

# SÉMINAIRE SCHWARTZ

L. SCHWARTZ

## Rappels sur les supports de produits de convolution

*Séminaire Schwartz*, tome 2 (1954-1955), exp. n° 5, p. 1-4

[http://www.numdam.org/item?id=SLS\\_1954-1955\\_\\_2\\_\\_A7\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SLS_1954-1955__2__A7_0)

© Séminaire Schwartz  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schwartz » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

Faculté des Sciences de Paris

-:-:-:-

Séminaire SCHWARTZ  
(Equations aux dérivées partielles)  
Année 1954/55

10 décembre 1954

-:-:-:-

Exposé n° 5 (L. SCHWARTZ)RAPPELS SUR LES SUPPORTS DE PRODUITS DE CONVOLUTIONNotations : (a) Le support d'une distribution  $T$  sera  $\mathbb{T}$ 

(b) Si  $y$  parcourt  $A$  et si  $x$  parcourt un ouvert  $\Omega$ , l'ensemble des  $x-y$  sera noté  $\Omega - A$ . C'est un ouvert, réunion des ouverts  $\Omega - y$ ,  $y \in A$ , translatés de  $\Omega$ . Lorsqu'en particulier  $A$  contient l'origine,  $\Omega \subset \Omega - A$ .

Définitions :  $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$  sera l'ensemble des points dont la distance à  $\bar{\Omega}$  est

$$> \varepsilon \quad \text{c.a.d.} \quad x \in \Omega_\varepsilon \iff d(x, \bar{\Omega}) > \varepsilon$$

Théorème 1. Si  $\underline{S} \subset A$  et  $\underline{T} \subset B$ ,  $\underline{S} * \underline{T} \subset \overline{A + B}$ 

(L. Schwartz, Théorie des Distributions, tome II, p. 12 et ailleurs).

Proposition 1. Si  $\underline{S} \subset A$  et si  $\underline{T}$  est nulle dans  $\Omega - A$ ,  $\underline{S} * \underline{T}$  est nulle dans  $\Omega$ .

L'hypothèse sur  $\underline{T}$  entraîne que  $\underline{T} \subset \overline{(\Omega - A)}$ . Si  $x \in \Omega$  et  $y \in \overline{(\Omega - A)}$ , on ne peut avoir  $x + y \in \Omega$  qui entrainerait  $y \in \Omega - A$ . Donc  $x + y \in \overline{\Omega}$  (fermé car  $\Omega$  est ouvert). Il en résulte que  $\underline{S} * \underline{T} \subset \overline{\Omega}$  et  $\underline{S} * \underline{T}$  est nulle dans  $\Omega$ .

Corollaire. Si  $\underline{S} \subset A$  et si  $\underline{T}$  est nulle dans  $(\Omega - A)_\varepsilon$ ,  $\underline{S} * \underline{T}$  est nulle dans  $\Omega_\varepsilon$ .

On vient de voir que  $A + \overline{(\Omega - A)} \subset \overline{\Omega}$  Or  $\overline{\Omega}_\varepsilon = \overline{\Omega} + B_\varepsilon$ ,  
 $B_\varepsilon =$  boule  $|x| \leq \varepsilon$ . Donc  $A + \overline{(\Omega - A)} + B_\varepsilon \subset \overline{\Omega} + B_\varepsilon$  ou encore  
 $A + \overline{(\Omega - A)}_\varepsilon \subset \overline{\Omega}_\varepsilon$  (cqfd).  
ainsi :

- (1).  $\underline{S} \subset A$ ,  $\underline{T} = 0$  dans  $(\Omega - A)_\varepsilon \implies \underline{S} * \underline{T} = 0$  dans  $\Omega_\varepsilon$
- (2).  $\underline{S} \subset A + B_\varepsilon$ ,  $\underline{T} = 0$  dans  $\Omega - A \implies \underline{S} * \underline{T} = 0$  dans  $\Omega_\varepsilon$
- (3).  $\underline{S} \subset A + B_\varepsilon$ ,  $\underline{T} = 0$  dans  $(\Omega - A)_\varepsilon \implies \underline{S} * \underline{T} = 0$  dans  $\Omega_{2\varepsilon}$

Proposition 2. Si  $\underline{S} \subset A$ , si  $\underline{T}$  est définie dans  $\Omega - A$  mais non forcément prolongeable et si  $\Omega - A \subset A_1$ , ensemble fermé tel que la convolution pour des distributions de supports  $A$  et  $A_1$  sont possibles, alors  $\underline{S} * \underline{T}$  est définie

dans  $\Omega$ .

Prenons une distribution  $T_1$  qui coïncide avec  $T$  dans  $(\Omega - A)_\varepsilon$  et telle que  $T_1 \in (\Omega - A)_{\varepsilon/2}$ .  $T_1$  est prolongeable, a son support dans  $A_1$ , donc  $S * T_1$  a un sens. Cette définition est indépendante de  $T_1$  dans  $\Omega_\varepsilon$  car si on remplace  $T_1$  par  $T_1'$ , on a  $T_1 - T_1' = 0$  dans  $(\Omega - A)_\varepsilon$ , donc  $S * T_1 = S * T_1'$  dans  $\Omega_\varepsilon$  (cf. Corollaire de la proposition 1). En faisant alors tendre  $\varepsilon$  vers 0, on définit  $S * T$  dans  $\Omega$ .

Proposition 3. Si  $\underline{S} \subset A$  et si  $T$ , prolongeable ou non, est dans  $\Omega - A \subset A_1$  (voir prop.2), une fonction indéfiniment différentiable,  $S * T$  est dans  $\Omega$  une fonction indéfiniment différentiable.

En choisissant  $T_1$  comme précédemment, elle est indéfiniment différentiable, donc  $S * T_1$  est indéfiniment différentiable dans  $\Omega_\varepsilon$ . On a le résultat lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Remarque. Le résultat subsiste si  $S$ , définie dans  $\mathbb{R}^n$  et de support  $\subset A$ , est dans  $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ , et  $T$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega - A)$ .

Proposition 4. Si  $\underline{S} \subset A$  et si  $T$ , prolongeable ou non, est dans  $\Omega - A \subset A_1$  (prop.2) une fonction analytique,  $S * T$  est dans  $\Omega$  une fonction analytique.

La démonstration étant locale, on prend  $\Omega$  petit (donc borné). La valeur de  $S * T$  ne dépend alors dans  $\Omega$  que des valeurs de  $S$  dans un ensemble borné (1). On peut donc supposer que  $A = \underline{S}$  est compact. Comme  $T$  est analytique dans  $\Omega - A$ , en prenant  $f = T$ , on aura :

$$|D^p f| \leq C^{|p|} |p|! \text{ dans } (\Omega - A)_\varepsilon.$$

Par ailleurs  $S$ , de support compact  $A$ , est somme de  $k$  dérivées de fonctions continues de supports contenus dans  $A + B_\varepsilon$  :

$$S = \sum_q D^q g_q, \quad |q| \leq m, \quad \int_{\mathbb{R}^n} |g_q| \leq M.$$

D'après la proposition 2,  $S * f$  est indéfiniment différentiable dans  $\Omega$ .

---

(1) - L'hypothèse relative à  $A$  et  $A_1$  signifie que l'addition  $(\xi, \eta) \rightarrow \xi + \eta$  restreinte à  $A \times A_1$ , est continue à l'infini. L'image réciproque d'une partie bornée de  $A + A_1$  est alors bornée dans  $A \times A_1$ . Donc pour connaître  $S * T$  dans  $\Omega$  borné il suffit de connaître  $S$  dans  $\Omega - A_1$  dont l'intersection avec  $A$  est bornée. Si alors  $\beta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  est égale à 1 sur  $(\Omega - A_1) \cap A$ , on peut remplacer  $S$  par  $\beta S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ .

Dans  $\Omega_{2\varepsilon}$ , on aura la majoration :

$$|D^p(S*f)| \leq |S * D^p f| \leq \sum_q |g_q * D^{p+q} f| \leq k M C^{(|p|+m)} (|p|+m) !$$

donc  $S * f$  est bien analytique dans  $\Omega_{2\varepsilon}$ , donc dans  $\Omega$ .

Remarque. On aurait pu utiliser un prolongement aux valeurs complexes des variables. L'intérêt de la méthode de majoration est qu'elle s'étend aux classes de fonctions indéfiniment différentiables différentes de la classe analytique.

#### APPLICATION AUX ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

Théorème 2. Soit  $D$  un opérateur différentiel à coefficients constants, ayant une solution élémentaire à gauche indéfiniment différentiable dans  $\int 0$ , et soit  $T$  une distribution dans l'ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $D * T = S$  est indéfiniment différentiable dans  $\Omega$ ,  $S$  l'est aussi.

Soit en effet  $\omega$  une paramétrix à gauche de support contenu dans la boule  $B_\varepsilon$ . On a  $T = \omega * S + L * T$ . Comme  $\omega \subset B_\varepsilon$  et que  $S \in \mathcal{E}(\Omega)$ ,  $\omega * S$  est définie et indéfiniment différentiable dans  $\Omega_\varepsilon$ . Comme  $L \subset B_\varepsilon$  et que  $T$  est définie dans  $\Omega$ ,  $L * T$  est définie dans  $\Omega_\varepsilon$ ; comme  $L \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ ,  $L * T$  est dans  $\mathcal{E}(\Omega_\varepsilon)$  (remarque suivant la prop.3). D'où le résultat, avec  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Ce théorème donne la démonstration complète de la proposition 3 de l'exposé n° 4, dans le cas elliptique.

Théorème 3. Soit  $D$  un opérateur différentiel à coefficients constants, ayant une solution élémentaire à gauche, analytique dans  $\int 0$ , et soit  $T$  une distribution définie dans l'ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $D * T = S$  est analytique dans  $\Omega$ ,  $T$  l'est aussi.

A). Supposons d'abord  $D * T = 0$  dans  $\Omega$  borné ( $T$  est solution de l'équation homogène).

Soit  $T_1 \in \mathcal{E}'(\Omega)$ , égale à  $T$  dans  $\Omega_\varepsilon$ . Alors  $T_1 = E * D T_1$ . On a  $D T_1 = K$  compact  $\subset \int \Omega_\varepsilon$ . La valeur de  $T_1$  dans  $\Omega_\varepsilon$  ne dépend que de celle de  $E$  dans  $\Omega_\varepsilon - K \subset \int 0$ , alors  $E$  est analytique dans cet ouvert, donc (prop.4)  $T_1$  est analytique dans  $\Omega_\varepsilon$ , et par suite  $T$  dans  $\Omega$ , en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0.

B). Soit maintenant  $S$  analytique quelconque. Le théorème étant purement local, on peut prendre  $\Omega$  aussi petit qu'on veut. Mais s'il est assez petit, on peut, d'après le théorème de Cauchy-Kowaleswka, trouver une fonction

analytique  $f$  dans  $\Omega$  telle que  $Df = S$  <sup>(2)</sup>; alors  $D(T - f) = 0$  dans  $\Omega$  donc d'après A).  $T - f$  est analytique dans  $\Omega$ , et par suite aussi  $T$ .

Ce théorème donne la démonstration de la proposition 3 de l'exposé n° 4 dans le cas analytique-elliptique. La démonstration a l'inconvénient d'utiliser Cauchy-Kowalewska et par suite d'être absolument spéciale au cas analytique. Une autre démonstration sera donnée dans l'exposé suivant (n° 6).

-:-:-:-

---

(2) - L'équation  $Df = S$  est en effet analytique, on peut donc trouver  $f$  en choisissant même un certain nombre de ses dérivées transversales sur une hypersurface non caractéristique, égales à des fonctions analytiques données.