

SÉMINAIRE SCHWARTZ

L. SCHWARTZ

Opérations algébriques sur les distributions à valeur vectorielle. Théorème de Künneth

Séminaire Schwartz, tome 1 (1953-1954), exp. n° 24, p. 1-6

http://www.numdam.org/item?id=SLS_1953-1954__1__A25_0

© Séminaire Schwartz

(Secrétariat mathématique, Paris), 1953-1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schwartz » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Dernier exposé (n° 24)

OPÉRATIONS ALGÈBRIQUES SUR LES DISTRIBUTIONS
À VALEUR VECTORIELLE - THÉOREME DE KÜNNETH

Pour simplifier, E et F seront des Banach.

1.- Définition directe de $\langle T \otimes \varphi \rangle \in E \hat{\otimes}_{\pi} F$ pour
 $T \in \mathcal{D}'(E)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(F)$.

Fig (1)

$$\begin{array}{ccc} \vec{\varphi} \in \mathcal{D} \hat{\otimes}_{\pi} F & & \\ \vec{T} \downarrow & & \downarrow 1 \\ E \hat{\otimes}_{\pi} F & & \end{array}$$

On peut définir l'application $\varphi \rightarrow \langle T \otimes \varphi \rangle$ de $\mathcal{D} \hat{\otimes}_{\pi} F$ dans $E \hat{\otimes}_{\pi} F$ comme étant le produit tensoriel $\vec{T} \otimes 1_F$ de l'application $\vec{T}$ de $\mathcal{D}$ dans E et de l'application identique de F dans F . Par suite $\langle T \otimes \varphi \rangle \rightarrow 0$ si $\varphi \rightarrow 0$ dans $\mathcal{D}(F)$ et si T reste dans un ensemble équicontinu de $\mathcal{L}(\mathcal{D}, E)$ c'est-à-dire si T reste borné dans $\mathcal{D}'(E)$.

Fig (2)

$$\begin{array}{ccc} \vec{T} \in \mathcal{D}' \hat{\otimes}_{\pi} E & & \\ \vec{\varphi} \downarrow & & \downarrow 1 \\ F & & E \end{array}$$

On peut également écrire $\varphi \in \mathcal{D}(F) = \mathcal{L}(\mathcal{D}'_0, F) = \mathcal{L}(\mathcal{D}', F)$ et $T \in \mathcal{D}' \hat{\otimes}_{\pi} E$. L'application $T \rightarrow \langle T \otimes \varphi \rangle$ est alors le produit tensoriel $1_E \otimes \vec{\varphi}$ de l'application

$U \rightarrow \langle U, \varphi \rangle$ de $\mathcal{D}'$ dans F et de l'application identique de E dans E . Par suite $\langle T \otimes \varphi \rangle \rightarrow 0$ si $T \rightarrow 0$ dans $\mathcal{D}'(E)$ et si φ reste dans un ensemble équicontinu de $\mathcal{L}(\mathcal{D}', F)$ c'est-à-dire si φ reste bornée dans $\mathcal{D}(F)$. On vérifiera que ces deux définitions sont équivalentes en prenant pour T et φ respectivement des éléments décomposables de $\mathcal{D}' \hat{\otimes}_{\pi} E$ et de $\mathcal{D} \hat{\otimes}_{\pi} F$; elles permettent (dans une certaine mesure!) d'écrire

$$\langle \vec{T} \otimes \vec{\varphi} \rangle = (\vec{T} \otimes 1)(\vec{\varphi}) = (1 \otimes \vec{\varphi})(T)$$

2. - Produit multiplicatif

Pour $\vec{\alpha} \in \mathcal{E}'(F)$ et $\vec{T} \in \mathcal{D}'(E)$ on définira $\alpha \otimes T$ (produit multiplicatif) $\in \mathcal{D}'(E \hat{\otimes}_{\mathcal{K}} F)$ par

$$\langle \alpha \otimes T, \varphi \rangle = \langle T, \alpha \varphi \rangle$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{D}$

3. Produit direct

Soit $\mathcal{S}_x \in \mathcal{D}'_x(E)$, $T_y \in \mathcal{D}'_y(F)$

En écrivant $\mathcal{S}_x \in \mathcal{D}'_x \hat{\otimes}_{\mathcal{K}} E$, $T_y \in \mathcal{D}'_y \hat{\otimes}_{\mathcal{K}} F$, on définit immédiatement $\mathcal{S}_x \hat{\otimes}_{\mathcal{K}} T_y \in \mathcal{D}'_x \hat{\otimes}_{\mathcal{K}} E \hat{\otimes}_{\mathcal{K}} \mathcal{D}'_y \hat{\otimes}_{\mathcal{K}} F$
 $= \mathcal{D}'_{xy} \hat{\otimes}_{\mathcal{K}} (E \hat{\otimes}_{\mathcal{K}} F) = \mathcal{D}'_{xy} (E \hat{\otimes}_{\mathcal{K}} F)$

On pourra vérifier que l'on a

$$\langle \mathcal{S}_x \hat{\otimes}_{\mathcal{K}} T_y, u(x)v(y) \rangle = \langle \mathcal{S}_x, u(x) \rangle \otimes_{\mathcal{K}} \langle T_y, v(y) \rangle$$

pour $u(x) \in \mathcal{D}_x$, $v(y) \in \mathcal{D}_y$, et plus généralement

$$\langle \mathcal{S}_x \hat{\otimes}_{\mathcal{K}} T_y, u(x) \otimes v(y) \rangle = \langle \mathcal{S}_x, u(x) \rangle \otimes_{\mathcal{K}} \langle T_y, v(y) \rangle$$

si $u(x) \in \mathcal{D}_x(G)$ et $v(y) \in \mathcal{D}_y(H)$

4.- Convolution

Pour $\mathcal{S} \in \mathcal{E}'(E)$ et $T \in \mathcal{D}'(F)$, on peut définir

$\mathcal{S} \hat{*} T \in \mathcal{D}'(E \hat{\otimes}_{\mathcal{K}} F)$ par

$$\langle \mathcal{S} \hat{*} T, \varphi \rangle = \langle \mathcal{S} \hat{\otimes}_{\mathcal{K}} T, \varphi(\xi + \eta) \rangle$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{D}$.

Autre méthode

On définit d'abord $\vec{\mathcal{S}} * T \in \mathcal{D}'(E)$ pour $\vec{\mathcal{S}} \in \mathcal{E}'(E)$ et $T \in \mathcal{D}'$ en définissant l'application $\vec{\mathcal{S}} \rightarrow \vec{\mathcal{S}} * T$ de $\mathcal{E}'(E) = \mathcal{E}' \hat{\otimes}_{\mathcal{K}} E$ dans $\mathcal{D}'(E) = \mathcal{D}' \hat{\otimes}_{\mathcal{K}} E$ comme le produit tensoriel de l'application $U \rightarrow U * T$ de $\mathcal{E}'$ dans $\mathcal{D}'$ et de l'application identique de E dans E .

On vérifie alors que $T \rightarrow \vec{S} * T$ est continue de $\mathcal{D}'$ dans $\mathcal{E}'(E)$ (on vérifie même que $(\vec{S}, T) \rightarrow \vec{S} * T$ est hypocontinue relativement aux parties bornées)

Puis on définit de même l'application $\vec{T} \rightarrow \vec{S} * \vec{T}$ de $\mathcal{D}'(F) = \mathcal{D}' \otimes_{\pi} F$ dans $\mathcal{D}'(E \hat{\otimes}_{\pi} F) = \mathcal{D}'(E) \hat{\otimes}_{\pi} F$ comme le produit tensoriel de l'application $U \rightarrow \vec{S} * U$ de $\mathcal{D}'$ dans $\mathcal{D}'(E)$ et de l'application identique de F dans F .

La même méthode de définition s'applique si $\vec{S} \in \mathcal{D}'_0(E)$ et $T \in \mathcal{S}'(F)$ et il y a échange par la transformation de Fourier entre la convolution et le produit multiplicatif.

5.- Théorème de Künneth

Soit E et F deux espaces vectoriels topologiques et sur E et F respectivement deux opérateurs de dérivation d' et d'' (opérateurs linéaires continus de carré nul).

$E \otimes_{\pi} F$ sera muni d'un opérateur continu de carré nul de la forme $d = d' \otimes 1 + \eta \otimes d''$ (1)

Soit $H(E) = Z(E) / B(E)$ le groupe d'homologie de E

$H(F) = Z(F) / B(F)$ le groupe d'homologie de F

$H(E \otimes_{\pi} F) = Z(E \otimes_{\pi} F) / B(E \otimes_{\pi} F)$ le groupe d'homologie de

$E \otimes_{\pi} F$

THEOREME.- Si E et F sont des espaces de Fréchet dont l'un est nucléaire, d' et d'' des homomorphismes topologiques, on a

$$H(E \otimes_{\pi} F) = H(E) \otimes_{\pi} H(F)$$

Exemple.- E et F sont les espaces des formes différentielles indéfiniment différentiables sur deux variétés V et W . E et F sont alors gradués et l'on prendra pour η l'opérateur multipliant la composante de degré n par $(-1)^n$, d' et d'' sont les différentiations extérieures sur V et W .

(1) On supposera $\eta d' + d' \eta = 0$ pour que d soit de carré nul, η étant un isomorphisme topologique de E sur lui-même.

Alors $E \hat{\otimes}_{\pi} F$ est l'espace des formes différentielles indéfiniment différentiables sur $V \times W$, d la différentiation extérieure. On voit que $H(E)$, $H(F)$, $H(E \hat{\otimes}_{\pi} F)$ sont les espaces vectoriels de cohomologie de V , W , $V \times W$. Ces espaces apparaissent comme munis de topologies (quotients), et $H(E \hat{\otimes}_{\pi} F)$ est le complété de $H(E) \otimes H(F)$

Remarque.— $H(E)$, $H(F)$ et $H(E \hat{\otimes}_{\pi} F)$ sont des Frechet car $Z(E)$, $Z(F)$ et $Z(E \hat{\otimes}_{\pi} F)$ sont des Frechet, $B(E)$, $B(F)$ et $B(E \hat{\otimes}_{\pi} F)$ sont fermés (car d' , d'' et d sont des homomorphismes topologiques) (rappelons que le quotient d'un Frechet par un sous-espace fermé est complet).

On démontrera d'abord le théorème dans le cas où $d'' = 0$ c'est-à-dire le lemme suivant

Lemme.— Si E et F sont des Frechet dont l'un est nucléaire, d' un homomorphisme topologique et $d = d' \otimes 1$, on a :

$$H(E \hat{\otimes} F) = H(E) \hat{\otimes} F$$

Démonstration.— On sait que si A et B sont des Frechet et si $C = B/A$ c'est-à-dire si on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} C \longrightarrow 0$$

on a également la suite exacte :

$$0 \longrightarrow A \hat{\otimes} F \xrightarrow{i \otimes 1} B \hat{\otimes} F \xrightarrow{\pi \otimes 1} C \hat{\otimes} F \longrightarrow 0$$

si B ou F est nucléaire.

En effet $A \hat{\otimes} F$ est un sous-espace topologique de $B \hat{\otimes} F$ (considérer le produit tensoriel comme le produit ε) et $C \hat{\otimes} F = B \hat{\otimes} F / A \hat{\otimes} F$ (considérer le produit tensoriel comme le produit π)

En appliquant cette remarque à la suite exacte

$$0 \longrightarrow Z(E) \xrightarrow{i} E \xrightarrow{d'} B(E) \longrightarrow 0$$

on obtient la suite exacte

$$0 \longrightarrow Z(E) \hat{\otimes} F \xrightarrow{i \otimes 1} E \hat{\otimes} F \xrightarrow{d' \otimes 1} B(E) \hat{\otimes} F \longrightarrow 0$$

Par suite $Z(E) \hat{\otimes} F$ est un sous-espace topologique de $E \hat{\otimes} F$ et est le noyau de l'application $d = d' \otimes 1$ d'où $Z(E) \hat{\otimes} F = Z(E \hat{\otimes} F)$

De plus $B(E) \hat{\otimes} F$ est l'image par d de $E \hat{\otimes} F$ donc

$$B(E \hat{\otimes} F) = B(E) \hat{\otimes} F$$

De même de la suite exacte

$$0 \rightarrow B(E) \rightarrow Z(E) \rightarrow H(E) \rightarrow 0$$

on tire :

$$0 \rightarrow B(E) \hat{\otimes} F \rightarrow Z(E) \hat{\otimes} F \rightarrow H(E) \hat{\otimes} F \rightarrow 0$$

d'où

$$H(E) \hat{\otimes} F = \frac{Z(E) \hat{\otimes} F}{B(E) \hat{\otimes} F} = \frac{Z(E \hat{\otimes} F)}{B(E \hat{\otimes} F)} = H(E \hat{\otimes} F)$$

Démonstration du théorème.-

De la suite exacte $0 \rightarrow Z(E) \xrightarrow{i} E \xrightarrow{d'} B(E) \rightarrow 0$, on déduit la suite exacte :

$$0 \rightarrow Z(E) \hat{\otimes} F \xrightarrow{i \otimes 1} E \hat{\otimes} F \xrightarrow{d' \otimes 1} B(E) \hat{\otimes} F \rightarrow 0$$

Cette suite exacte est compatible avec l'opérateur d , c'est-à-dire que les homomorphismes de la suite commutent trivialement avec d . Remarquons qu'on a $Z(E \hat{\otimes} F) \subset E \hat{\otimes} F$ et $B(E) \hat{\otimes} F \subset Z(E) \hat{\otimes} F$. On en déduit donc la suite exacte :

$$\begin{array}{ccc} H(ZE \hat{\otimes} F) & \rightarrow & H(E \hat{\otimes} F) \\ & \searrow \partial & \swarrow \\ & H(B(E) \hat{\otimes} F) & \end{array}$$

L'opérateur bord ∂ est défini comme suit.

Si $0 \rightarrow A \xrightarrow{j} B \xrightarrow{\pi} C \rightarrow 0$ est une suite exacte compatible avec un homomorphisme d (j est l'immersion de A dans B , π la projection de B sur B/A), on a la suite exacte :

$$\begin{array}{ccc} H(A) & \xrightarrow{j} & H(B) \\ & \searrow \partial & \swarrow \pi \\ & H(B/A) = H(C) & \end{array}$$

∂ est ainsi défini. Soit $\alpha \in H(B/A)$. Soit $\beta \in Z(B/A)$ dont la classe mod. $B(B/A)$ est α . On a $\beta \in B/A$. Donc il existe $\gamma \in B$ tel que $\pi \gamma = \beta$ et comme $\beta \in Z(B/A)$, $d\gamma \in A$. $\partial\alpha$ est la classe de $d\gamma$ dans $H(A)$. On applique ce résultat général en remplaçant A, B, C, γ, π par

$$\begin{array}{ll} A & ZE \hat{\otimes} F \\ B & E \hat{\otimes} F \\ C & BE \hat{\otimes} F \\ j & i \otimes 1 \\ \pi & d' \otimes 1 \\ d & d' \otimes 1 + \gamma \times d'' \end{array}$$

L'homomorphisme ∂ est ainsi défini.

Soit $\alpha \in H(B(E) \hat{\otimes} F)$. Choisir $\beta \in Z(B(E) \hat{\otimes} F)$ tel que l'image de β par l'application canonique de $Z(B(E) \hat{\otimes} F)$ sur $H(B(E) \hat{\otimes} F)$ soit α .
 Considérant que $\beta \in B(E) \hat{\otimes} F$, il existe $\gamma \in E \hat{\otimes} F$ tel que $(d' \otimes 1)\gamma = \beta$.
 Comme $\beta \in Z(B(E) \hat{\otimes} F)$, on a $d_\gamma \in Z(E) \hat{\otimes} F$. $\partial\alpha$ est la classe de d_γ dans $H(Z(E) \hat{\otimes} F)$.

Dans le cas présent, on a les particularités suivantes :

a) $H(Z(E) \hat{\otimes} F) = Z(E) \hat{\otimes} H(F)$ (d'après le Lemme car $d' = 0$ sur $Z(E)$ donc $d = \gamma \otimes d''$).

b) $H(B(E) \hat{\otimes} F) = B(E) \hat{\otimes} H(F)$ (idem) et par suite :
 $H(B(E) \hat{\otimes} F) \subset H(Z(E) \hat{\otimes} F)$

c) β peut être pris dans $B(E) \hat{\otimes} Z(F)$ car
 $\beta \in Z(B(E) \hat{\otimes} F) = B(E) \hat{\otimes} Z(F)$

Alors on peut choisir $\gamma \in E \hat{\otimes} ZF$

d) On a $d_\gamma = \beta$ car $d_\gamma = (d' \otimes 1 + \gamma \otimes d'')\gamma = \beta + (\gamma \otimes d'')\gamma$ et
 $(\gamma \otimes d'')\gamma = 0$ d'après c)

On a d'ailleurs bien $B(E) \hat{\otimes} Z(F) \subset Z(E) \hat{\otimes} F$.

e) Alors $\partial\alpha$, classe de β dans $H(Z(E) \hat{\otimes} F) = Z(E) \hat{\otimes} H(F)$, n'est autre que α lui-même ; α est bien dans $B(E) \hat{\otimes} H(F) \subset Z(E) \hat{\otimes} H(F)$
 Ainsi ∂ est l'immersion canonique de $B(E) \hat{\otimes} H(F)$ dans $Z(E) \hat{\otimes} H(F)$.

f) ∂ étant biunivoque c'est-à-dire de noyau nul, l'application
 $H(E \hat{\otimes} F) \rightarrow H(B(E) \hat{\otimes} F)$ est nulle c'est-à-dire a pour noyau
 $H(E \hat{\otimes} F)$ donc $H(Z(E) \hat{\otimes} F) \rightarrow H(E \hat{\otimes} F)$ est un épimorphisme.

g) Par suite $H(E \hat{\otimes} F) = H(Z(E) \hat{\otimes} F) / H(B(E) \hat{\otimes} F)$
 $= Z(E) \hat{\otimes} H(F) / B(E) \hat{\otimes} H(F)$
 $= H(E) \hat{\otimes} H(F)$

C.Q.F.D.
