

# SÉMINAIRE SCHWARTZ

B. MALGRANGE

## Équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants avec second membres

*Séminaire Schwartz*, tome 2 (1954-1955), exp. n° 2, p. 1-5

[http://www.numdam.org/item?id=SLS\\_1954-1955\\_\\_2\\_\\_A3\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SLS_1954-1955__2__A3_0)

© Séminaire Schwartz

(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schwartz » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

Faculté des Sciences de Paris  
 -:-:-  
 Séminaire SCHWARTZ  
 (Equations aux dérivées partielles)  
 Année 1954/55  
 -:-:-

19 novembre 1954

Exposé n° 2 (B. MALGRANGE)

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES LINÉAIRES  
A COEFFICIENTS CONSTANTS AVEC SECOND MEMBRES.

-:-:-

I - EXISTENCE D'UNE SOLUTION ÉLÉMENTAIRE.

Soit  $D = \sum_{p_1, \dots, p_n} a_{p_1 \dots p_n} \frac{\partial^{p_1 \dots + p_n}}{\partial x^{p_1} \dots \partial x^{p_n}}$  un opérateur différentiel

à coefficients constants. On appelle solution élémentaire de l'opérateur  $D$  une distribution  $T$  telle que  $DT = \delta$  ( $\delta$  est la mesure de Dirac).

THÉORÈME 1 - Quel que soit  $D$ , il existe une solution élémentaire  $T$  de  $D$  appartenant à  $\mathcal{D}'^k$ , où  $k$  ne dépend que de la dimension  $n$  de  $\mathbb{R}^n$ .

Appelons toujours  $\check{D}$  le transformé de  $D$ , i.e. :

$$\langle DT, \varphi \rangle = \langle T, \check{D}\varphi \rangle \text{ pour tous } \varphi \in \mathcal{D}, T \in \mathcal{D}'.$$

Il s'agit d'établir que, si  $k$  est assez grand, il existe une distribution  $T$  d'ordre  $\leq k$ , i.e.  $T \in \mathcal{D}'^k$ , telle que :

$$\langle T, \check{D}\varphi \rangle = \varphi(0) \text{ pour toute } \varphi \in \mathcal{D}.$$

Indiquons d'abord comment va s'effectuer la démonstration. Désignons par  $\check{\mathcal{D}}\mathcal{D}$  le sous-espace de  $\mathcal{D}$  image de  $\mathcal{D}$  par l'application linéaire  $\varphi \rightarrow \check{D}\varphi$ .

$T$  est une forme linéaire sur  $\check{\mathcal{D}}\mathcal{D}$ , définie par :

$$\langle T, \chi \rangle = \varphi(0) \text{ si } \chi = \check{D}\varphi \in \check{\mathcal{D}}\mathcal{D}.$$

(l'expression de  $\chi \in \check{\mathcal{D}}\mathcal{D}$  comme  $\check{D}\varphi$  est unique, car  $\check{D}\varphi = 0, \varphi \in \mathcal{D}$ , entraîne  $\varphi = 0$  par Fourier ; donc pour  $\chi \in \check{\mathcal{D}}\mathcal{D}$  donnée,  $\langle T, \chi \rangle$  est bien déterminée).

Supposons avoir prouvé que  $T$  est une forme linéaire continue sur  $\check{\mathcal{D}}\mathcal{D}$  pour la topologie induite par  $\mathcal{D}^k$  (pour  $k$  assez grand). Alors, grâce au théorème de Hahn-Banach,  $T$  pourra être prolongée, à l'espace  $\mathcal{D}^k$  entier, en une forme linéaire  $\hat{T}$  continue, ce qui revient à dire que  $\hat{T} \in \mathcal{D}'^k$  ; on aura alors, pour toute fonction  $\varphi \in \mathcal{D}$  :

$$\langle D\hat{T}, \varphi \rangle = \langle \hat{T}, \check{D}\varphi \rangle = \langle T, \check{D}\varphi \rangle = \varphi(0)$$

ce qui prouvera bien que  $D\hat{T} = \delta$ .

Nous sommes donc ramenés à démontrer que  $T$  est continue sur  $\check{D}\mathcal{D}$  pour la topologie induite par  $\mathcal{D}^k$ , c'est-à-dire que, pour  $k$  assez grand, si des  $\check{D}\varphi \rightarrow 0$  au sens de  $\mathcal{D}^k$  ( $\varphi_j \in \mathcal{D}$ ), alors  $\varphi_j(0) \rightarrow 0$  (des  $f_j$  voulant dire un filtre de fonctions  $f_j$ , comme dans Schwartz, Théorie des Distributions).

Pour établir cela, nous utiliserons la transformation de Fourier.

En supposant que  $x_1$  n'est pas direction caractéristique de  $\check{D}$  (ce à quoi on peut toujours se ramener par changement d'axes), on peut écrire :

$$\check{D} = \frac{1}{(2\pi i)^m} \frac{\partial^m}{\partial x_1^m} + \sum_{h=0}^{m-1} \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^h \frac{\partial^h}{\partial x_1^h} D_h \left(\frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

où les  $D_h$  sont des polynômes de dérivation par rapport à  $x_i$  ( $2 \leq i \leq n$ ).

On a :

$$R = \mathcal{F}(\check{D}\delta) = y_1^m + \sum_{h=0}^{m-1} R_h(y_2, \dots, y_n) y_1^h$$

$R$  et les  $R_h$  sont des polynômes. Posons encore :

$$\Phi(y_1, y_2, \dots, y_n) = \mathcal{F}\varphi \quad \text{et} \quad y_j = \sigma_j + i\tau_j,$$

pour  $y$  complexe (les notations sont un peu différentes de celles de l'exposé 1).

On a évidemment :

$$|\varphi(0)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\Phi(\sigma_1, \dots, \sigma_n)| d\sigma_1 \dots d\sigma_n$$

Puisque  $\varphi \in \mathcal{D}$ , nous savons que  $\Phi$  est une fonction prolongeable, aux valeurs complexes de la variable, en fonction entière de type exponentiel, à décroissance rapide (ainsi que toutes ses dérivées) dans le champ réel. Posons :

$$A = \sup_{\mathbb{R}^n} \left| (1 + |\sigma_1|^{n+1} + \dots + |\sigma_n|^{n+1}) \Phi \right|$$

$A$  est  $< +\infty$  du fait que  $\Phi$  est à décroissance rapide dans le champ réel.

On a :

$$\int |\Phi| d\sigma \leq A \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\sigma_1 \dots d\sigma_n}{1 + |\sigma_1|^{n+1} + \dots + |\sigma_n|^{n+1}} = A \cdot K$$

donc  $|\varphi(0)| \leq AK$ , et remarquons que  $K$  est un nombre qui ne dépend pas de  $\varphi$ , mais seulement de la dimension  $n$  de l'espace. Il nous faut maintenant majorer convenablement  $A$ . Pour cela, nous allons majorer  $|\bar{\Phi}|$  et chacun des  $|\sigma_j^{n+1} \bar{\Phi}|$ . Nous appliquerons le lemme de l'exposé n° 1. On trouve ainsi:

$$|\bar{\Phi}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)| \leq \max_{|y-\sigma_1| \leq 2m} |R(y, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \bar{\Phi}(y, \sigma_2, \dots, \sigma_n)|$$

$$|\sigma_1^{n+1} \bar{\Phi}| \leq \max_{|y-\sigma_1| \leq 2m} |y^{n+1} R(y, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \bar{\Phi}(y, \sigma_2, \dots, \sigma_n)|$$

$$|\sigma_i^{n+1} \bar{\Phi}| \leq \max_{|y-\sigma_i| \leq 2m} |\sigma_i^{n+1} R(y, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \bar{\Phi}(y, \sigma_2, \dots, \sigma_n)|$$

pour  $2 \leq i \leq n$ .

Or pour tous les  $\sigma_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) et tout  $y = \sigma + i\tau$  tel que  $|y - \sigma_1| \leq 2m$ , on a :

$$\begin{aligned} |R(y, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \bar{\Phi}(y, \sigma_2, \dots, \sigma_n)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |e^{2i\pi yx_1}| |D^v \varphi| dx_1 \dots dx_n \\ &\leq \max_{|\tau| \leq 2m} \int e^{2\pi |\tau x_1|} |D^v \varphi| dx_1 \dots dx_n \end{aligned}$$

De même :

$$|\sigma_1^{n+1} \bar{\Phi}| \leq \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1} \max_{|\tau| \leq 2m} \int e^{2\pi |\tau x_1|} \left| \frac{\partial^{n+1}}{\partial x_1^{n+1}} D^v \varphi \right| dx_1 \dots dx_n.$$

On obtient des majorations analogues pour les  $|\sigma_j^{n+1} \bar{\Phi}|$  ( $2 \leq j \leq n$ ), d'où finalement :

$$A \leq \max_{|\tau| \leq 2m} \int \left\{ |D^v \varphi| + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1} \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial^{n+1}}{\partial x_j^{n+1}} D^v \varphi \right| \right\} e^{2\pi |\tau x_1|} dx$$

Si  $D^v \varphi$  converge vers 0 dans  $\mathcal{O}^{n+1}$ , l'intégrale du 2° membre converge vers 0, donc  $|\varphi(0)| \leq AK$  converge vers 0. Le théorème est ainsi démontré, avec  $k = n + 1$ .

Remarque. - La méthode classique de recherche des solutions élémentaires est basée sur la transformation de Fourier ou sur celle de Laplace. On suppose  $T \in \mathcal{S}'$  et, par Fourier par exemple, on passe de  $DT = \delta$  à  $P\mathcal{L} = 1$  ( $P = \mathcal{F}'D\mathcal{F}$ ,

$\mathcal{E} = \mathcal{F}(T)$  et on est ainsi ramené à un problème de division. Mais nous ne savons pas résoudre ce problème dans tous les cas, et rien ne nous autorise à supposer que la solution élémentaire <sup>que nous avons obtenue</sup> soit tempérée ; les majorations que nous avons obtenues dans la démonstration du théorème montrent que, si  $x_1 \neq 0$  n'est pas caractéristique, pour tout  $r > 0$  il existera une solution élémentaire  $T$  telle que  $e^{-r(x_1)} T$  soit tempérée.

## II - SOLUTION DE L'ÉQUATION AVEC SECOND MEMBRE.

**THÉORÈME 2 .-** Si  $f$  est une fonction  $(n + 1)$  fois continûment différentiable, il existe une fonction continue  $g$  telle que  $Dg = f$ .

On met  $f$  sous la forme  $f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i$ , où  $f_i \in \mathcal{D}^{n+1}$  et a son support dans le complémentaire de la boule ouverte  $S_i$  de centre  $0$ , de rayon  $i$ . Soit alors  $T$  une solution élémentaire de  $D$ ; on a, pour chaque  $i$ ,  $D(f_i * T) = f_i$ . La somme  $\sum f_i * T$  ne converge pas en général ; mais remarquons que, dans  $S_i$ , on a  $D(f_i * T) = Df_i * T = 0$ . Alors en vertu du théorème démontré dans l'exposé n° 1,  $f_i * T \in \mathcal{E}^0(S_i)$  peut être approchée, au sens de  $\mathcal{E}^0(S_i)$ , par les combinaisons linéaires d'exponentielles-polynômes solutions de  $DX = 0$  dans  $\mathbb{R}^n$ ; soit  $P_i$  une telle combinaison choisie de manière à ce que  $|f_i * T - P_i| \leq \frac{1}{2^i}$  sur  $S_{i-1}$  ( $P_i = 0$  pour  $i = 0$ ).

La série  $\sum_{i=0}^{\infty} (f_i * T - P_i)$  converge maintenant uniformément sur tout compact de  $\mathbb{R}^n$  vers une fonction continue  $g$ , et l'on a  $Dg = f$ .

C.Q.F.D.

Le procédé utilisé dans la démonstration est analogue à la méthode de Mittag-Leffler pour déterminer une fonction méromorphe ayant des parties principales relatives à ses pôles données à l'avance (Voir SCHWARTZ, Théorie des Distributions, T. II, Chap. VI, P. 68 et 69).

Si  $f \in \mathcal{D}^k$ , on peut écrire  $f = \sum_p D^p f_p$  (somme finie), où les  $f_p$  sont des fonctions  $(n + 1)$  fois continûment différentiables ; en vertu du théorème 2, on peut trouver  $g_p \in \mathcal{E}^0$  telle que  $Dg_p = f_p$ . Alors  $D(\sum_p D^p g_p) = f$ . Posons  $\mathcal{D}'_{\mathbb{F}} = \bigcup_{R=0}^{\infty} \mathcal{D}'^k$ ;  $\mathcal{D}'_{\mathbb{F}}$  est l'espace des distributions d'ordre fini ; nous venons de montrer que  $D\mathcal{D}'_{\mathbb{F}} = \mathcal{D}'_{\mathbb{F}}$ .

Si  $f \in \mathcal{E}$ , il existe  $g \in \mathcal{E}$  telle que  $Dg = f$ . En effet, on met  $f$  sous la forme  $f = \sum f_i$ , où  $f_i \in \mathcal{D}$  et où le support de  $f_i$  ne rencontre pas  $S_i$ . On approche ici  $f_i * T$  ( $DT = \delta$ ,  $T \in \mathcal{D}'^{n+1}$ ) par des exponentielles-polynômes solutions de  $DX = 0$ , au sens de  $\mathcal{E}(S_i)$ .

Précisons. On peut trouver  $P_i$ , combinaison finie d'exponentielles-polynômes, telle que toutes les dérivées d'ordre  $\leq i$  de  $(f_i * T - P_i)$  soient en module majorées par  $\frac{1}{2^i}$  dans  $S_{i-1}$ . Alors  $\sum_i (f_i * T - P_i)$  converge dans  $\mathcal{E}$  et répond à la question.

On ne sait pas si, lorsque  $f$  est une distribution quelconque, il existe une distribution  $g$  telle que  $Dg = f$ . La réponse est cependant affirmative, lorsque l'opérateur  $D$  vérifie la condition suivante : il existe une solution élémentaire  $T$ , qui soit une fonction indéfiniment différentiable dans le complémentaire de l'origine.

Signalons que cette condition est équivalente à la suivante : Si  $DU = V$  dans  $(U \in \mathcal{O}', V \in \mathcal{O}')$ ,  $U$  est indéfiniment différentiable tout ouvert où  $V$  l'est.

Un tel opérateur différentiel  $D$  est dit elliptique.

Supposons donc que  $D$  vérifie cette condition. Mettons  $f$  sous la forme  $f = \sum f_i$ , où  $f_i \in \mathcal{E}'$  et où le support de  $f_i$  ne rencontre pas  $S_i$ ;  $g_i = f_i * T$  est indéfiniment différentiable dans  $S_i$  et  $Dg_i = 0$  sur  $S_i$ .

On pourra trouver une suite d'exponentielles polynômes, solutions de  $DX = 0$  dans  $\mathbb{R}^n$ , qui approchent  $f_i * T$  au sens de  $\mathcal{E}(S_i)$ , (ou même  $\mathcal{E}^0(S_i)$ ), et on raisonne comme précédemment.

[L'indéfinie différentiabilité permet d'approcher  $f_i * T$  uniformément par une suite d'exponentielles-polynômes; sans elle, on devrait avoir recours à des filtres à base non dénombrable, puisque  $\mathcal{O}'$  n'est pas métrisable, et on ne pourrait plus considérer les séries  $\sum (f_i * T - P_i)$ ].

Exemples d'opérateurs auxquels cette étude s'applique :

- le laplacien,
- les laplaciens itérés,
- les  $(\Delta + \lambda)^q$ ,
- l'équation de la chaleur,

qui sont elliptiques, comme nous le verrons plus tard.