

SÉMINAIRE SCHWARTZ

L. SCHWARTZ

Opérateurs invariants par rotations. Fonctions métaharmoniques

Séminaire Schwartz, tome 2 (1954-1955), exp. n° 9, p. 1-5

http://www.numdam.org/item?id=SLS_1954-1955__2__A12_0

© Séminaire Schwartz
(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schwartz » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

-:-:-:-
 Séminaire SCHWARTZ
 (Equations aux dérivées partielles)
 Année 1954/55
 -:-:-:-

Exposé n° 9

OPÉRATEURS INVARIANTS PAR ROTATIONS.
FONCTIONS MÉTAHARMONIQUES

-:-:-:-

Opérateurs différentiels invariants par rotation.

Nous gardons les notations de l'exposé 7 .

Soit D un opérateur différentiel invariant par tous les déplacements de R^n ; $D = P(\frac{\partial}{\partial x})$ où P est un polynôme à n variables à coefficients complexes, puisque D est invariant par translation. D'autre part P est invariant par rotation, donc $P(X) = Q(\sum X_i^2)$, et par suite $D = Q(\Delta)$, $Q(z)$ étant un polynôme à une variable z et Δ étant le laplacien.

Ecrivons le développement de $\frac{1}{Q(z)}$ en éléments simples

$$(1) \quad \frac{1}{Q(z)} = \sum C_{\lambda,k} (z+\lambda)^{-k}$$

Si $C_{\lambda,k} \neq 0$, Q est divisible par $(z+\lambda)^k$, soit $Q(z) = Q_{\lambda,k}(z)(z+\lambda)^k$, et de l'égalité (1) on déduit en multipliant par Q

$$(2) \quad 1 = \sum C_{\lambda,k} Q_{\lambda,k}(z), \text{ donc } I = \sum C_{\lambda,k} Q_{\lambda,k}(\Delta).$$

Donc si U est une distribution quelconque, et si on pose

$$U_{\lambda,k} = Q_{\lambda,k}(\Delta) U, \text{ on a}$$

$$(3) \quad Q(\Delta) U = (\Delta+\lambda)^k U_{\lambda,k}, \quad U = \sum C_{\lambda,k} U_{\lambda,k}$$

Il en résulte que si U est une solution élémentaire de $Q(\Delta)$, chaque $U_{\lambda,k}$ est solution élémentaire de $(\Delta+\lambda)^k$; et réciproquement si, pour toute valeur de λ, k , $U_{\lambda,k}$ est une solution élémentaire quelconque de $(\Delta+\lambda)^k$, alors la distribution U donnée par la dernière formule (3) vérifie

$$Q(\Delta)U = \sum C_{\lambda,k} Q(\Delta)U_{\lambda,k} = \sum C_{\lambda,k} Q_{\lambda,k}(\Delta)(\Delta+\lambda)^k U_{\lambda,k} = \sum C_{\lambda,k} Q_{\lambda,k}(\Delta)\delta = \delta.$$

La recherche des solutions élémentaires de D est donc ramenée à celle des solutions élémentaires de $(\Delta+\lambda)^k$. Soit U une solution élémentaire de $\Delta+\lambda$ qui dépende (comme distribution en x) différemment du paramètre λ . Posons

$$(4) \quad U_{\lambda,k} = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \left(\frac{d}{d\lambda} \right)^{k-1} U_{\lambda} \quad k \geq 1$$

On va montrer par récurrence sur k que $U_{\lambda,k}$ est solution élémentaire de $(\Delta+\lambda)^k$. Or, pour $k=1$, $U_{\lambda,1} = U_{\lambda}$; c'est donc bien le cas. Puis, si $(\Delta+\lambda)^k U_{\lambda,k} = \delta$, dérivant par rapport à λ et appliquant l'opérateur $\Delta+\lambda$, il vient

$$(5) \quad k (\Delta+\lambda)^k U_{\lambda,k} + (\Delta+\lambda)^{k+1} (-k U_{\lambda,k+1}) = 0$$

d'où en tenant compte de l'hypothèse de récurrence

$$(6) \quad (\Delta+\lambda)^{k+1} U_{\lambda,k+1} = \delta$$

Or la formule (31) de l'exposé 8 fournit une solution élémentaire de $\Delta+\lambda$, à savoir

$$(7) \quad U_{\lambda}(x) = \frac{\lambda^{\frac{n-1}{4}}}{2^{\frac{n+1}{2}} \prod_{2}^{\frac{n-1}{2}}} \frac{1}{r^{\frac{n-1}{2}}} N_{\frac{n}{2}-1}(\sqrt{\lambda} r) \quad r = |x|$$

Mais, quelle que soit la parité de n , la fonction de Neumann peut s'écrire

$$N_{\frac{n}{2}-1}(u) = \frac{1}{u^{\frac{n}{2}-1}} A(u) + \log u B(u)$$

où A et B sont des fonctions entières. On en déduit

$$(8) \quad U_{\lambda}(x) = \frac{1}{r^{n-2}} A_1(\sqrt{\lambda} r) + \frac{\lambda^{\frac{n-1}{4}}}{r^{\frac{n-1}{2}}} \log(\sqrt{\lambda} r) B_1(\sqrt{\lambda} r)$$

ce qui prouve que U_{λ} dépend même analytiquement de λ dans l'espace des distributions, pour $\lambda \neq 0$. De plus, ses dérivées partielles en λ sont les fonctions égales, pour $r > 0$, aux dérivées usuelles.

$U_{\lambda,k}$ s'obtient en dérivant $(k-1)$ fois U_{λ} par rapport à λ . Ce faisant il est bon de rappeler la formule de récurrence des fonctions de Neumann

$$(9) \quad N'_{\nu}(x) = -\frac{\nu}{x} N_{\nu}(x) + N_{\nu-1}(x)$$

Ou encore, ce qui est équivalent

$$(10) \quad \frac{d}{dx} (N_{\nu}(x) x^{\nu}) = N_{\nu-1}(x) x^{\nu}$$

La formule suivante s'en déduit immédiatement par récurrence en tenant compte de $\frac{d}{d\lambda} f(\sqrt{\lambda} r) = \frac{r}{2} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} f'(\sqrt{\lambda} r)$ (avec $f(u) = u^{\nu} N_{\nu}(u)$) :

$$(11) \quad U_{\lambda,k}(x) = \frac{(-1)^{k-1} \lambda^{\frac{n-k}{4-2}}}{(k-1)! \Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)} \frac{1}{r^{\frac{n}{2}-k}} N_{\frac{n}{2}-k}(\sqrt{\lambda} r)$$

Ceci n'est valable que si $\lambda \neq 0$. Dans le cas $\lambda = 0$, les solutions élémentaires de Δ^k sont calculées dans le tome 1 des Distributions (page 47).

$$(12) \quad \Delta^k(r^{2k-n}) = (2k-n)(2k-2-n)\dots(4-n)(2-n) 2^{k-1}(k-1)! \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \delta$$

si $2k-n < 0$, ou si $2k-n \geq 0$ et n impair ;

$$(13) \quad \Delta^k(r^{2k-n} \log r) = (2k-n)\dots \hat{0} \dots (2-n) 2^{k-1}(k-1)! \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \delta$$

(le facteur 0 est omis) si $2k-n \geq 0$ et n pair.

Fonctions métaharmoniques

Une fonction U solution de l'équation $(\Delta + \lambda) U = 0$ s'appelle λ -métaharmonique. D'après la formule (31) de l'exposé 8, toute fonction métaharmonique invariante par rotation est proportionnelle à la fonction

$$(14) \quad \frac{2^{\frac{n}{2}-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{r^{\frac{n}{2}-1} \lambda^{\frac{n-1}{4-2}}} J_{\frac{n}{2}-1}(\sqrt{\lambda} r) = \sum_{m \geq 0} (-1)^m \lambda^m r^{2m} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{4^m m! \Gamma\left(m + \frac{n}{2}\right)} = j(r)$$

qui prend la valeur 1 à l'origine (en vertu du choix du coefficient).

Soit U métaharmonique, alors comme $(\Delta U)^k = \Delta U^k$, U^k est aussi métaharmonique et invariante par rotation et $U^k(0) = U(0)$, on a donc $U^k(x) = j(|x|) U(0)$ autrement dit si $\bar{U}(R)$ est la valeur moyenne de U sur la sphère de rayon R centrée en 0 , on a

$$(15) \quad \bar{U}(R) = U(0) j(R)$$

Réciproquement, supposons que U soit continue et vérifie l'équation (15) quels que soient 0 et R . Cette équation s'écrit $U * (\mu(R) - j(R)\delta) = 0$ si $\mu(R)$ est la masse $+1$ répartie de manière homogène sur la sphère de rayon R . On va démontrer que toute distribution U vérifiant cette équation de convolution quel que soit R , est λ -métaharmonique. Cherchons le développement asymptotique de $\mu(R)$ par rapport au paramètre R tendant vers 0 .

Si δ_R est la masse $+1$ au point $(R, 0, 0, \dots, 0)$ on a

$$\mu(R) = \delta_R^k \text{ et } (D_1 = \frac{\partial}{\partial x_1})$$

$$(16) \quad \delta_R \simeq \sum_{m \geq 0} (-1)^m \frac{R^m}{m!} (D_1)^m \delta$$

d'après la formule de Taylor (\simeq indique qu'il s'agit d'un développement asymptotique non convergent) . Appliquant l'opération \mathcal{L} terme à terme (ce qui est licite car elle est continue) on trouve

$$(17) \quad \mu(R) = \sum_{m \geq 0} \frac{(-1)^m}{m!} R^m (D_1^m \delta)^{\mathcal{L}}$$

Or $(D_1^m \delta)^{\mathcal{L}}$ est nulle en dehors de l'origine, homogène d'ordre $-m$ (en tant que courant de degré n) et invariante par rotation, donc $= 0$ si m est impair et égale à $a_p \Delta^p \delta$ si $m = 2p$. De plus

$$(18) \quad \langle (D_1^{2p} \delta)^{\mathcal{L}}, r^{2p} \rangle = \langle D_1^{2p} \delta, r^{2p} \rangle = (2p)!$$

et d'autre part $\Delta(r^{2p}) = 2p(2p+n-2) r^{2p-2}$ d'où

$$(19) \quad \langle \Delta^p \delta, r^{2p} \rangle = 2^{2p} p! \Gamma(p + \frac{n}{2}) / \Gamma(\frac{n}{2})$$

Finalement

$$(20) \quad \mu(R) \simeq \sum_{p \geq 0} \frac{\Gamma(n/2)}{2^{2p} p! \Gamma(p + \frac{n}{2})} R^{2p} \Delta^p \delta \simeq j(iR \Delta^{\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}}) \delta$$

En négligeant les termes d'ordre ≥ 3 on a donc

$$(21) \quad \mu(R) - j(R) \delta \simeq \frac{R^2}{2n} (\Delta \delta + \lambda \delta)$$

c'est-à-dire $0 = \frac{1}{R^2} (\mu(R) \times U - j(R) U) \xrightarrow{R \rightarrow 0} \frac{1}{2n} (\Delta + \lambda) U$

Donc l'équation (15) caractérise les fonctions λ -métaharmoniques.

Propriétés des fonctions métaharmoniques

Elles se déduisent de l'équation (15)

1) $\lambda > 0$ la fonction $j(R)$ est oscillante et décroît pour les petites valeurs de R . D'autre part $\sqrt{R^{n-1}} j(R)$ est asymptotique à un polynôme trigonométrique lorsque $R \rightarrow \infty$. En conséquence

a) si $a_{n,\nu}$ est la suite des zéros de $J_{\frac{n-1}{2}}$ alors pour $R = \frac{a_{n,\nu}}{\sqrt{\lambda}}$, $\bar{U}(R) = 0$; donc U a une valeur moyenne nulle sur toute sphère de

rayon $\frac{a_{n,\nu}}{\sqrt{\lambda}}$; en particulier sur toute sphère ayant un tel rayon, elle doit (si elle $\sqrt{\lambda}$ est réelle) changer de signe, d'où

Si $U \geq 0$ est métaharmonique, elle est identiquement nulle

b) si $U(0) > 0$, comme $j(R)$ décroît pour R assez petit, $U(0)$ est plus grand que $\bar{U}(R)$ pour R petit donc U ne peut avoir un minimum local

en un point où elle est > 0 . De même elle n'a pas de maximum local en un point où elle est < 0 . Et si $U(0) = 0$ $\bar{U}(R) = 0$ pour tout R , donc U ne peut avoir aucun extremum au point 0 .

c) d'après la valeur asymptotique de $j(R)$, si $U \neq 0$, on ne peut avoir $U(x) = o(|x|^{(1-n)/2})$. Une majoration dans un sens suffit même.

2) $\lambda < 0$ $j(R)$ est strictement croissante donc constamment positive et l'on a pour $R \rightarrow \infty$ $j(R) \simeq \frac{e^{\sqrt{\lambda} R}}{R^{(n-1)/2}}$. En conséquence

a) $\bar{U}(R)$ est une fonction strictement croissante de R si $U(0) > 0$ et la valeur moyenne de U sur la sphère de rayon R centrée en 0 augmente avec R .

b) donc, si $U(0) > 0$, U ne peut avoir de maximum en 0 , et de même pas de minimum en un point où elle est négative. Si $U(0) = 0$, il n'y a pas d'extremum à l'origine .

c) si $U \neq 0$ on ne peut avoir $U(x) = o\left(\frac{e^{\sqrt{\lambda} |x|}}{|x|^{(n-1)/2}}\right)$ et par suite il existe des régions dans lesquelles U croît exponentiellement au moins (mais $U > 0$ est possible).

3) $\lambda = 0$ on retrouve les propriétés bien connues des fonctions harmoniques.

Remarques : 1) pour $\lambda = 0$, on a $j(R) = 1$ et l'équation (15) n'est autre que le théorème de la moyenne des fonctions harmoniques, théorème qui repose donc sur le fait qu'il n'y a pas de fonction harmonique non constante invariante par rotation.

2) Il n'y a aucune chance pour que les propriétés des fonctions λ -métaharmoniques pour $\lambda > 0$ s'étendent aux fonctions pour lesquelles $\lambda < 0$, car $j(R)$ les met déjà toutes en défaut. Et vice-versa.