

SÉMINAIRE SCHWARTZ

L. SCHWARTZ

Équation de la chaleur. Retour aux propriétés du laplacien

Séminaire Schwartz, tome 2 (1954-1955), exp. n° 10, p. 1-8

http://www.numdam.org/item?id=SLS_1954-1955__2__A13_0

© Séminaire Schwartz
(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schwartz » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Faculté des Sciences de Paris

-:-:-:-

Séminaire SCHWARTZ
(Equations aux dérivées partielles)

Année 1954/55

-:-:-:-

Exposé n° 10ÉQUATION DE LA CHALEUR.RETOUR AUX PROPRIÉTÉS DU LAPLACIEN.

-:-:-:-

Equation de la chaleur.

n désignant un entier > 0 , on pose $N = n + 1$; le point courant de \mathbb{R}^N sera désigné par (x, t) où $t \in \mathbb{R}$ est la variable de "temps" et $x \in \mathbb{R}^n$ la variable "d'espace". L'équation de la chaleur avec second membre est alors :

$$(1) \quad \left(c \frac{\partial}{\partial t} - \gamma \Delta \right) f = Df = g$$

$\Delta = \sum_1^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2$ est le laplacien par rapport aux variables d'espace. On fera $c = \gamma = 1$ dans la suite.

PROPOSITION : On définit une solution élémentaire de l'équation de la chaleur en posant :

$$(2) \quad E(x, t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \right)^n \exp\left(-\frac{u}{4t} \right) Y(t) \quad \begin{array}{l} Y \text{ fonction d'Heaviside} \\ u = x_1^2 + \dots + x_n^2 \end{array}$$

E est nulle pour $t < 0$ à cause du facteur $Y(t)$ et il est clair qu'elle est analytique en (x, t) pour $t > 0$, autrement dit elle est analytique en (x, t) pour $t \neq 0$. Pour montrer qu'elle est indéfiniment différentiable en dehors de l'origine, il suffit d'après un résultat bien connu de faire voir que lorsque x reste dans un compact ne contenant pas 0 et que t tend vers 0 par valeurs positives, E tend vers 0 ainsi que chacune de ses dérivées. Or ceci résulte de ce que chacune de ces dérivées est le produit de E par un polynôme en $t^{-\frac{1}{2}}$ et x , et que le facteur exponentiel (pour $x \neq 0$) tend vers 0 plus vite que toute puissance de t .

D'autre part, on a vu à l'exposé n° 6 que E est en dehors de l'origine indéf. diff. de classe (1,2) en (x, t) .

Le calcul suivant montre que E est solution "usuelle" de l'équation homogène :

$$\left\{ \frac{\partial E}{\partial t} \right\} = (2\sqrt{\pi})^{-n} t^{-n/2} \left(-\frac{n}{2} \cdot \frac{1}{t} + \frac{u}{4t} \right) \exp\left(-\frac{u}{4t}\right) Y(t)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \Delta E \right\} &= 4u \frac{\partial^2 E}{\partial u^2} + 2n \frac{\partial E}{\partial u} = (2\sqrt{\pi})^{-n} t^{-n/2} \left(4u \left(\frac{-1}{4t}\right)^2 - \frac{n}{2t} \right) \exp\left(-\frac{u}{4t}\right) Y(t) \\ &= \left\{ \frac{\partial E}{\partial t} \right\} \end{aligned}$$

Pour montrer que E définit une distribution, il faut montrer qu'elle est localement sommable ; on va montrer plus, à savoir qu'elle est sommable dans toute bande $a \leq t \leq b$. Comme E est une fonction positive et qu'elle est évidemment mesurable, il suffit pour prouver notre assertion de montrer

que $\int_a^b dt \int E(x, t) dx < +\infty$, ceci en vertu de Lebesgue-Fubini. Or si l'on pose $x = 2\sqrt{\pi t} \xi$ et $v = |\xi|^2 = \sum_1^n \xi_i^2$, on a

$$(3) \quad \int E(x, t) dx = \int \exp(-\pi v) d\xi = \prod_1^n \int \exp(-\pi \xi_i^2) d\xi_i = 1$$

car $u = 4\pi t v$,

d'où immédiatement l'inégalité cherchée.

Pour achever, nous considérerons E comme une fonction $\vec{E}(t)$ en t à valeur dans l'espace \mathcal{D}'_x des distributions en x . Pour $t \neq 0$, c'est une fonction de classe C^∞ en t à valeur dans l'espace \mathcal{E}_x des fonctions de classe C^∞ en x , donc a fortiori à valeur dans \mathcal{D}'_x , fonction qui est nulle pour $t < 0$. D'autre part, lorsque t tend vers 0 par valeurs positives, on va montrer que $E(\hat{x}, t)$ tend vers $\delta(\hat{x})$: pour voir cela, on remarque que E est positive, qu'elle tend uniformément vers 0 sur tout compact de l'espace des x qui ne contient pas 0 et que si K est un voisinage compact de 0 dans l'espace des x

$$(4) \quad \int_K E(x, t) dx = \int_{\frac{K}{2\sqrt{\pi t}}} \exp(-\pi |\xi|^2) d\xi \rightarrow 1$$

car $K/2\sqrt{\pi t}$ tend à remplir tout l'espace. Ceci assure la convergence de $E(\hat{x}, t)$ vers $\delta(\hat{x})$ en vertu de critères bien connus.

Nous pouvons maintenant montrer que E est solution élémentaire de l'opérateur $\frac{\partial}{\partial t} - \Delta$. En effet dérivons $\vec{E}(t)$ par rapport à t en tant que distribution en t à valeurs dans \mathcal{D}'_x ; comme il y a une discontinuité de première espèce pour $t = 0$, il faut ajouter à la dérivée usuelle $\left\{ \frac{\partial E}{\partial t} \right\}$

le terme $\delta(t) E(+0) - \delta(t) E(-0)$ soit $\delta(t) \delta(x) = \delta(\hat{x}, t)$

$$(5) \quad \overrightarrow{\frac{\partial E}{\partial t}} = \left\{ \overrightarrow{\frac{\partial E}{\partial t}} \right\} + \delta(\hat{x}, t)$$

D'autre part pour $t \neq 0$, on a $\Delta \vec{E} = \left\{ \Delta \vec{E} \right\}$, d'où finalement :

$$(6) \quad \overrightarrow{\frac{\partial E}{\partial t}} - \Delta \vec{E} = \left\{ \overrightarrow{\frac{\partial E}{\partial t}} \right\} - \left\{ \Delta \vec{E} \right\} + \delta(\hat{x}, t) = \delta(\hat{x}, t)$$

parce que E est solution de l'équation homogène de la chaleur en dehors de l'origine. (6) est bien équivalente à $\overrightarrow{\frac{\partial E}{\partial t}} - \Delta E = \delta$.

C.Q.F.D.

Opérateur P(D) où P est un polynome.

De la même manière que dans l'exposé précédent, le problème de la recherche d'une solution élémentaire de l'opérateur $P(D)$ se ramène au même problème dans le cas où $P(D) = (D + \lambda)^k$. Plus généralement, nous allons montrer que si D est un opérateur de la forme $\frac{\partial}{\partial t} - D_x$ où D_x est un opérateur linéaire continu opérant sur l'espace \mathcal{O}'_x (non nécessairement un opérateur différentiel), et qu'on possède une distribution $E_0^1 = E$ vérifiant l'équation :

$$(7) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - D_x + \lambda \right)^k E_\lambda^k = \delta(x, t)$$

avec $k = 1$, $\lambda = 0$, on obtient une solution de l'équation (7) la plus générale en posant $E_\lambda^k = e^{-\lambda t} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} E$. Pour le voir, on suppose d'abord $k = 1$ et cela résulte alors du calcul suivant :

$$(8) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - D_x \right) E_\lambda^1 = \frac{\partial}{\partial t} (e^{-\lambda t} E) - e^{-\lambda t} D_x E = \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - D_x \right) E \right] e^{-\lambda t} - \lambda E e^{-\lambda t} \\ = \delta(x, t) - \lambda E_\lambda^1$$

Puis on raisonne par récurrence sur k .

$$(9) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - D_x + \lambda \right) E_\lambda^k = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} E_\lambda^1 \right) - D_x E_\lambda^1 \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \lambda E_\lambda^1 \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ = \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} E_\lambda^1 + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \left(\frac{\partial E_\lambda^1}{\partial t} - D_x E_\lambda^1 + \lambda E_\lambda^1 \right) \\ = E_\lambda^{k-1} + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \delta(x, t)$$

Si $k \geq 2$, le deuxième terme est nul et il reste

$$(10) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - D_x + \lambda \right) E_\lambda^k = E_\lambda^{k-1} \quad k \geq 2$$

d'où immédiatement le résultat cherché par récurrence sur k .

Si on revient au cas de $D_x = \Delta$, on peut étendre la définition de E_λ^k pour tout nombre complexe k en posant $E_\lambda^k = e^{-\lambda t} \frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)} E(x, t)$ pour $\Re k > 0$ et en se servant ensuite de la formule (10) pour $\Re k \leq 0$, cette définition étant sans ambiguïté car le même calcul que plus haut montre que la formule (10) est valable pour $\Re k > 1$. On peut aussi utiliser des parties finies.

On a alors $E_\lambda^0 = \delta$, $E_\lambda^{-1} = (\frac{\partial}{\partial t} - \Delta + \lambda) \delta$ et la formule (10) avec $D_x = \Delta$ est valable en toute généralité. Pour λ fixé E_λ^k est une fonction holomorphe de k à valeur dans $\mathcal{O}'_{(x, t)}$, car on voit sur la définition qu'il en est ainsi pour $\Re k > 1$ et la formule (10) permet d'étendre ce résultat au cas où $\Re k \leq 1$. (Car $\frac{\partial}{\partial t} - \Delta + \lambda$ est un opérateur continu dans $\mathcal{O}'_{(x, t)}$).

Enfin, on peut définir le produit de convolution de E_λ^k et E_λ^h car ce sont des distributions appartenant à l'espace $(\mathcal{O}'_{L^1})_x \widehat{\otimes} (\mathcal{O}'_+)_t$ comme on le voit en examinant d'abord le cas où k et h ont des parties réelles strictement plus grandes que 1 (elles appartiennent même dans ce cas à l'espace $(\mathcal{O}'_+)_t (L^1_x) = (L^1_x) \widehat{\otimes} (\mathcal{O}'_+)_t$) et en appliquant ensuite un certain nombre de fois l'opérateur différentiel $\frac{\partial}{\partial t} - \Delta + \lambda$. On va démontrer la formule suivante

$$(11) \quad E_\lambda^k * E_\lambda^h = E_\lambda^{k+h}$$

Si la formule (11) est démontrée pour $\Re k, \Re h > 1$, le principe de prolongement analytique la démontrera en toute généralité. Or si k et h ont des parties réelles strictement plus grandes que 1, on a affaire à des fonctions sommables en x , à support limité à gauche en t et Lebesgue-Fubini montre que

$$(12) \quad \begin{aligned} (E_\lambda^k * E_\lambda^h)(x, t) &= \int_0^t E_\lambda^k(\hat{x}, t-s) *_{(x)} E_\lambda^h(\hat{x}, s) ds \\ &= e^{-\lambda t} \int_0^t \frac{(t-s)^{k-1}}{\Gamma(k)} \frac{s^{h-1}}{\Gamma(h)} E(\hat{x}, t-s) *_{(x)} E(\hat{x}, s) ds \end{aligned}$$

Or pour t fixé, la transformée de Fourier en x de $E(x, t)$ est $\hat{E}(p, t) = \exp(-4\pi^2 t |p|^2)$ et donc $\hat{E}(p, t-s) \hat{E}(p, s) = \hat{E}(p, t)$ d'où en appliquant la transformation de Fourier inverse

$$(13) \quad E(\hat{x}, t-s) *_{(x)} E(\hat{x}, s) = E(\hat{x}, t)$$

et finalement :

$$(14) \quad (E_\lambda^k * E_\lambda^h)(x, t) = E(x, t) e^{-\lambda t} \int_0^t \frac{(t-s)^{k-1}}{\Gamma(k)} \frac{s^{h-1}}{\Gamma(h)} ds = E(x, t) e^{-\lambda t} \frac{t^{h+k-1}}{\Gamma(h+k)}$$

ce qui achève de démontrer la formule (11) .

Retour à l'étude du laplacien.

Ordre d'une distribution par rapport à L^2 .

Nous allons introduire une notion d'ordre d'une distribution différente de celle introduite dans le Tome 1 du Traité des distributions mais qui est plus maniable dans les questions où interviennent les fonctions de carré sommable.

Nous dirons donc, par définition, qu'une distribution T est, dans un ouvert Ω , d'ordre $\leq -m$ ($0 \leq m \leq +\infty$) (par rapport à L^2), si, localement dans Ω , ses dérivées d'ordre $\leq m$ sont dans L^2 ; et qu'elle est d'ordre $\leq m$ ($0 \leq m < +\infty$) si elle est localement dans Ω somme finie de dérivées d'ordre $\leq m$ de fonctions appartenant à L^2 . Si l'ordre de T est $\leq m$ (m entier positif ou négatif) mais qu'il n'est pas $\leq m - 1$, nous dirons que l'ordre de T est exactement m .

D'après le théorème de structure des distributions, toute distribution est dans un ouvert borné d'ordre fini positif, ou négatif. Pour qu'elle soit une fonction de classe C^∞ , il faut et il suffit que son ordre soit $-\infty$. D'autre part, il est clair sur la définition que les sous-ensembles de \mathcal{O}' formés par les distributions d'ordre $\leq m$ forment une suite croissante de sous-espaces et que si T est d'ordre $\leq m$, $D^p T$ est d'ordre $\leq m + |p|$. Nous allons démontrer une réciproque de ce résultat dans le cas du laplacien en énonçant le théorème :

THÉOREME : Si T est une distribution d'ordre $\leq m$ dans un ouvert Ω , T est une distribution d'ordre $\leq m - 2$ dans Ω .

Pour $m = 0$, ce théorème signifie que si localement $\Delta T \in L^2$, les dérivées partielles de T d'ordre ≤ 2 sont aussi localement dans L^2 .

La démonstration se fait en plusieurs étapes.

A) On suppose d'abord T à support compact, $f(p)$ désignera alors sa transformée de Fourier qui est en tout cas une fonction continue.

(A₁) Pour que T à support compact soit d'ordre $\leq m$, il faut et il suffit que $f(p)/|p|^m$ soit une fonction de carré sommable pour $|p| \geq 1$

Soit pour commencer $m = -m' \leq 0$, autrement dit, dire que T est d'ordre $\leq m$ signifie que T est une fonction à support compact dont les dérivées d'ordre $\leq m'$ sont dans L^2 . Mais on sait que la transformation

de Fourier est un isomorphisme de $L^2(x)$ sur $L^2(p)$ et que si P est un polynôme à n variables, $P(\frac{\partial}{\partial x}) T$ a pour transformée de Fourier $P(2\pi ip)f(p)$; donc, dire que T est d'ordre $\leq m$ équivaut à dire que le produit de f par un polynôme de degré $\leq m'$ est dans L^2 dans tout l'espace ou même simplement pour $|p| \geq 1$ puisque f est continue. On en déduit que chaque $p_i^{m'} f$ donc $\sum |p_i|^{m'} f$ est dans L^2 pour $|p| \geq 1$, mais pour $|p| \geq 1$ le rapport $|p|^{m'} / \sum |p_i|^{m'}$ est borné donc $|p|^{m'} f$ est dans L^2 pour $|p| \geq 1$. En sens inverse, si $|p|^{m'} f$ est de carré sommable pour $|p| \geq 1$, il en est de même du produit de f par un polynôme de degré $\leq m'$, car le rapport d'un tel polynôme à $|p|^{m'}$ est borné pour $|p| \geq 1$.

Supposons maintenant $m \geq 0$, donc T d'ordre $\leq m$ signifie que T est de la forme $T = \sum_{|k| \leq m} D^k T_k$ où les T_k sont localement dans L^2 .

Mais on peut choisir les T_k à support compact; en effet puisque T est à support compact il existe une fonction α de classe C^∞ à support compact égale à 1 sur un voisinage du support de T , donc

$T = \alpha T = \sum_{|k| \leq m} \alpha(D^k T_k)$. Or la formule de Leibniz montre que $D^k(\alpha T_k)$ est somme de termes $D^q \alpha D^r T_k$ avec $|q| + |r| = k$; mais en vertu du choix de α , tous ces termes sont nuls sauf $\alpha D^k T_k$, donc $T = \sum D^k(\alpha T_k)$, $\alpha T_k \in \mathcal{E}'$ et $\in L^2$. Si f_k est la transformée de Fourier de αT_k on a donc $f = \sum_{|k| \leq m} (2i\pi p)^k f_k$ et les f_k sont dans L^2 donc $f/|p|^m$ est dans L^2 pour $|p| \geq 1$. Réciproquement si $f/|p|^m$ est dans L^2 pour $|p| \geq 1$, comme f est continue, $g = f/(1 + \sum |p_i|^m)$ est dans L^2 dans tout l'espace des p , de même que $\frac{|p_i|^m}{(p_i)^m} g = g_i$; et par suite

$f = g + \sum_i p_i^m g_i$, donc par Fourier T est somme finie de dérivées d'ordre $\leq m$ de fonctions de L^2 . Ceci achève la démonstration de notre assertion (A₁).

(A₂) Si T est à support compact et ΔT est d'ordre $\leq m$, alors T est d'ordre $\leq m - 2$.

En effet la transformée de Fourier de ΔT est $-4\pi^2 |p|^2 f$; d'après (A₁) $|p|^2 f/|p|^m$ est donc dans L^2 pour $|p| \geq 1$, donc $f/|p|^{m-2}$ est dans L^2 pour $|p| \geq 1$, ce qui toujours d'après (A₁) prouve que T est d'ordre $\leq m - 2$.

B) Si ΔT est à support compact et d'ordre $\leq m$, alors T est d'ordre $\leq m - 2$.

La définition de l'ordre d'une distribution est locale, nous avons donc à démontrer que pour tout ouvert borné U , T est d'ordre $\leq m - 2$ sur U . Introduisons donc une fonction α de classe C^∞ à support compact égale à 1 identiquement sur U et sur un voisinage du support (compact) de ΔT . $\Delta(\alpha T)$ est la somme de $\alpha \cdot \Delta T$ et de termes qui font intervenir des dérivées de α donc sont nuls dans un voisinage du support ΔT . Mais si ΔT est nulle dans un ouvert, T est dans cet ouvert une fonction harmonique donc analytique et donc les termes restants de $\Delta(\alpha T)$ sont de classe C^∞ dans tout l'espace. Mais ΔT est d'ordre $\leq m$ et α de classe C^∞ , donc $\alpha \Delta T$ est d'ordre $\leq m$. Finalement $\Delta(\alpha T)$ est d'ordre $\leq m$, mais comme αT est à support compact, on peut appliquer le résultat du A₂ et conclure que αT est d'ordre $\leq m - 2$, donc que T égale à αT dans U est, dans cet ouvert, d'ordre $\leq m - 2$.

C) Cas général : On suppose que ΔT est d'ordre $\leq m$ dans un ouvert Ω . On prend alors un ouvert borné ω , $\bar{\omega}$ contenu dans Ω , puis une fonction α de classe C^∞ à support compact égale à 1 sur ω . Si l'on pose $S_1 = \alpha \Delta T$ et $S_2 = (1 - \alpha) \Delta T$, S_1 est à support compact, S_2 est nulle dans ω et $\Delta T = S_1 + S_2$. Appelons T_1 le potentiel de S_1 , c'est donc une distribution telle que $\Delta T_1 = S_1$, puis posons $T = T_1 + T_2$. Mais ΔT est d'ordre $\leq m$, donc il en est de même de $S_1 = \alpha \cdot \Delta T$, et par suite en appliquant le résultat de B) ce qui est licite puisque $S_1 = \Delta T_1$ est à support compact, on voit que T_1 est d'ordre $\leq m - 2$. Par ailleurs on a $\Delta T_2 = S_2$ et S_2 est nulle dans ω , donc T_2 est une fonction harmonique donc analytique dans ω , et T qui est somme de T_1 et T_2 est donc bien d'ordre $\leq m - 2$ dans ω , donc dans Ω puisque ω est quelconque et que la notion d'ordre est locale.

C.Q.F.D.

COROLLAIRE : Si D_1 est un opérateur différentiel d'ordre ≤ 1 à coefficients indéfiniment différentiables, l'opérateur $\Delta + D_1$ est elliptique.

Soit Ω un ouvert borné et supposons que $(\Delta + D_1) T$ soit une fonction de classe C^∞ dans Ω , autrement dit $\alpha = (\Delta + D_1) T$ est d'ordre $\leq m$ pour tout entier m (de signe quelconque) dans Ω . Mais alors si T est exactement d'ordre n dans Ω , $D_1 T$ est d'ordre

$\leq n+1$ dans Ω et $\Delta T = \alpha - D_1 T$ est aussi d'ordre $\leq n+1$ dans Ω ; donc T est d'ordre $\leq n-1$ dans Ω d'après le théorème. Cela signifie que $n \leq n-1$, donc, en se rappelant que $-\infty \leq n < +\infty$, on a $n = -\infty$, et $T \in \mathcal{E}(\Omega)$, ce qui prouve bien que $\Delta + D_1$ est elliptique.

Plus généralement, si $(\Delta + D_1) T$ est d'ordre $\leq m$ dans Ω , T est d'ordre $\leq m-2$.

Soit en effet n l'ordre exact de T dans Ω . Alors l'ordre de $D_1 T$ est $\leq n+1$, donc l'ordre de $\Delta T = (\Delta + D_1) T - D_1 T$ est $\leq \sup(m, n+1)$; alors d'après le théorème, l'ordre de T est $\leq \sup(m-2, n-1)$. On a donc $n \leq \sup(m-2, n-1)$ donc $n \leq m-2$, cqfd.

REMARQUE : La notion d'ordre au sens de L^2 a des propriétés bien plus simples que la notion d'ordre introduite dans le tome I des Distributions. Signalons en particulier que :

1°) Si les dérivées d'ordre $\leq k$ de T sont d'ordre $\leq m$, T est d'ordre $\leq m-k$. Il suffit de le montrer pour $k=1$. Or, si les dérivées d'ordre ≤ 1 de T sont d'ordre $\leq m$, ΔT est d'ordre $\leq m+1$, donc T est bien d'ordre $\leq m-1$.

2°) Soit \mathcal{L}^m l'espace des distributions d'ordre $\leq m$, \mathcal{K}^m l'espace des distributions à support compact d'ordre $\leq m$.⁽¹⁾

On voit sans peine qu'on peut mettre sur \mathcal{L}^m une topologie (de caractère local sur \mathbb{R}^n) et sur \mathcal{K}^m une topologie limite inductive, qui en font des espaces réflexifs, \mathcal{L}^m Fréchet, \mathcal{K}^m type \mathcal{LF} , le dual de \mathcal{K}^m étant \mathcal{L}^{-m} .

(1) \mathcal{K} est l'initiale de compact ; \mathcal{L} est l'initiale de local, l'appartenance à \mathcal{L}^m étant une propriété de caractère local sur \mathbb{R}^n .