

SÉMINAIRE SCHWARTZ

L. SCHWARTZ

L'espace $L^p(\mu)$ associé à une famille de mesures ($1 \leq p < \infty$)

Séminaire Schwartz, tome 1 (1953-1954), exp. n° 5, p. 1-5

http://www.numdam.org/item?id=SLS_1953-1954__1__A6_0

© Séminaire Schwartz

(Secrétariat mathématique, Paris), 1953-1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schwartz » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

L'ESPACE $L^p_{(\mu)}$ ASSOCIÉ À UNE FAMILLE DE MESURES ($1 \leq p < \infty$)

Soit $(\mu) = \{\mu_\alpha\}_{\alpha \in A}$ une famille filtrante de mesures sur le même espace localement compact X . À toute fonction numérique, associons les quantités

$$N_{p, \mu_\alpha}(f) = \left[\int^* |f(x)|^p d\mu_\alpha(x) \right]^{1/p}$$

Soit $\mathcal{L}^p_{(\mu)}$ l'adhérence de $C(X)$ dans l'espace vectoriel des fonctions vérifiant $N_{p, \mu_\alpha}(f) < \infty$ pour tout α , muni des semi-normes N_{p, μ_α} . Pour que $f \in \mathcal{L}^p_{(\mu)}$ il faut et il suffit que $f \in \mathcal{L}^p_{(\mu_\alpha)}$ pour chaque μ_α . On a donc $\mathcal{L}^p_{(\mu)} = \bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{L}^p_{(\mu_\alpha)}$. $L^p_{(\mu)}$ sera le quotient de $\mathcal{L}^p_{(\mu)}$ par le sous-espace fermé des f vérifiant $N_{p, \mu_\alpha}(f) = 0$ pour tout α c'est-à-dire nulles (μ) -presque-partout (on dira (μ) -presque-partout pour (μ_α) -presque-partout pour tout α)⁽¹⁾.

$L^p_{(\mu)}$ est complet si la famille $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ est dénombrable,

$L^p_{(\mu)}$ est alors un Fréchet.

On pourra définir de la même façon $L^p_{(\mu)}(E)$, (E étant un E.V.T. localement convexe) et son complété $\hat{L}^p_{(\mu)}(E)$. On a alors les résultats suivants :

THÉORÈME - Soit X et Y deux espaces localement compacts, (μ) et (ν) deux familles de mesures sur X et Y , $(\mu \times \nu)$ la famille des mesures produits $\mu_\alpha \otimes \nu_\beta$ sur $X \times Y$. On a les isomorphismes suivants :

$$\hat{L}^p_{(\mu)}(\hat{L}^p_{(\nu)}) \approx \hat{L}^p_{(\nu)}(\hat{L}^p_{(\mu)}) \approx \hat{L}^p_{(\mu \times \nu)}$$

THÉORÈME - $L^1_{(\mu)} \hat{\otimes} E = \hat{L}^1_{(\mu)}(E)$. En particulier (avec les notations du théorème précédent) :

$$L^1_{(\mu)} \hat{\otimes} L^1_{(\nu)} = \hat{L}^1_{(\mu \times \nu)}$$

THÉORÈME - Pour tout espace localement convexe V séparé complet, il

(1) - Remarquer que l'on n'a pas $L^p_{(\mu)} = \bigcap_{\alpha \in A} L^p_{(\mu_\alpha)}$, ce dernier terme n'ayant pas de sens.

existe un espace localement compact X et une famille (μ) de mesures sur X tels que V soit isomorphe à un quotient de $L^1_{(\mu)}$.

Démonstration - Soit I l'ensemble $\{0\}$ dans V , muni de la topologie discrète (donc localement compacte) et $i \rightarrow x_i$ l'application identique de I dans E . Sur I une mesure est déterminée par la donnée de la masse $\mu(i) \geq 0$ de chaque point. Soit alors $\{p_\alpha\}$ une famille filtrante de semi-normes définissant la topologie de V , et soit (μ) la famille de mesures définies par $\mu_\alpha(i) = p_\alpha(x_i)$. La famille (μ) est filtrante et la réunion des supports des mesures (μ) est I puisque pour tout $x \neq 0$ il existe α tel que $p_\alpha(x) \neq 0$.

Considérons l'espace $l^1_{(\mu)}(I)$, espace des fonctions $\lambda : i \rightarrow \lambda(i)$, telles que $\sum_i |\lambda(i)| \mu_\alpha(i) = \sum_i |\lambda(i)| p_\alpha(x_i) < \infty$ pour tout α . Soit d'autre part $\overline{\omega}$ l'application linéaire $\lambda \rightarrow \sum_i \lambda(i) \vec{x}_i$. Cette application est bien définie, car toutes les séries $\sum_i p_\alpha[\lambda(i) \vec{x}_i] = \sum_i |\lambda(i)| p_\alpha(x_i)$ sont sommables, autrement dit la série $\sum_i \lambda(i) \vec{x}_i$ est absolument sommable, donc sommable puisque V est complet. On a alors :

A. $\overline{\omega}$ est continue. Très exactement pour tout α , on a

$$p_\alpha(\overline{\omega}(\lambda)) \leq \sum_i |\lambda(i)| \mu_\alpha(i) = N_{1; \mu_\alpha}(\lambda).$$

B. $\overline{\omega}$ est épijective. Il suffit de montrer que tout $x \neq 0$ est l'image d'un λ . Or soit i tel que $x_i \neq x$ et λ tel que $\lambda(i) = +1$ et $\lambda(j) = 0$ pour $j \neq i$. On a $\overline{\omega}(\lambda) = x$.

C. $\overline{\omega}$ est un épimorphisme. Il suffit de montrer que l'image de la semi-boule $\sum_i |\lambda(i)| \mu_\alpha(i) < 1$ de $l^1_{(\mu)}(I)$ est la semi-boule $p_\alpha(x) < 1$ ⁽¹⁾, c'est-à-dire que tout x avec $p_\alpha(x) < 1$ est l'image d'un $\lambda \in l^1_{(\mu)}(I)$ tel que $N_{1; \mu_\alpha}(\lambda) < 1$. Ceci découle de la construction faite en B.

REMARQUE - Pour tout $x \in V$, on a $p_\alpha(x) = \inf N_{1; \mu_\alpha}(\lambda)$, pour $\overline{\omega}(\lambda) = x$. Donc p_α est la semi-norme quotient de la semi-norme $N_{1; \mu_\alpha}$. En particulier, si V est un Banach, c'est un quotient d'un

(1) - Rappelons que la famille (p_α) est filtrante. Les semi-boules forment donc un système fondamental de voisinages.

espace L^1 par rapport à une famille réduite à une mesure μ unique et la norme de V est la norme quotient.

THEOREME - Si E et F sont des Fréchet, tout $u \in E \hat{\otimes} F$ admet une représentation de la forme $u = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \otimes y_n$ avec $x_n \rightarrow 0$ (dans E), $y_n \rightarrow 0$ dans F et $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| < \infty$.

Si l'on se donne 2 semi-normes p_0 et q_0 sur E et F , et $\varepsilon > 0$, on peut choisir les suites $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ telles que $p_0(x_n) \leq 1$, $q_0(y_n) \leq 1$ et

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \leq p_0 \otimes q_0(u) + \varepsilon$$

Si u reste sur un compact de $E \hat{\otimes} F$ on peut laisser fines les suites $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ et $\{\lambda_n\}$ parcourt un compact de l^1 .

Démonstration.

A. Notations -

Soit $\{p_\alpha\}$ (resp. $\{q_\beta\}$) une famille filtrante de semi-normes sur E (resp. F). Pour tout $\gamma = (\alpha, \beta)$, nous écrirons désormais p_γ et q_γ au lieu de p_α et q_β . La famille de semi-normes $\{p_\gamma \otimes q_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ constitue une famille filtrante de semi-normes sur $E \hat{\otimes} F$, définissant la topologie de $E \hat{\otimes} F$. Soit $I = \{0\}$ dans E , $J = \{0\}$ dans F (munis de la topologie discrète) et $K = I \times J$, $i \rightarrow x_i$ et $j \rightarrow y_j$ les applications canoniques de I dans E et de J dans F . Nous appellerons k un élément (i, j) de K , donc $k \rightarrow x_k$ et $k \rightarrow y_k$ les applications canoniques $k \rightarrow x_i$ et $k \rightarrow y_j$. A tout $\gamma \in \Gamma$ correspond une mesure μ_γ sur I définie par $\mu_\gamma(i) = p_\gamma(x_i)$, une mesure ν_γ sur J définie par $\nu_\gamma(j) = q_\gamma(y_j)$ et une mesure $\rho_\gamma = \mu_\gamma \times \nu_\gamma$ sur K ($\rho_\gamma(k) = \mu_\gamma(x_k) \nu_\gamma(y_k)$). Désignons par (μ) , (ν) , (ρ) , les familles de mesures (μ_γ) , (ν_γ) , (ρ_γ) ; soit ϖ_1 l'application de $l^1_{(\mu)}(I)$ sur E définie par

$$\varpi_1(\mu^{(1)}) = \sum_{i \in I} \lambda^{(1)}(i) x_i$$

et ϖ_2 l'application de $l^1_{(\nu)}(J)$ sur F définie par

$$\varpi_2(\lambda^{(2)}) = \sum_{j \in J} \lambda^{(2)}(j) y_j$$

Construisons l'espace $l^1_{(\rho)}(K)$. C'est un espace de Fréchet qui

s'identifie à $l^1_{(\mu)}(I) \hat{\otimes} l^1_{(\nu)}(J)$. De plus $N_{1, p_\gamma} = N_{1, \mu_\gamma} \otimes N_{1, \nu_\gamma}$ (produit tensoriel des semi-normes).

Soit alors φ l'application linéaire de $l^1_{(\rho)}(K)$ dans $E \hat{\otimes} F$ définie par

$$\varphi(\lambda) = \sum_{k \in K} \lambda(k) x_k \otimes y_k.$$

Cette application est bien définie, car pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a

$$\sum_{k \in K} |\lambda(k)| p_\gamma \otimes q_\gamma (x_k \otimes y_k) = \sum_{k \in K} |\lambda(k)| p_\gamma(x_k) q_\gamma(y_k) = \sum_{k \in K} |\lambda(k)| p_\gamma(k) < \infty$$

et dans $E \hat{\otimes} F$ qui est complet toute série absolument sommable est sommable. Pour $u = \varphi(\lambda)$, on a

$(p_\gamma \otimes q_\gamma)(u) \leq \sum_{k \in K} |\lambda(k)| p_\gamma(x_k) q_\gamma(y_k) \leq N_{1, p_\gamma}(\lambda)$
donc φ est continue.

B. $\varphi = \overline{\omega}_1 \hat{\otimes} \overline{\omega}_2$.

Il suffit de vérifier que la restriction de φ à $l^1_{(\mu)}(I) \hat{\otimes} l^1_{(\nu)}(J)$ est identique à $\overline{\omega}_1 \otimes \overline{\omega}_2$, c'est-à-dire que

$$\varphi(\lambda^{(1)} \otimes \lambda^{(2)}) = \overline{\omega}_1 \lambda^{(1)} \otimes \overline{\omega}_2 \lambda^{(2)}, \text{ ce qui est trivial car}$$

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda^{(1)} \otimes \lambda^{(2)}) &= \sum_{k \in K} \lambda^{(1)}(i) \lambda^{(2)}(j) x_i \otimes y_j = \\ &= \left(\sum_{i \in I} \lambda^{(1)}(i) x_i \right) \otimes \left(\sum_{j \in J} \lambda^{(2)}(j) y_j \right) \end{aligned}$$

(en vertu de la continuité de l'application canonique de $E \times F$ dans $E \otimes F$)

$$= \overline{\omega}_1 \lambda^{(1)} \otimes \overline{\omega}_2 \lambda^{(2)}.$$

C. φ est un épimorphisme

En effet $\overline{\omega}_1$ et $\overline{\omega}_2$ sont des épimorphismes et E et F étant des Fréchet $\overline{\omega}_1 \hat{\otimes} \overline{\omega}_2$ est un épimorphisme.

D. Pour tout $u \in E \hat{\otimes} F$ tout $\gamma \in \Gamma$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\lambda \in l^1_{(\rho)}(K)$ tel que
 $(p_\gamma \otimes q_\gamma)(u) \geq N_{1, p_\gamma}(\lambda) - \varepsilon$

En effet p_γ (resp. q_γ) n'est autre que la semi-norme quotient

dans l'enveloppe équilibrée fermée du produit tensoriel de deux compacts.

Application. - Soit G un E.V.T. complet. L'isomorphisme de $B(E, F; G)$ sur $L(\widehat{E \otimes F}, G)$ est un isomorphisme topologique si l'on met sur $B(E, F; G)$ la topologie de la convergence uniforme sur les produits de compacts, et sur $L(\widehat{E \otimes F}, G)$ la topologie de la convergence compacte.

La propriété n'est plus vraie en général si on remplace "compact" par "borné". Elle reste cependant vraie si E et F sont des Banach, car la boule unité ouverte de $\widehat{E \otimes F}$ est alors l'enveloppe équilibrée convexe du produit des deux boules unités ouvertes de E et F .
