

# SÉMINAIRE SCHWARTZ

L. SCHWARTZ

**Les espaces  $\mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega)$  et  $\mathcal{D}_{L^2}^m(\Omega)$  (suite)**

*Séminaire Schwartz*, tome 2 (1954-1955), exp. n° 12, p. 1-5

[http://www.numdam.org/item?id=SLS\\_1954-1955\\_\\_2\\_\\_A15\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SLS_1954-1955__2__A15_0)

© Séminaire Schwartz  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schwartz » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

-:-:-

Séminaire SCHWARTZ

(Equations aux dérivées partielles)

Année 1954/55

-:-:-

Exposé n° 12

LES ESPACES  $\mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega)$  ET  $\mathcal{O}_{L^2}^m(\Omega)$  . (Suite).

-:-:-

Soit toujours  $\Omega = \mathbb{R}_+^n$  (région  $x_n > 0$  de  $\mathbb{R}^n$ ).

Proposition 1 : L'application  $f \rightarrow \gamma f$  est continue de  $\mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega)$  dans  $\mathcal{C}_{L^2}^{m-1}(\mathbb{R}^{n-1})$ , et l'on a :

$$(1) \quad D_{\xi}^p \gamma f = \gamma D_{\xi}^p f \quad \text{pour } |p| \leq m-1$$

En d'autres termes, une dérivée horizontale de la trace de  $f$  est égale à la trace de la dérivée horizontale pourvu que l'ordre de dérivation soit inférieur ou égal à  $m-1$ .

Démonstration : Le fait que  $\gamma f \in \mathcal{C}_{L^2}^{m-1}(\mathbb{R}^{n-1})$  et que l'application soit continue résultera de (1). Car on aura  $\|D_{\xi}^p \gamma f\|_{L^2}^2 = \|\gamma D_{\xi}^p f\|_{L^2}^2$  et d'après l'exposé (11),

$$\|\gamma D_{\xi}^p f\|_{L^2}^2 \leq k \|D_{\xi}^p f\|_{\mathcal{C}_{L^2}^1(\Omega)}^2 \leq k \|f\|_m^2$$

Les deux membres de (1) ont un sens et sont dans  $L^2(\Omega)$ . L'égalité (1) pour une dérivée d'ordre un l'entraîne pour toute dérivée d'ordre  $|p| \leq m-1$ .

Soit donc  $f \in \mathcal{C}_{L^2}^2(\Omega)$ . En supposant une fois pour toutes que  $f$  a été tronquée pour être à support borné en  $x_n$ , on se propose de montrer :

$$(1) \text{ bis} \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \gamma f = \gamma \frac{\partial f}{\partial x_j} \quad j < n$$

Soit  $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^{n-1})$  :

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} \gamma f, \varphi \right\rangle = - \left\langle \gamma f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} d\xi \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

Cette dernière intégrale s'écrit encore

$$\iint_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} d\xi dx_n$$

et cette expression a un sens parce que le support de  $\frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$  est borné.

Elle est donc aussi égale à

$$\int_0^{+\infty} dx_n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} d\xi \quad (2)$$

Modifions alors  $\frac{\partial f}{\partial x_n}$  pour qu'elle soit absolument continue sur presque toutes les parallèles à l'axe des  $x_j$ , et qu'elle ait alors  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_j}$  pour dérivée usuelle. (Cette modification est possible parce que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_j}$  est localement sommable ; cf. Distributions, Schwartz, Chapitre II. théorème V). Dans presque tous les hyperplans  $x_n = C^{to}$  elle sera alors absolument continue sur presque toutes les parallèles à l'axe des  $x_j$ , de dérivée usuelle presque partout  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_j}$ .

Comme aussi dans presque tous les hyperplans  $x_n = C^e$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x_n}$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_j}$  sont localement sommables, on en déduira que dans presque tous les hyperplans  $x_n = C^e$ , la trace de  $\frac{\partial f}{\partial x_n}$  a pour dérivée en  $x_j$  la trace de  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_j}$ , en tant que distributions en  $\xi$ .

Ce qui permet d'écrire (2) :

$$\begin{aligned} & - \int_0^{+\infty} dx_n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_j} \varphi d\xi = - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi(\xi) d\xi \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_j} dx_n \\ & = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \gamma \frac{\partial f}{\partial x_j}(\xi) \varphi(\xi) d\xi = \left\langle \gamma \frac{\partial f}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle \end{aligned}$$

ce qui démontre (1<sup>bis</sup>).

Introduisons  $\gamma_k f = \gamma \frac{\partial^k f}{\partial x_n^k}$  pour  $k \leq m-1$ . C'est la dérivée normale intérieure d'ordre  $k$  au contour, qui existe d'après ce qu'on a déjà vu.

La prolongée  $\tilde{f}$  de  $f$  par zéro n'est pas en général dans  $\mathcal{E}_{L^2}^m(\mathbb{R}^n)$  car les dérivées font intervenir des couches portées par le bord, donc les traces des dérivées de  $f$  sur le bord.

Proposition 2 : Soit  $f \in \mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega)$ . Et soit  $D_{\xi}^p \frac{\partial^k}{\partial x_n^k} \tilde{f}$  pris pour  $|p| + k \leq m$  ; on a :

$$(3) \quad D_{\xi}^p \frac{\partial^k}{\partial x_n^k} \tilde{f} = (D_{\xi}^p \frac{\partial^k}{\partial x_n^k} f)^{\sim} + \sum_{l=0}^{k-1} \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^l \delta_{x_n} \otimes \gamma_{k-l-1} D_{\xi}^p f$$

Démonstration : Montrons tout d'abord que pour  $|p| \leq m$ ,  $D_{\xi}^p \tilde{f} = (D_{\xi}^p f)^{\sim}$  (étude des dérivations longitudinales). Il suffit ici encore de démontrer que :

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{f} = \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)^{\sim} \quad \text{pour } f \in \mathcal{E}_L^1(\Omega)$$

Or on sait qu'on peut modifier  $f$  sur un ensemble de mesure nulle de façon qu'elle devienne absolument continue sur presque toutes les parallèles à l'axe des  $x_j$ , de dérivée usuelle presque partout égale à  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ . Mais alors  $\tilde{f}$  est aussi absolument continue sur presque toutes les parallèles à l'axe des  $x_j$ , de dérivée usuelle  $\left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)^{\sim}$ ; donc la dérivée distribution de  $\tilde{f}$  est bien  $\left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)^{\sim}$ , c.q.f.d.

Montrons maintenant la validité de (3) pour les dérivations transversales. Pour cela, il suffit, par récurrence, de démontrer que pour  $f \in \mathcal{E}_L^1(\Omega)$  :

$$(5) \quad \frac{\partial}{\partial x_n} \tilde{f} = \left( \frac{\partial}{\partial x_n} f \right)^{\sim} + \delta_{x_n} \otimes \gamma f(\xi)$$

Pour  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_n} \tilde{f}, \varphi \right\rangle &= - \left\langle \tilde{f}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \right\rangle = - \int_{\mathbb{R}_+^n} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} d\xi dx_n \\ &= - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\xi \int_0^{+\infty} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} dx_n \end{aligned}$$

En modifiant  $f$  pour qu'elle soit absolument continue sur presque toutes les parallèles à l'axe des  $x_n$ , on peut intégrer par parties et l'intégrale précédente s'écrit :

$$\begin{aligned} &- \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\xi \left[ (f\varphi)_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \varphi \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \right] = \\ &\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \gamma f(\xi) \varphi(\xi) d\xi + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\xi \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x_n} \varphi dx_n \end{aligned}$$

Et la dernière intégrale est  $\int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{\partial f}{\partial x_n} \varphi d\xi dx_n$

On obtient finalement :

$$\langle \delta_{x_n} \otimes \gamma f(\xi), \varphi \rangle + \langle \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^\sim, \varphi \rangle$$

On déduit alors de ces résultats :

**Théorème 1 :** Si  $f \in \mathcal{G}_{L^2}^m(\mathbb{R}_+^n)$ , la condition nécessaire et suffisante pour que  $\tilde{f} \in \mathcal{G}_{L^2}^m(\mathbb{R}^n)$  est que  $f$  ait toutes ses traces nulles jusqu'à l'ordre  $m-1$  inclus.

Il résulte <sup>alors</sup> de l'exposé 11, proposition 3, que, pour qu'une fonction  $f \in \mathcal{G}_{L^2}^m(\Omega)$  appartienne à  $\mathcal{O}_{L^2}^m(\Omega)$ , il faut et il suffit que ses traces  $\gamma_k f$ ,  $k \leq m-1$ , soient nulles.

**Théorème 2 :** Toute fonction  $f \in \mathcal{G}_{L^2}^m(\mathbb{R}_+^n)$  est la restriction à  $\mathbb{R}_+^n$  d'une fonction de  $\mathcal{G}_{L^2}^m(\mathbb{R}^n)$ .

**Démonstration :** Soient  $f \in \mathcal{G}_{L^2}^m(\mathbb{R}_+^n)$  et  $g \in \mathcal{G}_{L^2}^m(\mathbb{R}_-^n)$ . Le raccolement de ces deux fonctions est dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Il sera dans  $\mathcal{G}_{L^2}^m(\mathbb{R}^n)$  si et seulement si toutes les traces jusqu'à l'ordre  $m-1$  coïncident.

Car alors

$$D^p(\tilde{f} + \tilde{g}) = (D^p f)^\sim + (D^p g)^\sim \in L^2(\mathbb{R}^n) \quad \text{pour } |p| \leq m.$$

(Remarquons en effet que pour  $\tilde{g}$ , on a la formule 3, mais avec le signe - devant toutes les couches portées par le bord, définies par des produits tensoriels).

Pour  $x_n < 0$ , soit

$$(6) \quad g(\xi, x_n) = \sum_{\nu=1}^m a_\nu f(\xi, -\nu x_n)$$

Il est évident que  $g \in \mathcal{G}_{L^2}^m(\mathbb{R}_-^n)$ . D'autre part

$$\gamma_k g = \sum_{\nu=1}^m a_\nu (-\nu)^k \gamma_k f$$

La coïncidence des traces conduit à la résolution de

$$(7) \quad \sum_{\nu=1}^m a_\nu (-\nu)^k = 1 \quad k = 0, 1, 2, \dots, m-1$$

(La valeur  $\nu = 0$  a été exclue du fait qu'il faut  $-\nu x_n \neq 0$ ).

Ce système de  $m$  équations par rapport aux  $m$  inconnues  $a_\nu$  est cramérien (déterminant de Vandermonde) donc il est résoluble et on peut trouver  $g$ ,

d'où  $\tilde{f} + \tilde{g}$  prolongeant  $f$ . Remarquons que nous trouvons même un prolongement linéaire continu de  $\mathcal{E}_{L^2}^m(\mathbb{R}_+^n)$  dans  $\mathcal{E}_{L^2}^m(\mathbb{R}^n)$ .

Corollaire : Dans  $\mathcal{E}_{L^2}^m(\mathbb{R}_+^n)$ , les restrictions de fonctions de  $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$  sont denses.

En effet,  $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$  est dense dans  $\mathcal{E}_{L^2}^m(\mathbb{R}^n)$ .

Corollaire : L'application  $f \rightarrow \gamma f$  est la seule application linéaire continue de  $\mathcal{E}_{L^2}^1(\mathbb{R}_+^n)$  dans  $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$  qui coïncide avec la trace usuelle pour la restriction d'une fonction de  $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ .

---