

SÉMINAIRE SCHWARTZ

L. SCHWARTZ

Distributions à valeurs vectorielles

Séminaire Schwartz, tome 1 (1953-1954), exp. n° 20, p. 1-6

http://www.numdam.org/item?id=SLS_1953-1954__1__A21_0

© Séminaire Schwartz

(Secrétariat mathématique, Paris), 1953-1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schwartz » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Exposé n° 20

DISTRIBUTIONS A VALEURS VECTORIELLES

-:-:-

Dans cet exposé, E désignera un ~~espace~~ vectoriel localement convexe complet. Le problème est d'associer à tout espace de distributions $\mathcal{H}'$ un espace de distributions $\mathcal{K}'(E)$ à valeurs dans E .

1.- Définition de $\mathcal{D}'^m(E)$.

On posera $\mathcal{D}'^m(E) \approx \mathcal{L}(\mathcal{D}^m, E)$ et en particulier $\mathcal{D}'(E) = \mathcal{L}(\mathcal{D}, E)$ une distribution à valeurs dans E est une application linéaire continue de $\mathcal{D}$ dans E . Elle est d'ordre $\leq m$, si elle se prolonge en une application continue de $\mathcal{D}^m$ dans E , c'est-à-dire si elle est continue pour la topologie induite sur $\mathcal{D}$ par $\mathcal{D}^m$.

On munira $\mathcal{D}'^m(E)$ d'une $\mathcal{C}$ -topologie, définie par une famille de parties bornées de $\mathcal{D}^m$. Nous prendrons pour $\mathcal{C}$ les parties compactes de $\mathcal{D}^m$ et poserons donc $\mathcal{D}'^m_c(E) \approx \mathcal{L}_c(\mathcal{D}^m, E)$ (Pour $m = \infty$, cette topologie coïncide avec la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de $\mathcal{D}$).

PROPOSITION.— On a les isomorphismes algébriques et topologiques :

$$\mathcal{D}'^m_c(E) \approx \mathcal{L}_c(\mathcal{D}^m, E) \approx \mathcal{L}_\varepsilon(E'_c, \mathcal{D}'^m_c) \approx \mathcal{D}'^m_c \hat{\otimes}_\varepsilon E$$

Démonstration.— Le premier isomorphisme est une définition. Le deuxième est un isomorphisme universel obtenu par transposition. Le troisième découle du fait que $\mathcal{D}'^m_c$ possède la propriété d'approximation (et ceci, par transposition, parce que $\mathcal{D}^m$ la possède, et que $\mathcal{L}_c(\mathcal{D}_m; \mathcal{D}_m) \approx \mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{D}'^m_c; \mathcal{D}'^m_c) \approx \mathcal{L}_c(\mathcal{D}'^m_c; \mathcal{D}'^m_c)$, voir page 4).

2.- Différentes définitions de $\mathcal{K}'(E)$.

$\mathcal{K}'$ est un espace de distributions qui pourra ou non être le dual d'un espace $\mathcal{K}$.

A).- Définitions naturelles.

Premier exemple : $\mathcal{L}'(E)$. On peut définir le support d'une distribution $\in \mathcal{D}'(E)$ et par suite les distributions à valeurs dans E , à support compact. Pour définir une topologie sur $\mathcal{L}'^m(E)$ on posera

$$\mathcal{L}'^m(E) = \bigcup_K \mathcal{L}'^m_K(E)$$

$\mathcal{L}'^m_K(E)$ (espace des distributions d'ordre $\leq m$, à support dans K) sera muni de la topologie induite par $\mathcal{D}'^m(E)$ lui-même muni d'une $\mathcal{G}$ -topologie et $\mathcal{L}'^m(E)$ de la topologie limite inductive des précédentes. (Rappelons que si $m = \infty$, on peut remplacer la convergence compacte par la convergence bornée).

Deuxième exemple : $L^p(E)$ est l'espace des fonctions à valeurs dans E de puissance p -ième absolument sommable.

B).- Cas où $\mathcal{H}'$ est le dual d'un espace $\mathcal{H}$.

On pourra alors poser $\mathcal{H}'(E) = \mathcal{L}(\mathcal{H}, E)$. A toute $\mathcal{G}$ -topologie sur $\mathcal{H}'$ (topologie de la convergence uniforme sur un ensemble de parties de $\mathcal{H}$), correspondra une topologie analogue sur $\mathcal{H}'(E)$. En particulier à la topologie forte de $\mathcal{H}'$, correspondra la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de $\mathcal{H}$.

C).- Espace des distributions scalairement dans $\mathcal{H}'$ ou $\tilde{\mathcal{H}}'(E)$.

A tout $e' \in E'$ faisons correspondre la distribution scalaire $T_{e'} = \langle \vec{T}, \overleftarrow{e'} \rangle$ définie (pour $\varphi \in \mathcal{D}$) par

$$T_{e'}(\varphi) = \langle \vec{T}(\varphi), \overleftarrow{e'} \rangle$$

(L'application $e' \rightarrow T_{e'}$ est la transposée de l'application $\varphi \rightarrow T(\varphi)$). Une distribution T , à valeurs dans E , sera dite scalairement dans $\mathcal{H}'$ si $T_{e'} \in \mathcal{H}'$ pour tout $e' \in E'$. Autrement dit $T \in \tilde{\mathcal{H}}'(E)$ si $T_{e'} \in \mathcal{H}'$ pour tout $e' \in E'$, c'est-à-dire si l'application $e' \rightarrow T_{e'}$ continue de E'_c dans $\mathcal{D}'$ applique E' dans $\mathcal{H}'$ (sans condition de continuité).

On pourra munir $\tilde{\mathcal{H}}'(E)$ de la topologie de la convergence uniforme de $T_{e'}$ sur les parties équicontinues de E' , si cette topologie est compatible avec la structure d'espace vectoriel, c'est-à-dire si la condition suivante est satisfaite:

($\mathcal{E}$) L'image par l'application $e' \rightarrow T_{e'}$ de toute partie équicontinue de E' est une partie bornée de $\mathcal{H}'$.

D).- On peut préciser la définition précédente en ne considérant que les distributions T telles que l'application $e' \rightarrow T_{e'}$, (continue de E'_0 dans $\mathcal{D}'$) applique continûment E'_0 dans $\mathcal{K}'$ c'est-à-dire considérer l'espace $\mathcal{L}_\varepsilon(E'_0, \mathcal{K}')$. On a alors $\mathcal{L}_\varepsilon(E'_0, \mathcal{K}') \subset \tilde{\mathcal{K}}'(E)$ et si la condition (ε) est satisfaite la topologie de $\mathcal{L}_\varepsilon(E'_0, \mathcal{K}')$ est la topologie induite par $\tilde{\mathcal{K}}'(E)$.

3.- THÉOREME I.- Soit $\mathcal{K}' = \mathcal{K}'_0$ un espace de distribution dual d'un espace $\mathcal{K}$ et muni de la topologie de la convergence compacte. On suppose $\mathcal{D} \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{D}'$, les immersions étant continues, et $\mathcal{D}$ étant dense dans $\mathcal{K}$. On suppose que $\mathcal{K}$ induit sur $\mathcal{D}$ une topologie bornologique (ce qui sera réalisé en particulier si $\mathcal{K}$ est métrisable)⁽¹⁾ et enfin que $\mathcal{K}$ a la propriété d'approximation.

On a alors les isomorphismes algébriques et topologiques suivants :

$$\tilde{\mathcal{K}}'(E) \approx \mathcal{L}_0(\mathcal{K}, E) \approx \mathcal{L}_\varepsilon(E'_0, \mathcal{K}') \approx \mathcal{K}' \hat{\otimes}_E E$$

Exemples : $\mathcal{K}' = \mathcal{E}'^m, \mathcal{S}', \mathcal{D}^+, L^p_P (L^p \text{ dual de } L^p) (p \neq 1), (\mathcal{D}'_{L^p})_0, \mathcal{B}'$.

Démonstration.-

a) On a a priori $\tilde{\mathcal{K}}'(E) \supset \mathcal{L}_0(\mathcal{K}, E)$. On doit montrer que si l'application $e' \rightarrow T_{e'}$, applique E' dans $\mathcal{K}'$, l'application $\varphi \rightarrow T(\varphi)$ de $\mathcal{D}$ dans E est continue, si on munit $\mathcal{D}$ de la topologie induite par $\mathcal{K}$. Cette topologie étant bornologique il suffit de montrer que l'application $\varphi \rightarrow T(\varphi)$ applique tout borné de $\mathcal{D}$ dans un borné de E c'est-à-dire que (d'après Mackey, identité des parties bornées et faiblement bornées dans E), pour tout $e' \in E'$ (fixe), $\langle T(\varphi), e' \rangle$ reste borné lorsque φ parcourt un ensemble de $\mathcal{D}$, borné pour la topologie induite par $\mathcal{K}$. Or on a

$$\langle T(\varphi), e' \rangle = T_{e'}(\varphi)$$

Comme $T_{e'} \in \mathcal{K}'$, la propriété est vérifiée.

D'autre part $T \rightarrow 0$ dans $\mathcal{L}_0(\mathcal{K}, E)$, si $T(\varphi) \rightarrow 0$ dans E uniformément quand φ parcourt un compact de $\mathcal{K}$ et e' une partie équicontinue de E' . Comme $\langle T(\varphi), e' \rangle = T_{e'}(\varphi)$, ceci exprime que $T_{e'} \rightarrow 0$ dans $\mathcal{K}'_0$, uniformément si e' parcourt une partie équicontinue de E' , c'est-à-dire que $T \rightarrow 0$ dans $\tilde{\mathcal{K}}'(E)$.

b) Le deuxième isomorphisme est universel (transposition).

c) Le troisième isomorphisme est universel du moment que $\mathcal{K}'_0$ possède la

⁽¹⁾ - ce qui implique que $\mathcal{K}'$ soit complet.

propriété d'approximation c'est-à-dire si dans $\mathcal{L}_c(\mathcal{K}'_c, \mathcal{K}'_c)$, l'identité est approchable par des applications linéaires de rang fini.

Comme $\mathcal{D}$, muni de la topologie induite par $\mathcal{K}$ est bornologique, toute partie compacte de $\mathcal{L}_c(\mathcal{K}; \mathcal{K})$, équicontinue sur tout compact de $\mathcal{K}$ d'après Ascoli, est équicontinue sur $\mathcal{D}$ muni de la topologie induite par $\mathcal{K}$ donc sur $\mathcal{K}$. Alors $\mathcal{L}_c(\mathcal{K}'_c; \mathcal{K}'_c) = \mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K}'_c; \mathcal{K}'_c)$. Comme enfin $\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{K}'_c; \mathcal{K}'_c) \approx \mathcal{L}_c(\mathcal{K}; \mathcal{K})$ par transposition, la propriété d'approximation pour $\mathcal{K}'_c$ est équivalente à la même propriété pour $\mathcal{K}$.

4.- THÉOREME II.— Soit $\mathcal{K}'$ un espace de distributions ($\mathcal{K}' \subset \mathcal{D}'$, l'injection $\mathcal{K}' \rightarrow \mathcal{D}'$ étant continue) complet semi-Montel⁽¹⁾ (non nécessairement dual d'un espace $\mathcal{K}$), ayant la propriété d'approximation et tel qu'il existe des applications continues θ_i de $\mathcal{K}'$ dans des espaces $\mathcal{K}'_i$, prolongeables en des applications continues de $\mathcal{D}'$ dans $\mathcal{D}'$, de telle sorte que

a/ $\mathcal{K}$ ait la topologie limite projective définie par les applications θ_i

b/ Les espaces $\mathcal{K}'_i$ vérifient la condition (ε) .

Alors on a les isomorphismes algébriques et topologiques suivants :

$$\widetilde{\mathcal{K}'}(E) \approx \mathcal{L}_\varepsilon(E'_c, \mathcal{K}') \approx \mathcal{K}' \widehat{\otimes}_\varepsilon E$$

Exemples : $\mathcal{S}'(\Gamma)$ (théorie de la transformation de Laplace) (les applications θ_i sont les applications $T \rightarrow e^{-\xi \cdot T}$ de $\mathcal{S}'(\Gamma)$ dans $\mathcal{S}'$).

$\mathcal{O}'_c$ (les applications θ_i sont les applications $T \rightarrow QT$ de $\mathcal{O}'_c$ dans $\mathcal{B}'$, Q polynômes)

Rappelons que $\mathcal{S}'(\Gamma)$ et $\mathcal{O}'_c$ sont nucléaires, donc semi-Montel, et ont la propriété d'approximation.

Démonstration.

Soit $T \in \mathcal{D}'(E)$. Définissons $\theta_i T \in \mathcal{D}'(E)$ par $(\theta_i T)_{e'} = \theta_i(T_{e'})$ pour tout $e' \in E'$. Le 2° membre étant continu par rapport à $e' \in E'_c$ la formule définit bien $\theta_i T$ comme élément de $\mathcal{L}_\varepsilon(E'_c, \mathcal{D}')$. Si $T \in \mathcal{K}'(E)$ on a alors $\theta_i T \in \mathcal{K}'_i(E)$

(1) — C'est-à-dire tel que toute partie bornée fermée soit compacte. L'espace est un Montel si en outre il est tonnelé.

Montrons que l'hypothèse $(\mathcal{E})$ est vérifiée par $\tilde{\mathcal{K}}'(E)$ c'est-à-dire que si e' parcourt une partie équicontinue de E' $T_{e'}$ reste borné dans $\mathcal{K}'$. Ceci résulte du fait que pour tout i , $\theta_i T_{e'} = (\theta_i T)_{e'}$ reste bornée dans $\mathcal{K}'_i$ (hypothèse $(\mathcal{E})$ pour $\mathcal{K}'_i$) et de ce que la topologie de $\mathcal{K}'$ est limite projective de celles des $\mathcal{K}'_i$.

L'application $e' \rightarrow T_{e'}$ de E'_c dans $\mathcal{K}'$ applique donc tout équicontinu de E' dans un borné de $\mathcal{K}'$ c'est-à-dire dans un relativement compact et nous devons montrer qu'elle est continue. Composons l'application $e' \rightarrow T_{e'}$ avec l'identité dans $\mathcal{K}'$. Sur tout compact de $\mathcal{K}'$, cette application identique s'approche uniformément par une application continue de rang fini qu'on peut supposer être la restriction à $\mathcal{K}'$ d'une application de rang fini de $\mathcal{O}'$ dans $\mathcal{K}'$ (1). Par suite l'application $e' \rightarrow T_{e'}$ est approchable uniformément sur tout équicontinu de E' par le produit de l'application $e' \rightarrow T_{e'}$ continue de E'_c dans $\mathcal{O}'$ et d'une application continue de rang fini de $\mathcal{O}'$ dans $\mathcal{K}'$, c'est-à-dire par une application continue de E'_c dans $\mathcal{K}'$. Elle est donc adhérente à $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}(E'_c, \mathcal{K}')$. Comme $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}(E'_c, \mathcal{K}')$ est complet, cette application appartient à $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}(E'_c, \mathcal{K}')$. On a donc bien $\tilde{\mathcal{K}}'(E) \approx \mathcal{L}_{\mathcal{E}}(E'_c; \mathcal{K}')$.

Le deuxième isomorphisme découle du fait que $\mathcal{K}'$ possède la propriété d'approximation.

5.- Une application.

On a $\tilde{\mathcal{S}}'(E) = \mathcal{L}(\mathcal{S}, E)$. Une distribution U à valeurs dans E est donc tempérée si elle se prolonge en une application linéaire continue de $\mathcal{S}$ dans E , ou bien si pour tout $e' \in E'$, $U_{e'} \in \mathcal{S}'$. On peut alors définir sa transformée de Fourier $\mathcal{F}(U)$, qui est une distribution tempérée, par

(1) Soient en effet deux espaces localement convexes $(G \text{ et } H)$ et une injection continue de G dans H . Une application de rang fini u de G dans G définie par $ug = \sum \langle g, g'_i \rangle g_i$ ($g_i \in G$, $g'_i \in G'$) est approchable uniformément sur tout compact par des applications $\tilde{u}$ de H dans G de rang fini de la forme $\tilde{u}h = \sum \langle g, h'_i \rangle g_i$ ($h'_i \in H'$) en approchant les g'_i par les h'_i uniformément sur tout compact de G . C'est possible parce que, $G \rightarrow H$ étant injective, sa transposée applique H' sur un sous-espace faiblement dense de G' . Comme G'_c a pour dual G , un sous-espace faiblement dense de G' est aussi dense dans G'_c .

$$\mathcal{F}(U)(\varphi) = U(\mathcal{F}\varphi)$$

ou bien par $\mathcal{F}(U_{e'}) = (\mathcal{F}U)_{e'}$, pour tout $e' \in E'$.

Par exemple, soit $U_{x,y}$ une distribution à deux variables. Si $U_{x,y} \in \mathcal{S}'_x(\mathcal{O}'_y)$; U sera dite tempérée en x ; on peut définir sa transformée de Fourier $\mathcal{F}_x U_{x,y} \in \mathcal{S}'_\xi(\mathcal{O}'_y)$ par rapport à la variable x . On a $\mathcal{S}'_\xi(\mathcal{O}'_y) \subset \mathcal{O}'_\xi(\mathcal{O}'_y) = \mathcal{O}'_{\xi,y}$ (théorème des noyaux), $\mathcal{F}_x U_{x,y}$ est donc bien une distribution en ξ, y , tempérée en ξ .

Remarque.— On peut caractériser les éléments de $\mathcal{S}'_x(\mathcal{O}'_y)$ de la façon suivante : $U \in \mathcal{S}'_x(\mathcal{O}'_y)$ équivaut à : $U \cdot \varphi \in \mathcal{S}'_x$ pour tout $\varphi \in \mathcal{O}_y$, avec :

$$U \cdot \varphi = \int U_{x,y} \varphi(y) dy,$$

c'est-à-dire aussi à : $\langle U_{x,y}, \varphi(y) \psi(\xi-x) \rangle$ est à croissance lente en ξ pour tous $\varphi \in \mathcal{O}_y$ et $\psi \in \mathcal{O}_x$.

Supposons enfin $U_{x,y} \in \mathcal{S}'_{x,y}$; alors $U_{x,y} \in \mathcal{S}'_x \hat{\otimes} \mathcal{S}'_y$ (l'inclusion $\mathcal{S}'_{x,y} \subset \mathcal{L}(\mathcal{S}_x; \mathcal{S}'_y)$ est évidente. La réciproque résulte de ce que $\mathcal{S}$ est un Fréchet nucléaire. :

$\mathcal{L}(\mathcal{S}_x; \mathcal{S}'_y)$ est l'espace des formes bilinéaires sur $\mathcal{S}_x \times \mathcal{S}_y$ **hypocontinues** relativement aux parties bornées, donc continues, $\mathcal{S}_x$ et $\mathcal{S}_y$ étant des Fréchets; c'est donc le dual de $\mathcal{S}_x \hat{\otimes}_w \mathcal{S}_y \approx \mathcal{S}_x \hat{\otimes}_\varepsilon \mathcal{S}_y$ ($\mathcal{S}$ nucléaire) $\approx \mathcal{S}_{x,y}$, c'est donc $\mathcal{S}'_{x,y}$, de sorte que $\mathcal{F}_x U_{x,y}$ est dans $\mathcal{S}'_\xi(\mathcal{S}'_y) \approx \mathcal{S}'_y(\mathcal{S}'_\xi)$; on peut alors calculer $\mathcal{F}_y(\mathcal{F}_x U_{x,y}) \in \mathcal{S}'_\xi, \eta$, et l'on a

$$\mathcal{F}_{x,y} U_{x,y} = \mathcal{F}_y(\mathcal{F}_x U_{x,y}) = \mathcal{F}_x(\mathcal{F}_y U_{x,y})$$

parce que ces 3 opérations sont continues sur $\mathcal{S}'_x \hat{\otimes} \mathcal{S}'_y = \mathcal{S}'_{x,y}$ et qu'elles coïncident sur $\mathcal{S}'_x \otimes \mathcal{S}'_y$. La transformation de Fourier peut donc se faire

par plusieurs transformations de Fourier partielles dans un ordre arbitraire

On peut encore dire que $\mathcal{F}_{x,y}$, considérée comme application linéaire continue de $\mathcal{S}'_x \hat{\otimes} \mathcal{S}'_y$ dans $\mathcal{S}'_\xi \hat{\otimes} \mathcal{S}'_\eta$, est le produit tensoriel des applications

$\mathcal{F}_x(\mathcal{S}'_x \rightarrow \mathcal{S}'_\xi)$ et $\mathcal{F}_y(\mathcal{S}'_y \rightarrow \mathcal{S}'_\eta)$.