

SÉMINAIRE SCHWARTZ

L. SCHWARTZ

Solutions élémentaires des opérateurs Δ et $\Delta + \lambda$

Séminaire Schwartz, tome 2 (1954-1955), exp. n° 8, p. 1-8

http://www.numdam.org/item?id=SLS_1954-1955__2__A11_0

© Séminaire Schwartz
(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schwartz » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Exposé n° 8

SOLUTIONS ÉLÉMENTAIRES DES OPÉRATEURS

Δ et $\Delta + \lambda$.
 (Exposé du 14.1.1955).

-.:-:-

L'OPÉRATEUR Δ DANS \mathcal{E}_{R_+} ET \mathcal{D}'_{R_+}

L'opérateur Δ est invariant par rotation, donc il lui correspond un opérateur différentiel dans \mathcal{E}_{R_+} , que nous continuerons à appeler Δ . Nous l'avons déjà calculé (exposé précédent) : pour $\varphi \in \mathcal{E}_{R_+}$,

$$(1) \quad \Delta \varphi = 2n \frac{d\varphi}{dt} + 4t \frac{d^2\varphi}{dt^2} .$$

D'autre part, l'opérateur Δ dans \mathcal{D}'_{R_+} est le transposé de l'opérateur Δ dans $\mathcal{D}^q_{R_+}$ (autrement dit $\langle \Delta T, \varphi \rangle = \langle T, \Delta \varphi \rangle$). Donc il lui correspond aussi un opérateur différentiel dans \mathcal{D}'_{R_+} , que nous appellerons encore Δ , et qui est le transposé de celui qui est défini par (1). On a donc, pour $T \in \mathcal{D}'_{R_+}$:

$$(2) \quad \Delta T = -2n \frac{dT}{dt} + 4 \frac{d^2T}{dt^2} (t T) \\
 = (8 - 2n) \frac{dT}{dt} + 4t \frac{d^2T}{dt^2} .$$

Il importera donc toujours, dans R_+ , de bien distinguer l'opérateur Δ sur les fonctions et l'opérateur Δ sur les distributions. Il est bon de remarquer que sur R_+ , on peut étudier les opérateurs Δ ci-dessus définis même pour n réel ou complexe, quelconque ; c'est seulement pour n entier ≥ 1 qu'ils auront l'interprétation initialement donnée.

SOLUTIONS ÉLÉMENTAIRES DE Δ , INVARIANTES PAR ROTATION.

D'après un exposé antérieur, Δ possède sûrement au moins une solution élémentaire E_1 ; alors $E = E_1^H$ est une solution élémentaire invariante par rotation (car de $\Delta E_1 = \delta$ on déduit $\Delta E_1^H = \delta^H = \delta$). Alors E est solution

de

$$(3) \quad 4t \frac{d^2 E}{dt^2} + (8 - 2n) \frac{dE}{dt} = \delta$$

Dans le complémentaire de l'origine sur R_+ , c'est une équation différentielle homogène ($\delta = 0$); on peut d'autre part diviser par $4t$ de façon que le coefficient de $\frac{d^2 E}{dt^2}$ soit 1; alors, le caractère analytique-elliptique d'un opérateur différentiel à coefficients analytiques sur R étant trivial lorsque le plus haut coefficient est 1 (voir "Distributions", tome I, p.128), E est une fonction analytique de t dans $\int_{(R_+)}^0$, soit $E(\hat{t})$.

Il lui correspond dans R^n la fonction $\frac{2}{S_n} \frac{E(\hat{r}^2)}{\hat{r}^{n-2}}$, qui est donc analytique dans $\int_{(R^n)}^0$ de sorte que Δ est un opérateur analytique-elliptique dans R^n ; la même démonstration subsiste pour $\Delta + \lambda$ et cela sans qu'il soit nécessaire de faire aucun calcul effectif de la solution élémentaire.

Néanmoins nous allons calculer cette solution par résolution complète de (3) dans \mathcal{D}'_{R_+} , pour n réel ou complexe quelconque. Pour n entier ≥ 1 , le calcul n'est pas au fond différent de celui qui a été fait dans le précédent exposé.

Tout d'abord dans $\int_{(R_+)}^0$ les solutions de (3) sont nécessairement les solutions usuelles de l'équation homogène, pour les raisons données plus haut. Ces solutions sont données par la formule :

$$(4) \quad E(t) = A + B t^{\frac{n-2}{2}} \quad \text{pour } n \neq 2 ;$$

$$E(t) = A + B \log \frac{1}{t} \quad \text{pour } n = 2 .$$

A) Calcul de $\Delta \hat{t}^{\frac{n-2}{2}}$ dans \mathcal{D}'_{R_+} .

Ce calcul est trivial si n est entier ≥ 1 . Car alors la distribution $\hat{t}^{\frac{n-2}{2}}$ sur R_+ correspond à la distribution définie par la fonction constante $\frac{2}{S_n}$ dans R^n , et alors son laplacien est nul. Mais ce résultat est valable pour n quelconque distinct de tout entier pair ≤ 0 (à condition de considérer que $\hat{t}^{\frac{n-2}{2}}$ signifie $\text{Pf } \hat{t}^{\frac{n-2}{2}}$ pour $\text{Re } n \leq 0$). On a alors, pour n distinct de tout entier pair ≤ 2 :

$$(5) \quad \frac{d}{dt} \text{Pf } t^{\frac{n-2}{2}} = \text{Pf } \left\{ \frac{d}{dt} t^{\frac{n-2}{2}} \right\}$$

(la dérivée dans le 2e membre étant prise au sens usuel, d'où le symbole $\{ \}$).
On a de même, pour n distinct de tout entier pair ≤ 4 :

$$(6) \quad \frac{d^2}{dt^2} \text{Pf } t^{\frac{n-2}{2}} = \text{Pf} \left\{ \frac{d^2}{dt^2} t^{\frac{n-2}{2}} \right\}$$

Donc, pour n distinct de tout entier pair ≤ 4 , on a :

$$(7) \quad \Delta \text{Pf } t^{\frac{n-2}{2}} = \text{Pf} \left\{ \Delta t^{\frac{n-2}{2}} \right\} = 0.$$

Comme nous avons vu que ce résultat était trivial par passage à \mathbb{R}^n pour $n = 4$ et $n = 2$ (ce que montrerait aussi un calcul direct sur les parties finies), il est bien valable pour n distinct de tout entier pair ≤ 0 .

B) Calcul de $\Delta 1$ dans $\mathcal{D}'_{\mathbb{R}_+}$

On a toujours

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} 1 = \delta \\ \frac{d^2}{dt^2} 1 = \delta' \end{cases}$$

(Ne pas oublier que \mathbb{R}_+ est une variété avec bord. 1 n'est pas autre chose que la fonction d'Heaviside Y). Alors

$$(9) \quad \Delta 1 = 4 t \delta' + (8 - 2n)\delta = -4\delta + (8 - 2n)\delta = (4 - 2n)\delta$$

Cela nous donne dans $\mathcal{D}'_{\mathbb{R}_+}$ une solution élémentaire de Δ , valable pour n quelconque $\neq 2$:

$$(10) \quad E(t) = \frac{1}{4 - 2n} = -\frac{1}{2(n - 2)}.$$

C) Calcul de $\Delta \log \frac{1}{t}$ pour $n = 2$. (1)

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \log \frac{1}{t} = -\text{Pf} \frac{1}{t} = \text{Pf} \left\{ \frac{d}{dt} \log \frac{1}{t} \right\} \\ \frac{d^2}{dt^2} \log \frac{1}{t} = \text{Pf} \frac{1}{t^2} + \delta' = \text{Pf} \left\{ \frac{d^2}{dt^2} \log \frac{1}{t} \right\} + \delta' \\ \Delta \log \frac{1}{t} = \text{Pf} \left\{ \Delta \log \frac{1}{t} \right\} + 4 t \delta' = -4\delta \end{cases}$$

(1) - Rappelons que $f(\hat{x})$ veut dire la fonction f ou la distribution définie par cette fonction ; \hat{x} est une variable muette, ce que nous exprimerons par le symbole \wedge . On pourra aussi écrire $T(\hat{x})$ pour une distribution qui n'est pas une fonction ; par exemple $\delta(\hat{x})$ veut dire δ . Mais fréquemment nous supprimerons ce symbole \wedge quand aucune confusion n'est à craindre.

d'où la solution élémentaire :

$$(12) \quad E(\hat{t}) = -\frac{1}{4} \log \frac{1}{\hat{t}}$$

Cela nous donne, dans R^n pour n entier ≥ 1 , la solution élémentaire :

$$(13) \quad E(\hat{x}) = -\frac{1}{(n-2) S_n} \frac{1}{\hat{r}^{n-2}} \quad \text{pour } n \neq 2 \quad ;$$

$$(14) \quad E(\hat{x}) = -\frac{1}{2 S_2} \log \frac{1}{r^2} = -\frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r} \quad \text{pour } n = 2 \quad .$$

C'est ce que nous avons trouvé dans l'exposé précédent.

C) La solution générale de (3) est nécessairement combinaison des solutions déjà trouvées et d'une distribution H ayant pour support l'origine.

Supposons que, dans \mathcal{D}'_{R^+} ,

$$(15) \quad H = \sum_{k=0}^n c_k \delta^{(k)} \quad , \quad c_m \neq 0 \quad , \quad m \text{ entier } \geq 0 \quad .$$

Alors dans ΔH figure un terme en $\delta^{(m+1)}$ avec un coefficient

$$(16) \quad c_m (8 - 2n - 4m - 8) = -2 c_m (n + 2m)$$

qui n'est jamais nul si n est distinct de tout entier pair ≤ 0 .

Il en résulte que toute solution de (3) est donnée par

$$(17) \quad E(\hat{t}) = -\frac{1}{2(n-2)} + B \hat{t}^{\frac{n-2}{2}} \quad ,$$

pour n distinct de tout entier pair ≤ 2 , et

$$(18) \quad E(\hat{t}) = -\frac{1}{4} \log \frac{1}{\hat{t}} + A \quad ,$$

pour $n = 2$, A et B étant des constantes arbitraires. Si n est un entier pair ≤ 0 , (10) donne toujours une solution de (3), mais la solution générale de (3) n'est pas donnée par (17).

En particulier pour n entier ≥ 1 , la solution élémentaire la plus générale de Δ , dans R^n , qui soit invariante par rotation, est donnée par :

$$(19) \quad \begin{cases} E(\hat{x}) = -\frac{1}{(n-2) S_n} \frac{1}{\hat{r}^{n-2}} + C \quad , \quad n \neq 2 \\ E(\hat{x}) = -\frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{\hat{r}} + C \quad , \quad n = 2 \end{cases}$$

C étant une constante arbitraire. Ce résultat pouvait d'ailleurs s'obtenir

sans calcul, car toute solution élémentaire diffère de l'une d'entre elles d'une fonction harmonique ; une telle fonction est analytique, à cause du caractère analytique-elliptique de Δ , résultant de la considération de l'une de ses solutions élémentaires. Or il n'y a pas d'autres fonctions harmoniques (au sens usuel, puisque fonctions analytiques) invariantes par rotation, que les constantes, d'après (4).

En ce qui concerne le cas où n est un entier ≤ 0 pair, nous laissons au lecteur le soin de vérifier que la solution élémentaire la plus générale dans $\mathcal{O}'_{\mathbb{R}^n_+}$ est

$$(20) \quad E = -\frac{1}{2(n-2)} + C \delta^{(-\frac{n}{2})},$$

C constante arbitraire.

RECHERCHE DES SOLUTIONS ÉLÉMENTAIRES DE $\Delta + \lambda$.

Nous avons à résoudre l'équation

$$(21) \quad 4t \frac{d^2 E}{dt^2} + (8 - 2n) \frac{dE}{dt} + \lambda E = \delta$$

Dans $\mathcal{O}_{(\mathbb{R}^n_+)}$, il s'agit de trouver une solution de l'équation homogène.

La solution est la suivante (l'équation est une équation de Bessel modifiée) :

$$(22) \quad E(\hat{t}) = A t^{\frac{n-2}{4}} J_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda} t) + B t^{\frac{n-2}{4}} N_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda} t),$$

A et B étant des constantes arbitraires, J une fonction de Bessel, N une fonction de Neumann.

A) Calcul de $(\Delta + \lambda)$ [Pf. $t^{\frac{n-2}{4}} J_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda} t)$].

Supposons d'abord n entier ≥ 1 . On sait que $J_{\frac{n-2}{2}}(u)$ est le produit de $u^{\frac{n-2}{2}}$ par une fonction analytique entière de u^2 ; alors $t^{\frac{n-2}{4}} J_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda} t)$ est le produit de $t^{\frac{n-2}{2}}$ par une fonction analytique entière de t ; en passant à \mathbb{R}^n , on doit remplacer t par r^2 et multiplier par $\frac{2}{S_n} \frac{1}{r^{n-2}}$, de sorte qu'on obtient une fonction analytique entière de r^2 , donc une fonction analytique dans \mathbb{R}^n ; son laplacien est donc son laplacien usuel, calculé dans $\mathcal{O}_{(\mathbb{R}^n)}$, donc cette fonction est dans \mathbb{R}^n une solution de l'équation homogène.

Ce résultat subsiste sur R_+ pour n quelconque, distinct de tout entier pair ≤ 0 ; on le voit comme précédemment dans le cas $\lambda = 0$.

B) Calcul de $(\Delta + \lambda) \left[\text{Pf.} t^{\frac{n-2}{4}} N_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda t}) \right]$.

Nous allons d'abord supposer que n est distinct de tout entier pair. Alors la fonction de Neumann s'exprime simplement comme combinaison de fonctions de Bessel :

$$(23) \quad N_\nu(u) = \frac{\cos \nu \pi J_\nu(u) - J_{-\nu}(u)}{\sin \nu \pi}$$

Le terme en J_ν ne nous intéresse pas, puisque nous venons de voir dans A) que $t^{\frac{n-2}{4}} J_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda t})$ est une solution de l'équation homogène. Reste le terme en $J_{-\nu}$, nous avons donc à calculer

$$(24) \quad (\Delta + \lambda) \left[t^{\frac{n-2}{4}} J_{-\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda t}) \right] \frac{1}{\sin \frac{n\pi}{2}} .$$

Mais alors $t^{\frac{n-2}{4}} J_{-\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda t})$ est une fonction analytique entière de t .

Soit terme constant est :

$$(25) \quad \frac{\lambda^{-\frac{n-2}{4}}}{\Gamma(-\frac{n}{2} + 2)} \frac{1}{2} \frac{\lambda^{-\frac{n-1}{4+2}}}{\Gamma(2 - \frac{n}{2})} 2^{\frac{n-1}{2}}$$

Appelons a_1 son coefficient de t . On a

$$(26) \quad \frac{d}{dt} \left[t^{\frac{n-2}{4}} J_{-\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda t}) \right] = \left\{ \right\} + \frac{\lambda^{-\frac{n-2}{4}}}{\Gamma(-\frac{n}{2} + 2)} 2^{\frac{n-1}{2}} \delta ,$$

$\left\{ \right\}$ désignant la dérivée usuelle. Puis

$$(27) \quad \frac{d^2}{dt^2} [\] = \left\{ \right\} + a_1 \delta + \frac{\lambda^{-\frac{n-2}{4}}}{\Gamma(-\frac{n}{2} + 2)} 2^{\frac{n-1}{2}} \delta ,$$

d'où finalement

$$(28) \quad (\Delta + \lambda) \left[t^{\frac{n-2}{4}} J_{-\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda t}) \right] = \left\{ \right\} + \frac{\lambda^{-\frac{n-2}{4}}}{\Gamma(-\frac{n}{2} + 2)} 2^{\frac{n-1}{2}} (4 - 2n) \delta .$$

Le facteur $(4 - 2n)$ n'est pas nouveau, le calcul est le même que celui qui a été fait pour $\lambda = 0$. Quant à $\left\{ \right\}$, il est nul, puisqu'il s'agit d'une solution (au sens usuel) de l'équation homogène. Finalement, compte-tenu de la formule des compléments relative à Γ , on obtient :

$$\begin{aligned}
 (29) \quad & (\Delta + \lambda) \left[\text{Pf. } t^{\frac{n-2}{4}} N_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda t}) \right] \\
 &= \lambda^{-\frac{n-1}{4} + \frac{1}{2}} \frac{n}{2^{\frac{n}{2}+1}} \frac{(1 - \frac{n}{2})}{\Gamma(2 - \frac{n}{2})} \frac{1}{\sin \frac{n\pi}{2}} \delta \\
 &= \lambda^{-\frac{n-1}{4} + \frac{1}{2}} \frac{2^{\frac{n}{2}+1}}{\Gamma(1 - \frac{n}{2}) \sin \frac{n\pi}{2}} \delta \\
 &= \lambda^{-\frac{n-1}{4} + \frac{1}{2}} \frac{2^{\frac{n}{2}+1}}{\pi} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \delta .
 \end{aligned}$$

Nous ne nous occuperons pas des valeurs de n qui sont entières paires ≤ 0 , car elles donnent lieu à un calcul différent, déjà ^{remarqué} pour $\lambda = 0$, et pour λ quelconque dans A ; le facteur $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ le montre à nouveau ici. Mais nous ne pouvons pas laisser de côté le cas de n pair > 0 , car il correspond à un problème donné dans R^n . Mais nous raisonnerons par passage à la limite sur n . On sait en effet que, si ν varie dans le demi-plan $\mathcal{R}_\nu \geq 0$, $N_\nu(u)$ est une fonction continue de ν et u réel > 0 . Si maintenant on considère la demi-droite $u \geq 0$, on peut seulement dire que $u^\nu N_\nu(u)$ est fonction continue de u et ν pour $u \geq 0$, $\mathcal{R}_\nu > 0$, et qu'elle est majorée par $k \log u$ pour $u \geq 0$, $\mathcal{R}_\nu \geq 0$. Dans tous les cas, on en déduit que $t^{\nu/2} N_\nu(\sqrt{\lambda t})$ est une distribution sur R_+ qui, dans \mathcal{D}'_{R_+} , dépend continuellement de ν pour $\mathcal{R}_\nu \geq 0$.

Comme alors Δ dépend continuellement de n pour n quelconque, on peut passer à la limite, et la formule (29) reste exacte pour n entier pair ≥ 2 , correspondant à $\nu = \frac{n-2}{2}$ entier ≥ 0 .

On en déduit la solution la plus générale de (21), pour n distinct de tout entier pair ≤ 0 :

$$(30) \quad E(t) = \frac{\lambda^{-\frac{n-1}{4} + \frac{1}{2}} \pi}{2^{\frac{n}{2}+1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \text{Pf. } t^{\frac{n-2}{4}} N_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda t}) + A \text{Pf. } t^{\frac{n-2}{4}} J_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda t})$$

où A est une constante arbitraire.

En particulier, dans R^n , compte tenu de ce que $S_n = \frac{2 \pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$,

la solution élémentaire la plus générale de $\Delta + \lambda$, invariante par rotation, est

$$(31) \quad E(x) = \frac{\lambda^{\frac{n-1}{4}}}{2^{\frac{n+1}{2}} \pi^{\frac{n-1}{2}}} \frac{1}{r^{\frac{n-2}{2}}} N_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda} r) + \frac{C}{r^{\frac{n-2}{2}}} J_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda} r)$$

où C est une constante arbitraire ; n entier ≥ 1 .