

# SÉMINAIRE SCHWARTZ

L. SCHWARTZ

## Opérateurs analytiques elliptiques (fin)

*Séminaire Schwartz*, tome 2 (1954-1955), exp. n° 6, p. 1-5

[http://www.numdam.org/item?id=SLS\\_1954-1955\\_\\_2\\_\\_A9\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SLS_1954-1955__2__A9_0)

© Séminaire Schwartz  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schwartz » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

OPÉRATEURS ANALYTIQUES ELLIPTIQUES (fin).

-:-:-:-

THÉORÈME - Si  $D$  est un opérateur différentiel à coefficients constants dans  $\mathbb{R}^n$ , ayant une solution élémentaire à gauche  $E$  analytique dans  $\mathbb{R}^n$ , toute distribution  $T$  définie dans un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ , telle que  $DT = S$  soit analytique dans  $\Omega$ , est elle-même analytique dans  $\Omega$ .

Nous avons déjà démontré ce théorème dans l'exposé n° 5, en nous appuyant sur le théorème de Cauchy-Kowalewska; nous en donnerons ici une démonstration indépendante de ce théorème.

Comme dans l'exposé n° 5, on peut supposer  $T$  définie dans  $\mathbb{R}^n$  et à support compact,  $\Omega$  borné dans  $\mathbb{R}^n$ . On a  $T = E * DT = E * S$ . Nous allons démontrer la propriété suivante qui ne suppose pas que  $E$  soit solution élémentaire d'un opérateur différentiel :

PROPOSITION 1. - Si  $E$  est une distribution analytique dans  $\mathbb{R}^n$ , et si  $S \in \mathcal{E}'$ ,  $T = E * S$  est analytique dans tout ouvert  $\Omega$  où  $S$  est analytique.

Soit  $\omega$  un ouvert  $\bar{\omega} \subset \Omega$ ,  $\Omega$  borné et soit  $\alpha \in \mathcal{D}$  une fonction de support  $K$  dans  $\Omega$ , égale à 1 dans un voisinage ouvert  $V$  de  $\bar{\omega}$ .

$$T = E * (1 - \alpha)S + E * \alpha S.$$

Comme  $(1 - \alpha)S = 0$  dans  $\omega$ ,  $E * (1 - \alpha)S$  est analytique dans  $\omega$  (le potentiel  $E * A$  est analytique dans le complémentaire du support de  $A$ ; c'est ce que nous avons vu dans l'exposé n° 5 à propos de l'analyticité des solutions de l'équation homogène). Il reste donc à montrer que  $E * \alpha S$  est analytique dans  $\omega$ . Or  $\alpha S$  peut s'écrire  $\alpha f$ , où  $f$  est une fonction analytique sur un voisinage de support de  $\alpha$ .

Nous savons déjà que  $E * \alpha f$  est infiniment différentiable puisque  $\alpha f$  l'est. Calculons alors les dérivées de  $E * \alpha f$ . Les  $D_i$  désigneront des

dérivées partielles d'ordre 1 .

Une dérivée d'ordre  $m$  peut s'écrire  $D_m D_{m-1} \dots D_2 D_1 (E * \alpha f)$  .

$$D_1 (E * \alpha f) = E * (D_1 \alpha) f + E * \alpha (D_1 f)$$

$$D_2 D_1 (E * \alpha f) = D_2 E * (D_1 \alpha) f + E * (D_2 \alpha) (D_1 f) + E * \alpha (D_2 D_1 f)$$

Supposons que l'on ait :

$$D_m D_{m-1} \dots D_1 (E * \alpha f) = \left\{ \sum_{l=1}^m D_m D_{m-1} \dots D_{l+1} E * (D_l \alpha) (D_{l-1} \dots D_1 f) \right\} \\ + E * \alpha (D_m D_{m-1} \dots D_1 f) \quad (I)$$

En dérivant il viendrait :

$$D_{m+1} D_m \dots D_1 (E * \alpha f) = D_{m+1} \left\{ \sum_{l=1}^m D_m \dots D_{l+1} E * (D_l \alpha) (D_{l-1} \dots D_1 f) \right. \\ \left. + E * (D_{m+1} \alpha) (D_m \dots D_1 f) + E * \alpha (D_{m+1} \dots D_1 f) \right\} \\ = \left\{ \sum_{l=1}^{m+1} D_{m+1} \dots D_{l+1} E * (D_l \alpha) (D_{l-1} \dots D_1 f) \right\} \\ + E * \alpha (D_{m+1} \dots D_1 f)$$

ce qui démontre par récurrence que (I) donne bien l'expression de  $D_m \dots D_1 (E * \alpha f)$  .

a). Majorons d'abord le dernier terme de (I). Il est un produit de convolution de  $E$  avec une distribution à support compact  $K \subset \Omega$ , donc il ne dépend dans  $\omega$  que des valeurs de  $E$  dans un ouvert borné  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  ( $U = \omega - K$  par exemple).

Dans  $U$ ,  $E$  est somme finie  $\sum_{|q| \leq k} D^q g_q$ ,  $\int_U |g_q| \leq M$  .

$$\text{Alors } |E * \alpha (D_m \dots D_1 f)| \leq c_k M \sup_{\substack{|q| \leq k \\ x \in K}} |D^q (D_m \dots D_1 f)|$$

$$\leq C_k \sup_{\substack{|q| \leq k \\ x \in K}} |D^q \alpha| \sup_{\substack{|q| \leq k \\ x \in K}} |D^q D_m \dots D_1 f|$$

ce qui,  $f$  étant uniformément analytique dans  $K$ , et  $\alpha$  et  $k$  indépendants de  $m$ , semajore par une expression de la forme  $C^{m+k} (m+k)!$

b) Majorons maintenant  $D_m D_{m-1} \dots D_{l+1} (E * (D_l \alpha) (D_{l-1} \dots D_1 f))$ .  $\alpha$  étant égale à 1 dans le voisinage  $V$  de  $\bar{\omega}$ ,  $D_l \alpha$  est nulle dans  $V$  donc le support de  $(D_l \alpha) (D_{l-1} \dots D_1 f)$  est contenu dans le compact  $K \cap \bar{V}$  .

Alors le produit de convolution ne dépend que des valeurs de  $D_m \dots D_{l+1} E$  dans l'ouvert  $\omega - (K \cap \bar{V})$ , contenu dans le compact

$\bar{\omega} - (K \cap \{V\}) \subset \bar{\omega} - \{V \subset \{0\}$ , de sorte que  $E$  est uniformément analytique dans  $\omega - (K \cap \{V\})$ .

On a donc des majorations  $|D_m \dots D_{l+1} E(x)| \leq A^{m-1} (m-1)!$  (uniforme analyticité de  $E$ ) pour  $x \in \omega - (K \cap \{V\})$

$|(D_1 \alpha)(D_{l-1} \dots D_1 f)| \leq B_1 B^{l-1} (l-1)!$  (uniforme analyticité de  $f$  dans  $K$   $B_1 =$  borne supérieure du module des dérivées d'ordre 1 de  $\alpha$ ).

Finalement on aura une majoration du type

$$\begin{aligned} & |D_m \dots D_{l+1} E * (D_1 \alpha)(D_{l-1} \dots D_1 f)| \\ & \leq (C')^m (m-1)! (l-1)! \leq C''^m m! \end{aligned}$$

Le nombre des termes de la somme  $\sum$  de (I)  tant  $m$ , on aura finalement pour cette somme  $\sum$  la majoration  $C''^m (m+1)!$  d'où finalement, dans  $\omega$ ,

$$\begin{aligned} & |D_m \dots D_1 (E * \alpha f)| \\ & \leq C^{m+k} (m+k)! + C''^m (m+1)! \leq C'''^m m! \end{aligned}$$

d'où l'analyticité de  $E * \alpha f$  donc de  $E * S$  dans  $\omega$ , et par suite dans  $\Omega$  C.Q.F.D.

REMARQUE. Dans cette démonstration on peut remplacer la classe des fonctions analytiques par d'autres classes de fonctions indéfiniment différentiables (ce qu'on ne pouvait pas faire dans la démonstration de l'exposé n  5, utilisant Cauchy-Kowalewska). On peut aussi supposer que les  $D_j$  sont des dérivées partielles par rapport à certaines des coordonnées seulement, et démontrer des propriétés d'analyticité partielle par rapport à certaines variables. C'est ce que nous allons voir.

EXEMPLE : L'opérateur de la chaleur  $D = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$

On démontrera que la solution élémentaire est  $E = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} Y(t)$  où  $Y(t)$  est la fonction d'Heaviside, nulle pour  $t \leq 0$ , égale à 1 pour  $t > 0$ .

L'opérateur de la chaleur est elliptique. Si l'on intègre  $E$  au voisinage de l'origine successivement par rapport à  $x$  puis  $t$ , on obtient une valeur finie : on définit donc bien ainsi une distribution (qui, en fait, est une fonction positive).

Etudions la majoration des dérivées successives de  $t$  pour  $x$  voisin de  $x_0$  non nul et  $t > 0$  voisin de 0 (car  $E$  est analytique pour  $t \neq 0$ ).

Remplaçons  $x$  par  $z = \rho e^{i\varphi}$  et  $t$  par  $u = r e^{i\theta}$ ,  $|E(z, u)|$  est égal

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi r}} e^{-(r^2/4r)\cos(2\varphi-\theta)}.$$

Au voisinage de  $x$  et  $t$ , prenons  $|\rho e^{i\varphi} - x| = k|x|$  et  $|\rho e^{i\theta} - t| = kt$  avec  $k$  suffisamment petit pour que  $|2\varphi - \theta| \leq \omega < \frac{\pi}{2}$ .

On aura alors  $|E(z,u)| \leq \frac{A}{\sqrt{E}} e^{-B \frac{x^2}{t}}$ ,  $A, B$ , constantes  $> 0$  convenables.

D'après les inégalités de Cauchy :

$$\left| \frac{\partial^1}{\partial x^1} \frac{\partial^m}{\partial t^m} E(x,t) \right| \leq \frac{1! m!}{(kx)^1 (kt)^m} \sup_{\substack{|Z-x|=k|x| \\ |u-t|=kt}} |E(Z,u)|$$

$$\leq \frac{1! m!}{k^{1+m} |x|^1 t^m \sqrt{t}} e^{-B \frac{x^2}{t}} \leq \frac{C_1^{1+m}}{t^{m+\frac{1}{2}}} e^{-B \frac{x^2}{t}} 1! m!$$

pour  $x$  voisin de  $x_0 \neq 0$ .

Il nous faut majorer maintenant  $t^{-(m+\frac{1}{2})} e^{-B \frac{x^2}{t}}$  pour  $x$  voisin de  $x_0$ ,  $t$  voisin de  $0$ , en fonction de  $m$  seulement. Le logarithme de cette expression est  $-(m+\frac{1}{2}) \log t - B \frac{x^2}{t}$ ; il vaut  $-\infty$  avec  $m$ ; il a un maximum entre  $t=0$  et  $t=\xi$ , donné par  $-\frac{m+\frac{1}{2}}{t} + \frac{B x^2}{t^2} = 0$  ou  $t = \frac{B x^2}{m+\frac{1}{2}}$ , qui tend vers  $0$  pour  $m \rightarrow \infty$ . En remplaçant  $t$  par cette valeur dans la majoration ci-dessus, on aura :

$$t^{-(m+\frac{1}{2})} e^{-B \frac{x^2}{t}} \leq C_2^m (m + \frac{1}{2})^{m+\frac{1}{2}} \text{ et}$$

$$\left| \frac{\partial^1}{\partial x^1} \frac{\partial^m}{\partial t^m} E(x,t) \right| \leq C_3^{1+m} 1! m! (m + \frac{1}{2})^{m+\frac{1}{2}} \leq C^{1+m} 1!(2m)! \quad (2)$$

On a donc les conclusions suivantes :

1°)  $E(x,t)$  est indéfiniment différentiable, de la classe 2 dans  $\left\{ 0 \right\}$ , ce qui signifie que dans tout compact de  $\left\{ 0 \right\}$  on a une majoration  $|D^p E| \leq C^p (2p)!$  ( $p = (p_1, p_2)$ ). (Cette classe n'est pas quasi-analytique, ce qui était évident a priori puisque  $E = 0$  dans le demi-plan  $t \leq 0$  et  $E \neq 0$  pour  $t > 0$ ).

2°)  $E$  est partiellement analytique en  $x$  dans  $\left\{ 0 \right\}$ , ce qui signifie que l'application  $x \rightarrow E(x, \hat{t})$  est une fonction analytique de  $x$  à valeurs dans l'espace des fonctions indéfiniment différentiables de  $t$ , pour  $(x, t) \neq (0, 0)$ ; ou encore que dans tout compact de  $\left\{ 0 \right\}$ , on a une majoration relative aux dérivées partielles en  $x, t$  :

$$\left| D_x^p D_t^q E \right| \leq k_q C^p p!$$

3°)  $E$  est de classe  $(1,2)$  en  $(x,t)$ , au sens de la majoration (2), valable sur tout compact de  $\int 0$ .

Les méthodes utilisées dans l'exposé actuel sont valables quand on remplace la classe analytique par les précédentes, d'où :

PROPOSITION 2. - Toute distribution  $T$  d'un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  est de classe 2 (resp. de classe  $(1,2)$  en  $(x,t)$ , resp. partiellement analytique en  $x$ ), si  $\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$  a cette propriété (en particulier si  $T$  est solution de l'équation homogène  $\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$ ).

Cette étude montre combien les propriétés locales d'une solution élémentaire à gauche dans  $\int 0$  renseignent sur les propriétés locales des solutions de l'équation homogène.

---