Les topologies sont celles de [1] . On introduit l'espace $\mathcal{S}'(E) = \mathcal{L}_b(\mathcal{S}, E)$: une distribution $\vec{T} \in \mathcal{D}'(E)$ est dans $\mathcal{S}'(E)$ si elle se prolonge en une application linéaire continue de $\mathcal{S}$ dans E , on dira encore qu'elle est tempérée.

On définit la transformée de Fourier $\mathcal{F}\vec{T}$, de $\vec{T} \in \mathcal{S}'(E)$ par

$$\langle \mathcal{F}\vec{T}, \varphi \rangle = \langle \vec{T}, \mathcal{F}\varphi \rangle \qquad \varphi \in \mathcal{S} .$$

C'est un isomorphisme topologique de $\mathcal{S}'(E)$ sur $\mathcal{S}'(E)$. De plus, si $\vec{T} \in \mathcal{S}'(E)$ et $\alpha \in \mathcal{O}_M$
alors

1°) $\mathcal{F}\vec{T} \in \mathcal{S}'(E)$; $\mathcal{F}\alpha \in \mathcal{O}'_C$

2°) $\alpha\vec{T} \in \mathcal{S}'(E)$; $\mathcal{F}(\alpha\vec{T}) \in \mathcal{S}'(E)$

3°) $\mathcal{F}\vec{T} \times \mathcal{F}\alpha$ a un sens et est élément de $\mathcal{S}'(E)$ et on a

$$\mathcal{F}(\alpha\vec{T}) = \mathcal{F}\vec{T} \times \mathcal{F}\alpha .$$

4.- Transformation de Laplace (pour les démonstrations voir [4]) .

- Cas des distributions scalaires à une variable t

Soit $T \in \mathcal{D}'_R$, vérifiant

1°) $T \in \mathcal{D}'_+$ (support dans $[0 , +\infty]$) .

2°) il existe ξ_0 , tel que pour $\xi > \xi_0$, on ait

$$e^{-\xi t}\, T \in \mathcal{S}'$$

T admet une transformée de Laplace :

$$F(p) = \langle T , e^{-pt} \rangle \quad \text{définie pour} \quad \xi = \mathrm{Re}(p) > \xi_0 .$$

En effet, soit $\alpha(t)$ une fonction indéfiniment différentiable à support limité à gauche, et égale à 1 dans un voisinage du support de T .

Pour $\xi > \xi_0$, il existe ξ_1 vérifiant $\xi_0 < \xi_1 < \xi$. Alors $e^{-\xi_1 t}\, T \in \mathcal{S}'$ et $\alpha(t)\, e^{-(p-\xi_1)t} \in \mathcal{S}$. Par suite, l'expression

$$(1) \qquad \langle e^{-\xi_1 t}\, T , \alpha(t)\, e^{-(p-\xi_1)t} \rangle$$

a un sens. Cette expression est indépendante de ξ et donne par définition ce que nous appelons $\langle T , e^{-pt} \rangle$.

On a relativement à $F(p)$ la proposition suivante

<u>PROPOSITION 1</u> : $F(p)$ est une fonction holomorphe de p, pour $\xi = \mathrm{Re}(p) > \xi_0$. De plus, pour $\xi \geq \xi_1 > \xi_0$, on a

$$|F(p)| \leq \text{Polynome en } |p| .$$

Réciproquement, si $F(p)$ est une fonction de la variable complexe p, holomorphe dans un demi-plan $\xi = \mathrm{Re}(p) > \xi_0$, et majorée par un polynome en $|p|$, alors $F(p)$ est transformée de Laplace d'une distribution T unique à support dans $[0 , +\infty]$ et vérifiant $e^{-\xi t} T \in \mathcal{S}'$ pour $\xi > \xi_0$.

– <u>Cas des distributions de la variable</u> t, <u>à valeurs dans</u> E.

Nous désignerons par $\mathcal{D}'_t(E)$ l'espace des distributions de la seule variable t, à valeurs dans E.

Soit $\vec{T} \in \mathcal{D}'_t(E)$. Si $\vec{T}$ vérifie les 2 propriétés suivantes :

1°) $\vec{T}$ a son support dans $[0 , +\infty]$

2°) il existe ξ_0 tel que pour $\xi > \xi_0$, on ait $e^{-\xi t} \vec{T} \in \mathcal{S}'(E)$

Sa transformée de Laplace :

$$\vec{F}(p) = \langle \vec{T} , e^{-pt} \rangle$$

fonction de la variable complexe p, à valeurs dans E, est alors définie par

$$\vec{F}(p) = \langle e^{-\xi_1 t} \vec{T} , \alpha(t) e^{-(p-\xi_1)t} \rangle$$

pour $\xi = \mathrm{Re}(p) > \xi_0$.

<u>Si</u> E <u>est un Banach</u>, la proposition 1 se généralise par :

<u>PROPOSITION 2</u> : $\vec{F}(p)$ est une fonction holomorphe de p, à valeurs dans E pour $\xi = \mathrm{Re}(p) > \xi_0$, et on a

$$\|\vec{F}(p)\|_E \leq \text{Polynome en } |p| \text{ pour } \xi \geq \xi_1 > \xi_0 .$$

Réciproquement, si $\vec{F}(p)$ est une fonction holomorphe de p, à valeurs dans E, pour $\xi = \mathrm{Re}(p) > \xi_0$ et si $\|\vec{F}(p)\|_E$ est majorée par un polynome en $|p|$, alors $\vec{F}(p)$ est transformée de Laplace d'une distribution $\vec{T}$ unique de $\mathcal{D}'_t(E)$, à support dans $[0 , +\infty]$ et vérifiant pour $\xi > \xi_0$, $e^{-\xi t} \vec{T} \in \mathcal{S}'(E)$.

PROBLÈME DE DIRICHLET RELATIF À $p^2 - \Delta$.

Notations : Nous utiliserons constamment dans tout ce qui va suivre, les espaces $\mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$ et $\mathcal{D}'^1_{L^2}(\Omega)$, définis dans l'exposé 1 de ce séminaire et dans l'exposé n° 14 de [3]. Pour simplifier l'écriture nous les désignerons respectivement par $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}'_1$.

Nous verrons plus loin comment l'étude des problèmes mixtes pour l'équation des ondes nous conduira, par une transformation de Laplace par rapport à la variable t , à la résolution du problème suivant :

Problème : A étant donnée dans $\mathcal{D}'_1$, trouver U dans $\mathcal{D}_1$, vérifiant

$$(p^2 - \Delta)\, U = A .$$

(p nombre complexe, Δ Laplacien, Ω ouvert de R^n) .

Ce problème a été étudié dans [3] . Nous nous proposons ici de montrer que la fonction de Green G_{p^2} , relative à l'opérateur $(p^2 - \Delta)$ est transformée de Laplace en t d'une distribution

$$\vec{G}_t \in \mathcal{D}'_+ (\mathcal{L} (\mathcal{D}'_1 , \mathcal{D}_1)) ,$$

($\mathcal{L} (\mathcal{D}'_1 , \mathcal{D}_1)$ est muni de sa topologie d'espace de Banach) ce qui nous permettra de passer, par une transformation de Laplace inverse du problème posé au problème initial.

Nous savons, d'après [3] , que G_{p^2} possède les propriétés suivantes :

1°) C'est une fonction holomorphe de p , à valeur dans l'espace de Banach $\mathcal{L}(\mathcal{D}'_1 , \mathcal{D}_1)$ pour p^2 différent d'un nombre réel < 0 , c'est-à-dire pour $\xi = \mathrm{Re}(p) > 0$.

2°) Elle vérifie les équations fonctionnelles :

$$(p^2 - \Delta)\, G_{p^2} = I \qquad \text{dans} \quad \mathcal{L}(\mathcal{D}'_1 , \mathcal{D}'_1)$$

$$G_{p^2}\, (p^2 - \Delta) = I \qquad \text{dans} \quad \mathcal{L}(\mathcal{D}_1 , \mathcal{D}_1)$$

3°) Majoration de $\| G_{p^2} \|$ quand $|p| \longrightarrow \infty$.

Posons $p = \xi + i\, \eta$

Il suffit de majorer $\| G_{p^2} \|$ dans les 2 régions suivantes

a) région 1, correspondant à $\operatorname{Re} p^2 = \xi^2 - \eta^2 \geq 1$

On sait que dans cette région

$$\| G_{p^2} \| \leq 1$$

b) région 2, correspondant à $\operatorname{Re} p^2 \leq 1$, ou $\xi^2 - \eta^2 \leq 1$. Dans cette région, on a, pour $|p| \longrightarrow \infty$:

$$\| G_{p^2} \| \leq \frac{|p^2 - 1|}{|\operatorname{Im} p^2|} \leq \frac{|p^2 - 1|}{2 \varepsilon |\eta|} \qquad \text{si} \qquad \xi \geq \varepsilon > 0 \, .$$

Quand $|p| \longrightarrow \infty$,

$|p^2 - 1|$ est de l'ordre de $|p|^2 = \xi^2 + \eta^2 \underset{\sim}{\leq} 2\eta^2$.

On a donc dans la région 2, quand $|p| \longrightarrow \infty$.

$$\| G_{p^2} \| \leq K \frac{|\eta|^2}{|\eta|} = K |\eta|$$

ou encore $\| G_{p^2} \| \leq K \, |p|$.

$\Bigg\}$ K est constante > 0 .

Par suite pour $|p|$ assez grand, $\| G_{p^2} \|_{\mathcal{L}(\mathcal{D}'_1, \mathcal{D}_1)}$ est majorée par un polynome en $|p|$. 1°) et 3°) ainsi que la proposition 2 , entraînent alors que G_{p^2} est transformée de Laplace d'une distribution unique $\vec{G}_t \in \mathcal{D}'_+ (\mathcal{L} (\mathcal{D}'_1 , \mathcal{D}_1))$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] SCHWARTZ, L., Théorie des distributions, t. 1 et 2 .- Paris, Hermann, 1950 et 1951.

[2] SCHWARTZ, L., Séminaire SCHWARTZ, 1. Paris, 1953/54 (multigraphié).

[3] SCHWARTZ, L., Séminaire SCHWARTZ, 2. Paris, 1954/55 (multigraphié).

[4] SCHWARTZ, L., Transformation de Laplace des distributions, Tome supplémentaire. - Lund, 1952.