Séminaire Schwartz

L. Schwartz

L'opérateur de Green et la résolution du problème de Dirichlet

Séminaire Schwartz, tome 2 (1954-1955), exp. n° 14, p. 1-4
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1954-1955__2__A17_0>

© Séminaire Schwartz
(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schwartz » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire SCHWARTZ
(Equations aux dérivées partielles)
Année 1954/55
-:-:-:-

Exposé n° 14

L'OPÉRATEUR DE GREEN ET LA RÉSOLUTION DU PROBLÈME DE DIRICHLET.

-:-:-:-

Cas de l'opérateur $-\Delta + \lambda$ pour des valeurs complexes différentes d'un nombre réel négatif :

Ω est un ouvert donné de R^n. Si λ est un nombre réel positif, on notera par $((f,g))_\lambda$ le produit scalaire hermitien :

$$((f,g)) = \sum_i \int_\Omega \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \frac{\partial \bar{g}}{\partial x_i}\right)dx + \lambda \int_\Omega (f\ \bar{g})dx$$

(On écrira $((f,g))$ quand la spécification de λ ne sera plus nécessaire).

L'opérateur $D_\lambda = -\Delta + \lambda$ (On notera éventuellement D comme plus haut) établit un isomorphisme de $\mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$ sur $\mathcal{D}'^1_{L^2}(\Omega)$ pour leurs structures hilbertiennes, par $v \longrightarrow D_\lambda\ v$, comme on l'a démontré dans l'exposé précédent.

On a très précisément :

$$((v,\varphi))_\lambda = \langle D_\lambda\ v\ ,\ \bar{\varphi}\ \rangle \qquad \text{pour toute} \quad \varphi \in \mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega) \ .$$

L'OPÉRATEUR DE GREEN ($\lambda > 0$) .

D_λ établit un isomorphisme topologique de $\mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$ sur $\mathcal{D}'^1_{L^2}(\Omega)$. L'isomorphisme inverse définit un nouvel opérateur continu G_λ qu'on désigne sous le nom d'opérateur de Green associé à D_λ . G jouit des propriétés suivantes.

PROPOSITION 1 : a) $D \circ G$ est l'opérateur identique de $\mathcal{D}'^1_{L^2}(\Omega)$.
b) $G \circ D$ est un projecteur de $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ sur $\mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$.

a) C'est la définition. Montrons b).

Si $f \in \mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$, $D_\lambda f = -\Delta f + \lambda f$ donc $D_\lambda f \in \mathcal{D}'^1_{L^2}(\Omega)$. Donc $D_\lambda(\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)) = \mathcal{D}'^1_{L^2}(\Omega)$ donc $(G_\lambda . D_\lambda)(\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)) = \mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$

$G_\lambda . (D_\lambda\ G_\lambda).D_\lambda = G_\lambda . D_\lambda$. Cet opérateur est un idempotent, donc un projecteur.

Le noyau est l'espace des f tels que $GDf = 0$ donc $DGDf = Df = 0$, c'est l'espace N_λ des solutions de l'équation homogène. Pour la structure hilbertienne $((\ ))_\lambda$, GD est un projecteur orthogonal, car H est orthogonal à $\mathcal{D}(\Omega)$ (puisque $((u,v))_\lambda = \langle Du , \bar{v} \rangle$) donc à $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$.

PROBLÈME DE DIRICHLET :

Etant donné $T \in \mathcal{D}'^1_{L^2}(\Omega)$ et $g \in \mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ trouver u tel que

1°) $D_\lambda u = T$;

2°) $u - g \in \mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$.

La solution au problème posé est donnée par $u = G_\lambda T + (g - G_\lambda D_\lambda g)$. En effet, si on pose $u - g = v$ on a $D_\lambda v = T - D_\lambda g = S$ et $S \in \mathcal{D}'^1_{L^2}(\Omega)$ alors $u = G_\lambda S + g$, $u = G_\lambda [T - D_\lambda g] + g = G_\lambda T + (g - G_\lambda D_\lambda g)$ et $D_\lambda (g - G_\lambda D_\lambda g) = 0$. On a donc la

PROPOSITION 2 : La solution $u = G_\lambda T + (g - G_\lambda D_\lambda g)$ du problème de Dirichlet $(\lambda > 0)$ est somme de la solution "nulle au bord" $G_\lambda T$ de l'équation $D_\lambda v = T$ et de la solution $(g - G_\lambda D_\lambda g)$ de l'équation homogène $D_\lambda w = 0$ qui prend au bord les mêmes valeurs que g. Elle dépend continuement des données.

PROPOSITION 3 : $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ est somme directe topologique de

a) $\mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$ et de

b) l'espace N_λ des solutions de l'équation homogène $D_\lambda u = 0$. Ces deux espaces sont orthogonaux pour le produit scalaire $((\ ,\ ))_\lambda$. $G_\lambda D_\lambda$ est le projecteur de $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$ sur $\mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$.

Remarquons que si g est la donnée au bord, $g - G_\lambda D_\lambda g$ est sa projection parallèlement à $\mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$ sur l'espace des solutions de l'équation $D_\lambda v = 0$.

RÉSOLUTION DU PROBLÈME DE DIRICHLET POUR DES VALEURS NON RÉELLES DE λ.

Existence de l'opérateur de Green.

(On considère $\mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$ plongé dans $\mathcal{D}'^1_{L^2}(\Omega)$). Appelons D_1 et G_1 les opérateurs correspondant à $\lambda = 1$; $((u,v))_\lambda$ est alors le produit scalaire canoniquement associé à $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)$.

$$((G_1 D_\lambda v , \varphi))_1 = \langle D_\lambda v , \overline{\varphi} \rangle = \langle D_1 v , \overline{\varphi} \rangle + (\lambda - 1)\langle v , \overline{\varphi} \rangle =$$

$= ((v, \varphi))_1 + (\lambda - 1)((G_1 v , \varphi))_1$

donc $v + (\lambda - 1) G_1 v = G_1 D_\lambda v$.

Comme G_1 est biunivoque, $D_\lambda v = f$ est donc équivalent à $[1 + (\lambda -1)G_1]v =$ $= G_1 f$.

Soit $\bar{G}_1$ la restriction de G_1 à $\mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$.

<u>Si</u> $1 + (\lambda - 1) \bar{G}_1$ <u>est inversible</u>, on en déduit qu'il y a une solution et une seule, et qu'elle est donnée par $v = G_\lambda f$, avec

$$G_\lambda = (1 + (\lambda - 1) \bar{G}_1)^{-1} G_1$$

D_λ et G_λ sont des isomorphismes réciproques, resp. de $\mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$ sur $\mathcal{D}'^1_{L^2}(\Omega)$ et de $\mathcal{D}'^1_{L^2}(\Omega)$ sur $\mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$.

<u>PROPOSITION 4</u> : $\bar{G}_1$ <u>est un opérateur hermitien positif de norme</u> ≤ 1 (pour la structure hilbertienne canonique $((\ ))_1$ de $\mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$) .

<u>DÉMONSTRATION</u> : Soient v et φ des éléments de $\mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$. On a $\langle v , \bar{\varphi} \rangle =$ $= ((\bar{G}_1 v , \varphi))_1$ c'est-à-dire que $\bar{G}_1$ est associé à la forme sesquilinéaire $(v, \varphi) = \int_\Omega v \cdot \bar{\varphi} \cdot dx$ qui est manifestement hermitienne positive, et de

$$\int_\Omega v \bar{v} \, dx \leq \int_\Omega v \bar{v} \, dx + \int_\Omega (\sum_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i}) \, dx \quad ,$$

on en déduit que la norme de $\bar{G}_1$ est ≤ 1 .

<u>PROPOSITION 5</u> : <u>Si</u> λ <u>est un nombre complexe différent d'un nombre réel négatif, alors</u> $(1 + (\lambda - 1) \bar{G}_1)$ <u>est inversible et</u> $G_\lambda = (1 + (\lambda - 1) \bar{G}_1)^{-1} \cdot G_1$ <u>est tel que</u>

a) $(G_\lambda D_\lambda)^2 = G_\lambda D_\lambda$ <u>et</u> $(G_\lambda D_\lambda)(\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega)) = \mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$

b) $D_\lambda G_\lambda$ <u>est l'identité de</u> $\mathcal{D}'^1_{L^2}(\Omega)$ <u>sur lui-même</u>, G_λ <u>est une fonction analytique de</u> λ <u>à valeurs dans</u> $\mathcal{L}(\mathcal{D}'^1_{L^2}(\Omega) , \mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega))$

<u>DÉMONSTRATION</u> : G_λ est une fonction analytique de λ , si $\lambda \notin R^-$, car alors $\frac{1}{1-\lambda} \notin [0 , 1]$, $[0 , 1]$ contenant le spectre de $\bar{G}_1$, et $(1 + (\lambda - 1)\bar{G}_1)^{-1}$ est comme on sait une fonction analytique de λ dans ces conditions. Le reste est trivial (voir cas λ réel > 0) .

Il en résulte immédiatement le

THÉORÈME 1 : *Si λ est un nombre complexe différent d'un nombre réel négatif, alors on peut résoudre le problème de Dirichlet pour l'opérateur $-\Delta + \lambda$ par la formule de la proposition 2 .*

G_λ *est l'opérateur de Green associé à* $-\Delta + \lambda$. *Les données étant fixes, la solution, lorsque* λ *varie, est une fonction analytique de* λ .

Terminons par une majoration de la norme de G_λ .

PROPOSITION 6 : a) *si* $R(\lambda) \geqslant 1$, $\| G_\lambda \| \leqslant 1$

b) *si* $R(\lambda) \leqslant 1$ *et* :

ou bien : $R(\lambda) \geqslant 0$ *et* $|\lambda|^2 \geqslant R(\lambda)$

ou bien : $R(\lambda) \leqslant 0$ *et* $\mathcal{I}(\lambda) \neq 0$, alors $\| G_\lambda \| \leqslant \frac{|\lambda - 1|}{|\mathcal{I}(\lambda)|}$

c) *si* $R(\lambda) \leqslant 1$ *et* $|\lambda|^2 \leqslant R(\lambda)$, $\| G_\lambda \| < \frac{1}{|\lambda|}$.

DÉMONSTRATION : $\mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$ est muni de la norme définie par le produit scalaire $((\ ,\ ))_1$. Le spectre σ_λ de l'opérateur $1 + (\lambda - 1)\overline{G}_1$ est formé de l'ensemble des points $1 + (\lambda - 1)\sigma_1$ c'est-à-dire contenu dans le segment rectiligne $[1, \lambda]$, la plus petite distance $d(\sigma_\lambda)$ de l'origine à cet ensemble est donc minorée par :

cas a)	$d(\sigma_\lambda) \geqslant 1$	(distance de l'origine au point 1)
cas b)	$d(\sigma_\lambda) \geqslant \frac{|\mathcal{I}(\lambda)|}{|\lambda - 1|}$	(distance de l'origine à la droite passant par les points 1 et λ)
cas c)	$d(\sigma_\lambda) \geqslant |\lambda|$	(distance de l'origine à l'extrémité λ du segment $[1, \lambda]$) .

Ce qui donne les majorations indiquées, puisque $\| G_1 \| \leqslant 1$.

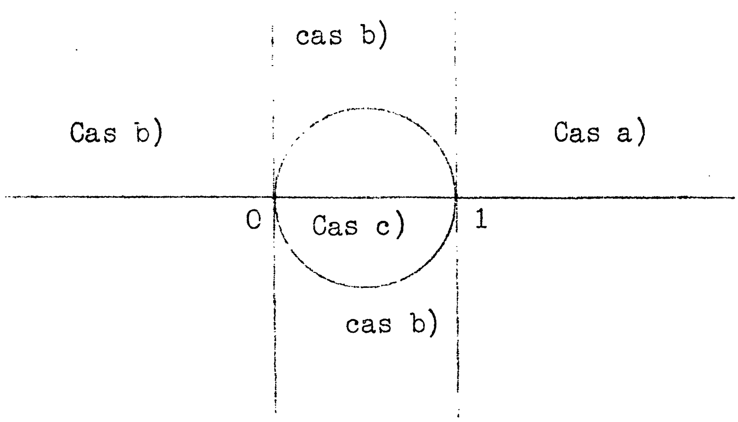

Fig.