

SÉMINAIRE SCHWARTZ

L. SCHWARTZ

Préliminaires à l'étude du problème de Dirichlet

Séminaire Schwartz, tome 2 (1954-1955), exp. n° 11, p. 1-6

http://www.numdam.org/item?id=SLS_1954-1955__2__A14_0

© Séminaire Schwartz
(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schwartz » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Exposé n° 11

PRÉLIMINAIRES A L'ÉTUDE DU PROBLÈME DE DIRICHLET.

-:-:-

Soit Ω un ouvert $\subset \mathbb{R}^n$, de frontière $\dot{\Omega}$. Le problème de DIRICHLET, en un sens vague, consiste à trouver une fonction f dans Ω , qui vérifie

$$\begin{cases} \Delta f = g & \text{dans } \Omega \\ f = u & \text{sur } \dot{\Omega}, \quad g \text{ et } u \text{ donnés.} \end{cases}$$

Pour étudier ce problème, et les problèmes analogues posés pour d'autres opérateurs différentiels, il faut introduire divers espaces fonctionnels.

Définition 1 : On désigne par $\mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega)$ l'espace formé des $f \in L^2(\Omega)$ dont toutes les dérivées d'ordre $\leq m$ dans Ω , au sens des distributions (c'est-à-dire les dérivées de f considérée comme élément de $\mathcal{D}'(\Omega)$) sont dans $L^2(\Omega)$.

Sur $\mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega)$, on met le produit scalaire suivant, qui définit sur $\mathcal{E}_{L^2}^m$ une structure préhilbertienne.

$$(f, g)_m = \sum_{|p| \leq m} (D^p f, D^p g)_{L^2}$$

(rappelons la notation : $p = (p_1, \dots, p_n)$, $|p| = p_1 + \dots + p_n$,

$$D^p = \frac{\partial^{|p|}}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}}).$$

La norme correspondante sera notée $\|f\|_m$.

Proposition 1 : $\mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Cela revient à dire qu'il est complet ; or, soit (f_i) une suite de CAUCHY dans $\mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega)$; pour tout p , $|p| \leq m$, les $(D^p f_i)$ forment une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)$, donc les $(D^p f_i)$ tendent dans $L^2(\Omega)$ vers g_p ; posons $f = g_0$. Dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, les $D^p f_i$ tendent vers $D^p f$, on a donc : $D^p f = g_p$; donc f est dans $\mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega)$ et f est limite des f_i .

Définition 2 : On désigne par $\mathcal{O}_{L^2}^m(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{O}(\Omega)$ dans $\mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega)$. C'est aussi l'adhérence de $\mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega) \cap \mathcal{E}'(\Omega)$: car toute $f \in \mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega) \cap \mathcal{E}'(\Omega)$ est limite de ses régularisées qui sont dans $\mathcal{O}(\Omega)$.

C'est cet espace qui interviendra dans la résolution du problème de Dirichlet. Pour le moment, nous chercherons à en donner une interprétation montrant que, en un certain sens, $\mathcal{O}_{L^2}^m(\Omega)$ est le sous-espace de $\mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega)$ formé des fonctions nulles sur $\dot{\Omega}$ ainsi que leurs dérivées normales jusqu'à l'ordre $m-1$. Considérons d'abord le cas : $\Omega = \mathbb{R}^n$.

Proposition 2 : \mathcal{O} est dense dans $\mathcal{E}_{L^2}^m(\mathbb{R}^n)$ (autrement dit :

$$\mathcal{O}_{L^2}^m(\mathbb{R}^n) = \mathcal{E}_{L^2}^m(\mathbb{R}^n).$$

Soit α_i une suite de fonctions $\in \mathcal{O}$, dont toutes les dérivées d'ordre $\leq m$ soient bornées, α_i étant égal à 1 sur la boule de centre 0 et de rayon i ; et soit $f \in \mathcal{E}_{L^2}^m(\mathbb{R}^n)$.

Pour tout i , $\alpha_i f$ est à support compact, et appartient à $\mathcal{E}_{L^2}^m(\mathbb{R}^n)$; $\alpha_i f$ est limite dans $\mathcal{E}_{L^2}^m$ de ses régularisées, donc $\alpha_i f \in \mathcal{O}_{L^2}^m(\mathbb{R}^n)$. Tout revient donc à démontrer que, dans $\mathcal{E}_{L^2}^m$, f est limite des $\alpha_i f$.

Or, dans L^2 , les $\alpha_i f$ tendent vers f (théorème de Lebesgue); alors $\frac{\partial}{\partial x_1} \alpha_i f = (\frac{\partial}{\partial x_1} \alpha_i) \cdot f + \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_1}$ tend vers $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ dans L^2 , et ainsi de suite par récurrence; donc les $D^p(\alpha_i f)$ ($|p| \leq m$) tendent vers $D^p f$ dans L^2 ; d'où le résultat.

Nous verrons plus tard que la proposition 2 est valable pour tous les ouverts dont le complémentaire est assez petit (par exemple, s'il est réduit à un point) pour $m \leq [\frac{n}{2}]$.

Par contre, elle est fautive en général, et le théorème 1 va nous permettre d'en trouver des contre-exemples.

Notation : Pour $f \in L^2(\Omega)$, on désigne par \tilde{f} la fonction $\in L^2(\mathbb{R}^n)$ égale à f sur Ω et à zéro sur $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$.

Théorème 1 : Pour tout $f \in \mathcal{O}_{L^2}^m(\Omega)$, on a : $\tilde{f} \in \mathcal{E}_{L^2}^m(\mathbb{R}^n)$; plus précisément, pour tout p , $|p| \leq m$, on a : $D^p \tilde{f} = \widetilde{(D^p f)}$. En effet, f est limite dans $\mathcal{O}_{L^2}^m(\Omega)$ de fonctions $f_i \in \mathcal{O}(\Omega)$; comme $\mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega)$ et $\mathcal{E}_{L^2}^m(\mathbb{R}^n)$ induisent la même norme sur $\mathcal{O}(\Omega)$, les f_i forment une suite de Cauchy dans $\mathcal{E}_{L^2}^m(\mathbb{R}^n)$, espace complet : soit g sa limite; dans L^2 , g est la

limite des \tilde{f}_i , donc $g = \tilde{f}$.

On a trivialement $D^p \tilde{f}_i = (D^p f_i)^\sim$; mais $(D^p f_i)^\sim$ converge vers $(D^p f)^\sim$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, pour $|p| \leq m$, et, puisque \tilde{f}_i converge vers \tilde{f} dans $\mathcal{E}_{L^2}^m(\mathbb{R}^n)$, $D^p \tilde{f}_i$ converge vers $D^p \tilde{f}$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$; donc $(D^p f)^\sim = D^p \tilde{f}$, C.Q.F.D.

Exemple : Soit Ω une boule, et f une fonction indéfiniment différentiable sur $\overline{\Omega}$: pour que f soit dans $\mathcal{O}_{L^2}^m(\Omega)$, il est nécessaire que les $D^p \tilde{f}$, $|p| \leq m$, ne contiennent pas de couches portées par $\dot{\Omega}$; c'est-à-dire que f soit nulle sur $\dot{\Omega}$ ainsi que ses dérivées normales d'ordre $\leq m-1$. Dans ce cas, on voit donc que la fonction égale à 1 sur Ω n'est pas dans $\mathcal{O}_{L^2}^m(\Omega)$, pour $m \geq 1$.

Si l'on n'impose aucune restriction à Ω , la réciproque du théorème 1 est fausse.

Voici des cas où elle est vraie. Énonçons-la sous une forme équivalente :

Proposition 3 : Si Ω est un demi-espace, toute fonction $f \in \mathcal{E}_{L^2}^m(\mathbb{R}^n)$, dont le support est contenu dans $\overline{\Omega}$, a pour restriction à Ω une fonction appartenant à $\mathcal{O}_{L^2}^m(\Omega)$. On peut supposer que Ω est le demi-espace :

$x_n > 0$; considérons les translations τ_ε parallèles à $0 x_n$ avec $\varepsilon > 0$, Les fonctions

$$\tau_\varepsilon f = f(x_1, x_2, \dots, x_{n-\varepsilon})$$

ont leurs supports dans le demi-espace : $x_n \geq \varepsilon$ - En tronquant et régularisant, on voit que les restrictions à Ω des $\tau_\varepsilon f$ sont dans $\mathcal{O}_{L^2}^m(\Omega)$. Mais, si $\varepsilon \rightarrow 0$, les $\tau_\varepsilon f$ tendent vers f dans $\mathcal{E}_{L^2}^m(\mathbb{R}^n)$ (car les opérateurs τ_ε sont équicontinus (de norme 1), et convergent vers l'identité sur $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$, dense dans $\mathcal{E}_{L^2}^m(\mathbb{R}^n)$), donc leurs restrictions dans $\mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega)$. Par suite, on a : $f \in \mathcal{O}_{L^2}^m(\Omega)$.

Le même raisonnement s'appliquerait à un ouvert Ω possédant la propriété suivante : il existe un point a tel que toutes les homothéties de rapport $1+\varepsilon$ (ou $1-\varepsilon$) de centre a envoient $\overline{\Omega}$ dans Ω . Exemples : les ouverts convexes, les ouverts complémentaires de convexes d'intérieur non vide. Les hypothèses précédentes sur Ω sont globales, mais le problème est visiblement de caractère local :

Proposition 3 bis : Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . Supposons qu'il existe un recouvrement de \mathbb{R}^n par des ouverts σ_i tels que toute fonction de $\mathcal{E}_{L^2}^m(\mathbb{R}^n)$ de support compact contenu dans $\overline{\Omega} \cap \sigma_i$ ait pour restriction à $\Omega_i = \Omega \cap \sigma_i$ une fonction de $\mathcal{D}_{L^2}^m(\Omega_i)$, alors toute fonction de $\mathcal{E}_{L^2}^m(\mathbb{R}^n)$ de support contenu dans $\overline{\Omega}$ a pour restriction à Ω une fonction de $\mathcal{D}_{L^2}^m(\Omega)$.

Soit en effet $f \in \mathcal{E}_{L^2}^m(\mathbb{R}^n)$ de support dans $\overline{\Omega}$. Elle est limite de tronquées βf , de sorte qu'on peut toujours se ramener au cas où f a un support compact $K \subset \overline{\Omega}$. Soit α_i une partition de l'unité subordonnée au recouvrement de \mathbb{R}^n par les σ_i . Alors f , à support compact, est une somme finie $\sum_i \alpha_i f$, et il suffit de démontrer la propriété pour $\alpha_i f$; cela revient à se ramener au cas où f a un support compact $K_i \subset \overline{\Omega} \cap \sigma_i$. On sait alors que la restriction de f à Ω_i est limite dans $\mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega_i)$ de fonctions de $\mathcal{D}(\Omega_i)$ donc sa restriction à Ω est aussi limite dans $\mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega)$ de ces mêmes fonctions $\in \mathcal{D}(\Omega)$.

Exemple : Supposons que $\dot{\Omega}$ soit une variété indéfiniment différentiable à $n-1$ dimensions, et que Ω soit d'un seul coté de cette variété. On pourra prendre des σ_i telles que pour chaque i on ait la propriété suivante :

- a) ou bien $\Omega_i = \Omega \cap \sigma_i$ est vide ;
- b) ou bien $\Omega_i = \sigma_i$;

c) ou bien il existe un homéomorphisme indéfiniment différentiable d'un voisinage V_i de $\overline{\sigma_i}$ sur un ouvert V_i' de \mathbb{R}^n tel que $\Omega \cap V_i$ soit amené sur la partie $x_n > 0$ de V_i' , $\overline{\Omega} \cap V_i$ sur la partie $x_n = 0$ de V_i' .

Les conditions d'application de la proposition 3 bis sont alors vérifiées. C'est trivial pour a) et pour b). Dans le cas c), soit $f \in \mathcal{E}_{L^2}^m(\mathbb{R}^n)$ de support compact contenu dans $\overline{\Omega} \cap \sigma_i$. L'image de f par l'homéomorphisme est une fonction $g \in \mathcal{E}_{L^2}^m(\mathbb{R}^n)$ de support compact dans $(x_n \geq 0) \cap \sigma_i'$ (σ_i' l'image de σ_i). g est alors limite des $\tau_\varepsilon g$ (voir page 11-03) qui, si ε est assez petit, ont leurs supports compacts contenus dans $(x_n > 0) \cap \sigma_i'$, donc f est limite dans $\mathcal{E}_{L^2}^m(\mathbb{R}^n)$ de fonctions à support compact dans Ω_i . C.Q.F.D.

Remarque : L'hypothèse suivant laquelle Ω est d'un seul coté de $\dot{\Omega}$ est essentielle dans cet exemple. Ainsi pour $\Omega = \{(x_n = 0)\}$ dans \mathbb{R}^n , une

fonction $f \in \mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega)$ est dans $\mathcal{D}_{L^2}^m(\Omega)$ si et seulement si ses restrictions à $\Omega_+ = (x_n > 0) \cap \Omega$ et $\Omega_- = (x_n < 0) \cap \Omega$ sont respectivement dans $\mathcal{D}_{L^2}^m(\Omega_+)$ et $\mathcal{D}_{L^2}^m(\Omega_-)$; donc si $f \in \mathcal{E}_{L^2}^m(\mathbb{R}^n)$ est indéfiniment différentiable sa restriction à Ω ne peut appartenir à $\mathcal{D}_{L^2}^m(\Omega)$ qui si f est nulle ainsi que ses dérivées normales d'ordre $\leq m-1$ sur $x_n = 0$ (proposition 3), alors que toute f a son support dans $\bar{\Omega} = \mathbb{R}^n$.

Nous allons voir maintenant que moyennant certaines hypothèses sur Ω , on peut donner un sens précis à la notion de "valeur au bord" d'une fonction $\in \mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega)$.

Théorème 2 : Soit Ω un demi-espace $x_n > 0$. Pour $m \geq 1$, il existe une application continue $\gamma : \mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega) \rightarrow L^2(\bar{\Omega})$ qui coïncide, pour les fonctions indéfiniment différentiables sur $\bar{\Omega}$, avec la trace de f sur $\bar{\Omega}$.

Soit $\alpha(x_n) \in \mathcal{D}$ une fonction de la variable x_n , égale à 1 au voisinage de $x_n = 0$, de support contenu dans $|x_n| \leq h$. Soit f une fonction $\in \mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega)$. On aura encore : $\alpha f \in \mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega)$, et il existe une constante k telle que $\|\alpha f\|_m^2 \leq k \|f\|_m^2$.

On peut (Distributions, chapitre II, théorème 5) choisir une fonction \hat{f} presque partout égale à f , absolument continue sur presque toutes les parallèles à l'axe des x_n , de dérivée usuelle $\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_n}$ presque partout égale à $\frac{\partial f}{\partial x_n}$. Nous allons montrer que, pour presque toutes les valeurs de

$\xi = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, $\hat{f}(\xi, x_n)$ a une limite $\gamma f(\xi)$ pour $x_n \rightarrow 0$.

S'il en est ainsi, cette limite sera définie presque partout, et indépendante du choix de \hat{f} à une équivalence près; car pour 2 choix différents, les 2 fonctions \hat{f} sont presque partout égales, donc, sur presque toutes les parallèles à l'axe des x_n , elles sont presque partout égales donc partout égales puisque continues, et leurs limites pour $x_n \rightarrow 0$ seront bien presque partout égales. Pour montrer l'existence de cette limite, il suffit de le montrer pour $\alpha \hat{f}$, qui est absolument continue en x_n quand \hat{f} l'est. Or

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial(\alpha f)}{\partial x_n} \right|^2 dx_1 \dots dx_n < \infty \quad \text{donc, pour presque tout } \xi :$$

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{\partial(\alpha f)}{\partial x_n} \right|^2 dx_n < +\infty .$$

Comme cette fonction est à support compact, a fortiori

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{\partial(\alpha \hat{f})}{\partial x_n} \right| dx_n < +\infty .$$

Donc sur presque toutes les parallèles à l'axe des x_n , $\frac{\partial(\alpha f)}{\partial x_n}$ est sommable, donc $\alpha \hat{f}$ a bien une limite $\gamma f(\xi)$. De plus

$$\begin{aligned} \|\gamma f\|_{L^2(\dot{\Omega})}^2 &\leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\xi \left(\int \left| \frac{\partial(\alpha f)}{\partial x_n} \right| dx_n \right)^2 \\ &\leq h \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\xi \int \left| \frac{\partial(\alpha f)}{\partial x_n} \right|^2 dx_n \leq h \left\| \frac{\partial(\alpha f)}{\partial x_n} \right\|^2 \\ &\leq h \|\alpha f\|_m^2 \leq h k \|f\|_m^2 , \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

Remarque : Comme nous ne savons pas encore que les fonctions indéfiniment différentiables sur $\overline{\Omega}$ sont denses dans $\mathcal{E}_{L^2}^m(\Omega)$, nous ne savons pas encore que l'application trace γ , est la seule à vérifier les propriétés de ce théorème.
