L. Schwartz

1ère partie : ouverts Ω à frontière régulière, espaces $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$

Séminaire Schwartz, tome 2 (1954-1955), exp. n° 13, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1954-1955__2__A16_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire SCHWARTZ
(Equations aux dérivées partielles)
Année 1954/55
-:-:-:-

Exposé n° 13

1ere partie : OUVERTS Ω À FRONTIÈRE RÉGULIÈRE, ESPACES $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$.

-:-:-:-

Soit Ω un domaine de R^n dont la frontière $\dot{\Omega}$ est une sous-variété indéfiniment différentiable de l'espace, de dimension $n-1$, Ω étant d'un seul côté de $\dot{\Omega}$. On désignera par $L^2_{loc}(\dot{\Omega})$ l'espace des classes de fonctions sur $\dot{\Omega}$, de carré sommable sur tout compact de $\dot{\Omega}$, pour la mesure superficielle $d\sigma$, et muni de la topologie définie par les semi-normes $N_K(f) = \int_K |f|^2 d\sigma$, K désignant une base de la famille des compacts de $\dot{\Omega}$. On a alors le

Théorème 1 : Soit Ω un ouvert de R^n , de frontière $\dot{\Omega}$ variété indéfiniment différentiable de dimension $n-1$, Ω étant d'un seul côté de $\dot{\Omega}$. Il existe une application continue unique $\gamma : \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega) \to L^2_{loc}(\dot{\Omega})$ $(m \geqslant 1)$ qui coïncide, pour chaque fonction indéfiniment différentiable sur $\overline{\Omega}$, avec sa trace à la frontière.

Démonstration : Soit $\mathcal{O}_i$ un voisinage ouvert (dans R^n) relativement compact d'un point $a_i \in \dot{\Omega}$ tel qu'il existe un homéomorphisme indéfiniment différentiable h_i de $\mathcal{O}_i$ sur l'intérieur d'un cube Γ_i , voisinage de zéro dans R^n , l'ensemble des points de $\mathcal{O}_i \cap \Omega$ étant appliqué sur l'ensemble des points de Γ_i vérifiant $x_n > 0$.
($\omega_i = \mathcal{O}_i \cap \dot{\Omega}$ est appliqué sur l'ensemble des points de Γ_i , vérifiant $x_n = 0$).

Si f est une fonction de $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ $(m \geqslant 1)$ telle que $\tilde{f}$ ait son support dans $\mathcal{O}_i$ on définira γf par

$$\gamma f = [\gamma(f \circ h_i^{-1})] \circ h_{i_{\omega_i}}$$

où $h_{i_{\omega_i}}$ est la restriction de h_i à ω_i . (Transport de la définition dans R_n^+). Ceci a un sens car si $f \in \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ alors $f \circ h_i^{-1} \in \mathcal{E}^m_{L^2}(R_n^+)$ puisque f est à support compact et de même $\gamma(f \circ h_i^{-1}) \in L^2(R_n^+)$ entraîne que $\gamma(f \circ h_i^{-1}) \cdot h_i{}_{\omega_i} \in L^2(\mathcal{O}_i \cap \dot{\Omega})$.

Lorsque $\tilde{f}$ garde son support dans $\mathcal{O}_i$, l'application $f \dashrightarrow \gamma f$ est manifestement continue de $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ dans $L^2_{loc}(\mathcal{O}_i \cap \dot{\Omega})$.

Si maintenant $\mathcal{O}_j$ [illegible] ouvert relativement compact de Ω tel que $\overline{\mathcal{O}}_j \cap \dot{\Omega} = \emptyset$, alors si $\tilde{f}$ a son support dans $\mathcal{O}_j$, on po[illegible]ra $\gamma f = 0$.

Et maintenant, on peut trouver un recouvrement localement fini de $\overline{\Omega}$ par des ouverts $\mathcal{O}_i$ tels que, ou bien $\mathcal{O}_i \cap \dot{\Omega} = \omega_i \neq \emptyset$, $\mathcal{O}_i$ jouissant des propriétés données plus haut, ou bien $\overline{\mathcal{O}}_i \cap \dot{\Omega} = \emptyset$.

Soit α_i une partition de l'unité indéfiniment différentiable subordonnée aux $\mathcal{O}_i$.

On a $f = \sum (\alpha_i f)$ et on pose $\gamma f = \sum \gamma(\alpha_i f)$

Cette somme est bien définie, car si K est un compact de $\dot{\Omega}$ il n'existe qu'un nombre fini des $\mathcal{O}_i$, qui rencontrent K .

Alors si des $f_n \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$, les $\alpha_i f_n \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ donc les $\gamma(\alpha_i f_n) \longrightarrow 0$ dans $L^2_{loc}(\omega_i)$, donc l'application $f \longrightarrow \gamma f$ est bien continue de $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ dans $L^2_{loc}(\dot{\Omega})$. Si f est indéfiniment dérivable sur Ω , γf est bien égal à la trace de f sur $\dot{\Omega}$.

γ satisfait aux propriétés du théorème.

Il reste à prouver que γ est la seule application à jouir de ces propriétés (en particulier qu'elle est indépendante du recouvrement et des α_i). Cela résultera de ce qui suit :

<u>Théorème 1bis : Si Ω vérifie les conditions indiquées au théorème 1, les restrictions à Ω de fonctions de $\mathcal{D}(R^n)$ sont denses dans</u> $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$.

a) Soit $f \in \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$. Si β_j est une suite de fonctions $\in \mathcal{D}(R^n)$, égales à 1 sur des compacts de plus en plus grands, et de dérivées d'ordre $\leqslant m$ bornées, les $\beta_j f$ convergent vers f dans $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$. Il suffit donc de montrer que $\beta_j f$ est adhérente dans $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ à $\mathcal{D}(R^n)$, ce qui revient à raisonner sur f , en supposant $\tilde{f}$ à support compact.

b) Mais alors nous allons montrer que f est la restriction à Ω d'une fonction de $\mathcal{E}^m_{L^2}(R^n)$. Comme $\tilde{f}$ est à support compact, f est une somme finie $\sum(\alpha_i f)$, relativement aux α_i utilisées dans la démonstration du théorème 1, et il suffit de démontrer cette propriété pour $\alpha_i f$, c'est-à-dire pour une fonction, appelée encore f , telle que $\tilde{f}$ ait son support compact dans un ouvert $\mathcal{O}_i$ du recouvrement. On se ramène alors par l'homéomorphisme h_i au cas d'une fonction f à support compact dans R^n , appartenant à $\mathcal{E}^m_{L^2}(R^n_+)$; or, on a vu dans l'exposé 12 qu'elle est restriction d'une fonction de $\mathcal{E}^m_{L^2}(R^n)$, dont le support peut être choisi (par troncature) dans un voisinage arbitraire du support de f. c)Comme enfin $\mathcal{D}(R^n)$ est dense dans $\mathcal{E}^m_{L^2}(R^n)$, le théorème est démontré.

<u>Propriété multiplicative de la fonction trace.</u>

Soit $\alpha \in \mathcal{D}(R^n)$; alors si $f \in \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$, $\alpha f \in \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$.
On a $\gamma(\alpha f) = \gamma(\alpha). \gamma(f)$.

<u>Caractérisation de</u> $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$ <u>par les valeurs au bord de ses éléments</u> (Ω vérifiant toujours les conditions du théorème 1).

Si $f \in \mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$, alors par définition f est limite pour la topologie de $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$, qui sont de trace nulle, donc $\gamma D^p f = 0$ pour $|p| \leq m-1$.
Réciproquement soit $f \in \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ telle que $\gamma f = 0$, et $\gamma D^p f = 0$ pour $|p| \leq m-1$. Alors f est limite de tronquées βf qui, en vertu des propriétés multiplicatives de l'application trace jouissent des mêmes propriétés au bord que f . On peut donc supposer due l'adhérence dans $\overline{\Omega}$ du support de f est compacte.

Donc f est une somme finie $\sum \alpha_i f$ (Notations du théorème 1)
avec $\gamma(D^p(\alpha_i f)) = 0$ $\qquad |p| \leq m-1$
et chaque $\alpha_i f$ est, ou bien dans $\mathcal{E}'(\Omega) \cap \mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ donc dans $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$, ou bien (en se ramenant à R^+_n) , où la propriété a été démontrée antérieurement, limite de fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$; donc $f \in \mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$. D'où la

<u>Proposition 1</u> : $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$, <u>dans les hypothèses du théorème 1 , est le sous-espace de</u> $\mathcal{E}^m_{L^2}(\Omega)$ <u>formé des fonctions</u> f <u>telles que</u> $\gamma(D^p f) = 0$ <u>pour</u> $|p| \leq m-1$.

L'espace $\mathcal{D}'^m_{L^2}(\Omega)$:

Définition 1 : $\mathcal{D}'^m_{L^2}(\Omega)$ désigne l'espace des distributions dans Ω sommes de fonctions de $L^2(\Omega)$ et de dérivées d'ordre inférieur ou égal à m de fonctions de $L^2(\Omega)$.

Théorème 2 : $\mathcal{D}'^m_{L^2}(\Omega)$ est isomorphe au dual topologique de $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$.

Si $T = \sum_{|p|\leq m} D^p f_p$ où $f_p \in L^2(\Omega)$ et si $\varphi \in \mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$

$$\langle T , \varphi \rangle = \sum_{|p|\leq m} (-1)^{|p|} \int_\Omega f_p(x)\, D^p \varphi(x)\, dx$$

établit la dualité entre ces deux espaces.

Démonstration : $\mathcal{D}(\Omega)$ est partout dense dans $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$ l'injection de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$ donnera donc par transposition une injection de $(\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega))'$ sur un sous-espace de $\mathcal{D}'(\Omega)$. On identifiera $(\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega))'$ avec ce sous-espace.

Soit $T \in \mathcal{D}'^m_{L^2}(\Omega)$, $\varphi \rightarrow \langle T , \varphi\rangle = \sum_{|p|\leq m} (-1)^{|p|} \int_\Omega f_p(x)\, D^p\varphi(x)\, dx$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$ et si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$\langle T , \varphi\rangle = \sum_{|p|\leq m} \langle D^p f_p , \varphi\rangle = T(\varphi)$ donc $\varphi \longrightarrow \langle T , \varphi \rangle$ est le prolongement unique de la distribution T à $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$ et on a bien $T \in (\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega))'$.

Réciproquement si $T \in (\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega))'$, puisque $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$ est un espace de Hilbert, on peut trouver $f \in \mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$ telle que

$$\langle T , \varphi \rangle = (\varphi, f)_{\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)} = \sum_{|p|\leq m} \int_\Omega D^p\varphi \, . \, \overline{D^p f}\, dx \quad \text{pour chaque } \varphi .$$

et si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ceci peut s'écrire

$$\langle T , \varphi \rangle = \sum_{|p|\leq m} (-1)^{|p|} \langle \varphi , D^p (D^p \bar{f}) \rangle$$

ce qui identifie T à la distribution $\sum_{|p|\leq m} (-1)^{|p|} D^p (D^p \bar{f})$

et nous avons montré

$$(\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega))' = \mathcal{D}'^m_{L^2}(\Omega) \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Désormais $\mathcal{D}'^m_{L^2}(\Omega)$ sera muni de la topologie forte de dual de $\mathcal{D}^m_{L^2}(\Omega)$.

2e partie : RÉSOLUTION DU PROBLÈME DE DIRICHLET DANS UN OUVERT Ω DE R^n, POUR L'OPÉRATEUR $D = -\Delta + \lambda$, $\lambda > 0$

Théorème 3 : Soit $T \in \mathcal{D}'^{1}_{L^2}(\Omega)$ et $g \in \mathcal{E}^{1}_{L^2}(\Omega)$, il existe u unique tel que $Du = T$ et tel que $u - g \in \mathcal{D}^{1}_{L^2}(\Omega)$

Démonstration : Remarquons que la condition $u - g \in \mathcal{D}^{1}_{L^2}(\Omega)$ signifie bien que u prend des valeurs données au bord, à savoir γg, en vertu de la proposition 1, lorsque Ω est à frontière bien régulière. Posons $u - g = v$. On a à trouver v tel que $Dv = S$ ou $S = T - Dg$ $(S \in \mathcal{D}'^{1}_{L^2}(\Omega))$ et où $v \in \mathcal{D}^{1}_{L^2}(\Omega)$.

Introduisons sur $\mathcal{D}^{1}_{L^2}(\Omega)$ la métrique hilbertienne

$$((f , g))_D = \sum_i \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \bar{g}}{\partial x_i}\, dx + \lambda \int_\Omega f\, \bar{g}\, dx$$

Elle est manifestement équivalente, puisque $\lambda > 0$, à la métrique utilisée jusqu'ici

$$(f , g)_1 = \sum_i \left(\int_\Omega \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \bar{g}}{\partial x_i}\, dx\right)\right) + \int_\Omega (f . \bar{g})\, dx$$

Etant donné $S \in \mathcal{D}^{1}_{L^2}(\Omega)$ il existe donc v unique dans $\mathcal{D}^{1}_{L^2}(\Omega)$ tel que

(1) $\langle S , \overline{\varphi} \rangle = ((v , \varphi))_D$

(2) donc $\langle S , \overline{\varphi} \rangle = \sum_i \left(\int_\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x_i}\right) dx\right) + \lambda \int_\Omega v . \overline{\varphi}\, dx$

et pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ cette expression se transforme

(3) en $\langle S , \overline{\varphi} \rangle = \langle (-\Delta + \lambda)\, v , \overline{\varphi} \rangle$ ou $S = (-\Delta + \lambda)\, v$.

v est une solution du problème. Pour prouver, dans les conditions indiquées, que cette solution est unique, il suffit de montrer que toute solution v dans $\mathcal{D}^{1}_{L^2}(\Omega)$ satisfait à l'équation (1). Or, on a par hypothèse pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, l'équation (3), qui peut s'écrire sous la forme (2). Les deux membres de (2) étant égaux sur un sous-ensemble partout dense de $\mathcal{D}^{1}_{L^2}(\Omega)$, définis sur tout $\mathcal{D}^{1}_{L^2}(\Omega)$ $(v \in \mathcal{D}^{1}_{L^2}(\Omega))$, et y dépendant continuement de φ, sont égaux partout donc (1) est vraie. c.q.f.d.