L. Schwartz

Ensembles *m*-polaires

Séminaire Schwartz, tome 2 (1954-1955), exp. n° 15, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1954-1955__2__A18_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire SCHWARTZ
(Equations aux dérivées partielles)
Année 1954/55
-:-:-:-

Exposé n° 15

ENSEMBLES m-POLAIRES.

-:-:-:-

Soit, comme d'habitude, Ω un ouvert de R^n. Nous allons maintenant nous intéresser au problème de savoir quand on a $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega) = \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$. Nous avons rencontré cette situation pour $\Omega = R^n$. Nous savons qu'alors le problème de Dirichlet, en tant que problème aux limites, subit une sorte de dégradation. En effet, il revient à chercher $u \in \mathcal{D}^1_{L^2}(R^n)$ tel que $(-\Delta + \lambda)\, u = f$, avec $f \in \mathcal{D}'^1_{L^2}(R^n)$.

Et nous avons vu que $(-\Delta + \lambda)$ est un isomorphisme de $\mathcal{D}^1_{L^2}(R^n)$ sur $\mathcal{D}'^1_{L^2}(R^n)$; il y a toujours une solution et une seule (en particulier, le problème homogène $(-\Delta + \lambda)\, u = 0$ n'admet que la solution $u = 0$) et la seule condition aux limites qui soit possible est exprimée par le fait même que $u \in \mathcal{D}^1_{L^2}(R^n) = \mathcal{E}^1_{L^2}(R^n)$. On aura les mêmes conclusions si R^n est remplacé par Ω et si $\mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega) = \mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$: la seule condition aux limites qui soit possible est que u soit nulle au contour de Ω. C'est à caractériser ce contour que vont servir les ensembles m-polaires.

ENSEMBLES m-POLAIRES.

Soit E un ensemble de R^n. On dira que E est m-*polaire* si toute distribution $\in \mathcal{D}'^m_{L^2}(R^n)$, ayant son support dans E, est nécessairement nulle.

Proposition 1 : Soit E un ensemble de R^n. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) *E est m-polaire ;*

b) *toute distribution T, localement d'ordre $\leq m$ (ordre par rapport à L^2) et ayant son support dans E, est nulle ;*

c) *toute distribution T, à support compact, d'ordre $\leq m$, et ayant son support dans E, est nulle.*

Rappelons qu'une distribution est localement d'ordre $\leq m$ par rapport à L^2, si elle peut s'exprimer, sur tout ouvert borné, par une somme finie de dérivées d'ordre $\leq m$ de fonctions de L^2. Une telle distribution appartient à $\mathcal{D}'^m_{L^2}(R^2)$ s'il existe une telle représentation indépendante de l'ouvert borné considéré.

Il est donc évident que b) $\Longrightarrow$ a) $\Longrightarrow$ c) . Montrons que c) $\Longrightarrow$ b) . Prenons une fonction $\alpha(x) \in \mathcal{D}(R^n)$. Si T est une distribution localement d'ordre $\leq m$, αT est à support compact (contenu dans E) et d'ordre $\leq m$, donc est nulle. Et comme α est quelconque, ceci entraîne la nullité de T .

<u>Proposition 2</u> : <u>Soit</u> Ω <u>un ouvert non vide de</u> R^n . <u>Les deux propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

a) $\complement\Omega$ <u>est</u> m-<u>polaire</u> ;

b) $\mathcal{D}(\Omega)$ <u>est dense dans</u> $\mathcal{D}^m_{L^2}(R^n)$.

C'est évident. Car dire que $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{D}^m_{L^2}(R^n)$ équivaut par dualité, à dire que toute distribution de $\mathcal{D}'^m_{L^2}(R^n)$, nulle dans Ω , est égale à zéro.

<u>Corollaire</u> : <u>Si</u> $\complement\Omega$ <u>est</u> m-<u>polaire</u>, $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$ <u>est isomorphe à</u> $\mathcal{D}^m_{L^2}(R^n) = \mathcal{E}^m_{L^2}(R^n)$.

Immédiat, étant donné que $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$ et $\mathcal{D}^m_{L^2}(R^n)$ induisent la même topologie sur $\mathcal{D}(\Omega)$.

Donnons quelques exemples : dans R^n , un ensemble 0-polaire est un ensemble de mesure nulle ; un ensemble 1-polaire est ce qu'on appelle, en théorie du potentiel, un ensemble de <u>capacité</u> nulle. Toujours dans R^n , un ensemble $([\frac{n}{2}]+1)$-polaire est vide. Cela résulte de ce que l'ordre de la mesure de Dirac en un point est exactement $[\frac{n}{2}]+1$ (rappelons qu'il s'agit ici de l'ordre par rapport à L^2) . Plus précisément :

<u>Proposition 3</u> : <u>Quel que soit l'opérateur de dérivation</u> D , <u>à coefficients constants, d'ordre</u> k , <u>la distribution</u> $D\delta$ <u>est d'ordre</u> $[\frac{n}{2}] + k + 1$ <u>par rapport à</u> L^2 .

1°) <u>L'ordre de</u> δ <u>est</u> $\leq [\frac{n}{2}] + 1$. Ceci entraînera que l'ordre de $D\delta$ est $\leq [\frac{n}{2}] + k + 1$. Pour établir ce point, il suffit de prouver que la transformée de Fourier de δ , à savoir la fonction 1 , est une somme finie de produits de polynomes de degré $\leq [\frac{n}{2}] + 1$ par des fonctions de

L^2 . Or on peut écrire :

$$1 = \frac{1+\sum_{i=1}^{n} |y_i|^{[\frac{n}{2}]+1}}{1+\sum_{i=1}^{n} |y_i|^{[\frac{n}{2}]+1}} = \frac{1}{1+\sum |y_i|^{[\frac{n}{2}]+1}} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} y_i^{[\frac{n}{2}]+1} \left(\frac{|y_i|}{y_i}\right)^{[\frac{n}{2}]+1} \frac{1}{1+\sum |y_i|^{[\frac{n}{2}]+1}} .$$

Or la fonction $\dfrac{1}{1+\sum |y_i|^{[\frac{n}{2}]+1}} \in L^2$ et $\left(\dfrac{|y_i|}{y_i}\right)^{[\frac{n}{2}]+1}$ est mesurable sur R^n et de module $= 1$.

2°) <u>L'ordre de</u> $D\delta$ <u>n'est pas</u> $\leqslant [\frac{n}{2}]+k$

Car supposons qu'il le soit. Il existe alors une expression de $D\delta$ de la forme :

$$D\delta = \sum_{\nu} D_{\nu} f_{\nu}$$

où la somme est finie, où les $f_{\nu} \in L^2$ et où les D_{ν} sont d'ordre $\leqslant [\frac{n}{2}] + k$. Par transformation de Fourier, on a :

$$P(y) = \sum_{\nu} Q_{\nu}(y)\ g_{\nu}(y)$$

où $P(y)$ est un polynome de degré k , et les $Q_{\nu}(y)$ sont des polynomes de degré $\leqslant [\frac{n}{2}] + k$.

Introduisons alors la définition suivante : un ensemble E de R^n sera dit <u>étroit</u> si $\underbrace{\int \cdots \int_E}_{n} \dfrac{dx}{r^n}$ est finie. Soit alors $u(x)$ une fonction intégrable sur R^n ; quel que soit $\varepsilon > 0$, on a $|u(x)| \leq \dfrac{\varepsilon}{r^n}$ sauf au plus sur un ensemble étroit (dépendant de ε , bien entendu). C'est évident, car si $|u(x)|$ était $> \dfrac{\varepsilon}{r^n}$ sur un ensemble non étroit F , on aurait

$$\int_F |u(x)|\ dx > \int_F \frac{\varepsilon}{r^n}\, dx = +\infty \quad \text{et} \quad u \notin L^1(R^n) .$$

Alors, puisque les g_{ν} sont de carré sommable, on a

$|g_{\nu}(y)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{r^{\frac{n}{2}}} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{r^{[\frac{n}{2}]}}$ sauf au plus sur un ensemble étroit E_{ε} (choisi pour tous les indices ν simultanément). D'autre part, il existe une constante A_ν telle qu'en dehors d'un voisinage compact K de l'origine, on ait $|Q_\nu(y)| \leq A_\nu r^{[\frac{n}{2}]+k}$, d'où l'on déduit :

$$|P(y)| \leq \sum_\nu |Q_\nu(y)|\,|g_\nu(y)| \leq \varepsilon\, A\, r^k \quad , \quad A = \sum_\nu A_\nu$$

sauf sur $E_\varepsilon \cup K$. Comme un tel ensemble E_ε existe quel que soit $\varepsilon > 0$, on voit que l'on parvient à une absurdité. En effet, $P(y)$ étant un polynome de degré k, il existe un cône d'angle au sommet non nul, tel que $|P(y)|$ soit $\geqslant Br^k$ dans ce cône, B fixe.
Un tel cône n'est certainement pas étroit.

C.Q.F.D.

Nous allons démontrer une propriété des ouverts Ω dont le complémentaire est 1-polaire.

<u>Proposition 4</u> : <u>Soit</u> Ω <u>un ouvert non vide de</u> R^n, <u>dont le complémentaire</u> $\complement\Omega$ <u>est</u> 1-<u>polaire</u>. <u>Alors pour toute fonction</u> $f \in \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ $(m \geq 1)$ <u>le prolongement</u> $\tilde{f}$ <u>est dans</u> $\mathcal{E}^m_{L^2}(R^n)$ <u>et l'on a</u> : $D^p(\tilde{f}) = (D^p f)^\sim$ <u>si</u> $|p| \leq m$. (Le prolongement $\tilde{f}$ s'obtient en prolongeant f par 0 dans $\complement\Omega$).

Il suffit de faire la démonstration pour $|p| \leq 1$, c'est-à-dire pour les dérivées premières $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. On a évidemment $\frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{f} = (\frac{\partial f}{\partial x_i})^\sim$ dans Ω, donc $S = \frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{f} - (\frac{\partial f}{\partial x_i})^\sim$ a son support dans $\complement\Omega$; mais, si $m \geq 1$, $S \in \mathcal{D}'^{1}_{L^2}(R^n)$ et puisque $\complement\Omega$ est 1-polaire, il s'ensuit que $S = 0$.

Nous allons maintenant établir le théorème principal de cette partie :

<u>Théorème 1</u> : <u>Soit</u> Ω <u>un ouvert non vide de</u> R^n. <u>Pour que</u> $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega) = \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$, <u>si</u> $m \geq 1$, <u>il faut et il suffit que</u> $\complement\Omega$ <u>soit</u> m-<u>polaire</u>.

Il est clair que l'énoncé de ce théorème n'est plus valable pour $m = 0$. Car $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{E}^0_{L^2}(\Omega) = L^2(\Omega)$ quel que soit Ω.

Remarquons que tout ensemble 1-polaire est vide sur la droite.

Nous utiliserons le lemme suivant :

<u>Lemme</u> : <u>Si</u> $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega) = \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ $(m \geq 1)$, $\complement\Omega$ <u>est de mesure nulle.</u>

Supposons que $\complement\Omega$ ne soit pas de mesure nulle ; il existe un ouvert U relativement compact tel que $U \cap \complement\Omega$ ne soit pas de mesure nulle et tel que $U \cap \Omega \neq \emptyset$ (ce qui est possible puisque $\Omega \neq \emptyset$). Notons 1_Ω la fonction définie et partout égale à 1 sur Ω et soit $\alpha(x) \in \mathcal{D}$, égale à 1 sur $U \cap \Omega$. Notons α_Ω la restriction de α à Ω ; évidemment, $\alpha_\Omega 1_\Omega \in \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$, donc $\alpha_\Omega 1_\Omega \in \mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$. Mais alors il est possible de prolonger par zéro $\alpha_\Omega 1_\Omega$ à R^n entier. Notons $\tilde{f}$ la fonction ainsi prolongée ; $\tilde{f} \in \mathcal{D}^m_{L^2}(R^n)$ et

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{f} = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \alpha_\Omega 1_\Omega \right)^{\sim} .$$

Or $\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \alpha_\Omega 1_\Omega\right)^{\sim}$ est nulle sur U, donc aussi $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}$. Il s'ensuit que $\tilde{f}$ est constante presque partout sur U ; mais comme $\tilde{f}$ prolonge $\alpha_\Omega 1_\Omega$, donc vaut 1 sur $U \cap \Omega$ et 0 sur $U \cap \complement \Omega$, cela signifie bien que $U \cap \complement \Omega$ est de mesure nulle, contrairement à ce qu'on a prétendu au départ.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 1 .

1°) <u>Si</u> $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega) = \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$, $\complement \Omega$ <u>est</u> m-<u>polaire</u>.

Le prolongement $g \longrightarrow \tilde{g}$ de $g \in \mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$ par zéro sur $\complement \Omega$ constitue un monomorphisme de $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}^m_{L^2}(R^n) = \mathcal{E}^m_{L^2}(R^n)$; notons $\tilde{I}$ ce monomorphisme. Il existe en outre une projection canonique π de $\mathcal{E}^m_{L^2}(R^n)$ dans $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$: c'est la restriction à Ω d'une fonction $\mathcal{E}^m_{L^2}(R^n)$. On a donc le schéma suivant :

$$\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega) \xrightarrow{\tilde{I}} \mathcal{D}^m_{L^2}(R^n) = \mathcal{E}^m_{L^2}(R^n) \xrightarrow{\pi} \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega) .$$

Puisque $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega) = \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$, on a $\pi \circ \tilde{I} = I$; on voit que π est un homomorphisme de $\mathcal{E}^m(R^n)$ <u>sur</u> $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$. Cet homomorphisme est biunivoque (donc est un isomorphisme). En effet, deux prolongements f_1 et f_2 à R^n de $f \in \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ ne diffèrent que sur $\complement \Omega$. Puisque $\complement \Omega$ est négligeable (lemme), cela veut dire que $f_1 = f_2$ au sens de L^2.

Il en résulte que $\mathcal{D}^m(\Omega) = \mathcal{D}^m_{L^2}(R^n)$, autrement dit, que $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{D}^m_{L^2}(R^n)$. Le résultat annoncé découle alors de la proposition 2.

2°) <u>Si</u> $\complement \Omega$ <u>est</u> m-<u>polaire</u>, <u>alors</u> $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega) = \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$.

Puisque $m \geq 1$, la proposition 1 s'applique. Elle peut s'énoncer de la façon suivante : π est une projection de $\mathcal{E}^m_{L^2}(R^n)$ <u>sur</u> $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$.

En appliquant encore la proposition 2, on voit que, par hypothèse, $\mathcal{D}(\Omega)$ s'envoie (par le prolongement $\widetilde{I}$) sur un sous-espace dense de R^n. Du schéma précédent :

$$\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega) \xrightarrow{\widetilde{I}} \mathcal{D}^m_L(R^n) = \mathcal{E}^m_{L^2}(R^n) \xrightarrow{\pi} \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega) ,$$

on déduit que $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$, i.e. que $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)} = \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$.

C.Q.F.D.

On peut définir des ensembles m-polaires sur une variété V indéfiniment différentiable. Remarquons que, tout comme pour R^n (proposition 1), cette définition peut n'être que locale : soit donc E un ensemble contenu entièrement dans le domaine ouvert U d'un système de coordonnées locales $(x^1, \dots, x^n)$. Soit u l'homéomorphisme canonique $v \longrightarrow (x^1(v), \dots, x^n(v))$ de U dans R^n ; u(U) est un ouvert de R^n. Nous dirons que E est m-<u>polaire</u> dans V^n si u(E) est m-polaire dans R^n. Plus généralement, un ensemble E sera dit m-polaire dans V^n si son intersection avec tout domaine d'un système de coordonnées locales est m-polaire. On vérifie sans peine que cette définition est (au voisinage de chaque point de V^n) indépendante du système de coordonnées locales choisi.

<u>Théorème 2</u> : <u>Soient</u> V^n <u>une variété indéfiniment différentiable</u>, W^p <u>une sous-variété de</u> V^n. <u>Pour que</u> W^p <u>soit m-polaire dans</u> V^n, <u>il faut et il suffit que l'on ait</u> : $p \leq n - 2m$.

Le fait d'être m-polaire étant un caractère purement local, on peut se borner à considérer une carte locale de V^n et à la plonger dans R^n. Il revient au même de remplacer carrément V^n par R^n ; de même, on peut remplacer W^p par R^p et identifier R^p à un sous-espace coordonnées de R^n. C'est-à-dire que l'on pose :

$$R^n = X^p \times Y^{n-p} .$$

Il s'agit de prouver que "$p \leq n - 2m$" équivaut à "X^p est m-polaire dans R^n". Notons x un point variable de X^p, y un point variable de Y^{n-p}.

1°) <u>Supposons</u> $m \geq [\frac{n-p}{2}] + 1$

Nous allons voir qu'il existe une distribution $T \in \mathcal{D}'^m_{L^2}(R^n)$ dont le support est contenu dans X^p. Il suffit de prendre :

$$T = \alpha(x) \otimes \delta(y)$$

où $\alpha \in \mathcal{D}_x$ et où $\delta(y)$ est la mesure de Dirac dans Y^{n-p}. D'après la prop. 3, $\delta(y)$ est d'ordre $[\frac{n-p}{2}] + 1$, donc d'ordre $\leq m$; donc somme de dérivées (en y) d'ordre $\leq m$ de fonctions de $L^2(Y)$; alors T est somme de dérivées (en y) d'ordre $\leq m$ de fonctions de $L^2(R^n)$ donc d'ordre $\leq m$. Donc X^p n'est pas $([\frac{n-p}{2}] + 1)$-polaire.

2°) X^p <u>est</u> $[\frac{n-p}{2}]$-<u>polaire.</u>

Il nous faut montrer que toute distribution d'ordre $\leq [\frac{n-p}{2}]$ (sur R^n), portée par X^p, est nulle.

Or toute distribution T portée par X^p peut s'écrire :

$$T = \sum_h T_h(x) \otimes D^h \delta(y) \quad .$$

Dire que T est d'ordre $\leq [\frac{n-p}{2}]$, c'est dire que T est une forme linéaire continue sur

$$\mathcal{D}_{L^2}^{[\frac{n-p}{2}]}(R^n)$$

, ou encore sur $\mathcal{D}(R^n)$ muni de la topologie induite par $\mathcal{D}_{L^2}^{[\frac{n-p}{2}]}(R^n)$. Prenons une suite de fonctions de $\mathcal{D}(R^n)$ de la forme $\varphi(x)\,\psi_\nu(y)$, où $\varphi \in \mathcal{D}_x$ est fixe et où les ψ_ν convergent vers 0 au sens de $\mathcal{D}_{L^2}^{[\frac{n-p}{2}]}(Y^{n-p})$, ce qui fait converger vers 0 les $\varphi(x)\,\psi_\nu(y)$, au sens de $\mathcal{D}_{L^2}^{[\frac{n-p}{2}]}(R^n)$. On a :

$$\langle T, \varphi\psi_\nu \rangle = \sum_h \langle T_h, \varphi \rangle \langle D^h\delta, \psi_\nu \rangle = \langle \sum_h \langle T_h, \varphi \rangle D^h\delta, \psi_\nu \rangle$$

et l'on doit avoir $\lim\limits_{\nu \to +\infty} \langle T, \varphi\psi_\nu \rangle = 0$.

$\sum\limits_h \langle T_h, \varphi \rangle D^h\delta$ est une combinaison linéaire finie de dérivées de δ, dont l'ordre effectif(1) (si cette distribution n'est pas nulle) est certainement au moins égal à $[\frac{n-p}{2}] + 1$. Mais alors on peut trouver une suite $\{\psi_\nu\}$, convergeant vers 0 au sens de $\mathcal{D}_{L^2}^{[\frac{n-p}{2}]}(R^n)$, telle que $\langle \sum\limits_h \langle T_h, \varphi \rangle D^h\delta, \psi_\nu \rangle$ ne converge pas vers 0. Il faut donc que la distribution $\sum\limits_h \langle T_h, \varphi \rangle D^h\delta$ soit nulle, autrement dit que tous les $\langle T_h, \varphi \rangle$ soient nuls, et comme φ est arbitraire dans $\mathcal{D}_x$, cela implique que tous les T_h soient nuls, donc que $T = 0$.

C.Q.F.D.

(1) toujours par rapport à L^2