SÉMINAIRE SCHWARTZ

L. SCHWARTZ

Exemples d'espaces vérifiant la propriété d'approximation

Séminaire Schwartz, tome 1 (1953-1954), exp. n° 15, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SLS_1953-1954__1__A16_0>

© Séminaire Schwartz
(Secrétariat mathématique, Paris), 1953-1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schwartz » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Faculté des Sciences de Paris

Séminaire SCHWARTZ
Année 1953-1954

10 mars 1954

Exposé n° 15

EXEMPLES D'ESPACES VÉRIFIANT LA PROPRIÉTÉ D'APPROXIMATION.

RAPPEL. (Cf. Exposé n° 14). Un espace E vérifie la propriété d'approximation - en abrégé (A) - si l'application identique de E dans E peut être approchée uniformément sur tout compact de E par des applications de rang fini - i.e.

(1) pour tout $\mathcal{K}$ compact de E, V voisinage de 0 dans E, il existe $u \in E' \otimes E$ telle que $u \cdot x - x \in V$ pour tout $x \in \mathcal{K}$

REMARQUE PRÉLIMINAIRE.

Soit $\mathcal{F}$ un ensemble de $E' \otimes E \subset \mathcal{L}(E;E)$ - et supposons (ce qui sera souvent réalisé ci-après) que $\mathcal{F}$ soit équicontinu dans $\mathcal{L}(E;E)$. Alors si $1 \in \mathcal{L}(E;E)$ est adhérent à $\mathcal{F}$ pour la topologie de la convergence simple, (1) a lieu - (1) aura (même) lieu, si 1 est adhérent à $\mathcal{F}$ pour la topologie de la convergence simple sur un ensemble dense de E.

THÉORÈME 1.- Soit X un espace localement compact, μ une mesure $\geqslant 0$ sur X, L^p, $1 \leqslant p < \infty$ l'espace des classes de fonctions de puissance $p^{\text{ème}}$ μ-sommables sur X. L'espace L^p vérifie (A).

DÉMONSTRATION.

a) Fabrication de $\mathcal{F}$.

Soit (2) $X = K_1 \cup \ldots \cup K_n \cup H$, K_i, H sans points communs 2 à 2, K_i relativement compact pour $i = 1, \ldots, n$, $\mu(K_i) > 0$. Soit φ_i la fonction caractéristique de K_i. A chaque décomposition (2) de X, on associe l'opérateur

$$(3) \qquad f \longrightarrow u(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\int f \cdot \varphi_i \, dx}{\mu(K_i)} \cdot \varphi_i \quad ,$$

opérateur continu $L^p \longrightarrow L^p$, de rang fini, $\|u\| \leqslant 1$ (vérification facile).

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des u ; comme $\|u\| \leqslant 1$, cet ensemble est équicontinu.

b) Grâce à la remarque préliminaire, on est ramené à montrer ceci : soit C l'espace (dense) des fonctions continues à support compact ; on donne $f_1 \ldots f_k \in C$ et $\varepsilon > 0$; il existe $u \in \mathcal{F}$ avec

$$\|u(f_i) - f_i\|_{L^p} \leqslant \varepsilon \qquad \text{pour tout } i = 1, \ldots, k. \tag{4}$$

Or soit K un compact contenant les supports des f_i ; $H = \complement K$; on recouvre K par des $\{K_i\}_{i=1}^{n}$ tels que l'oscillation des f_j sur K_i soit $\leqslant \dfrac{\varepsilon}{(\mu(K))^{1/p}}$ soit u l'application (3) correspondant à la décomposition $X = K_1 \cup \ldots \cup K_n \cup H$.

Pour $x \in K_i$ on a :

$$\left|u(f_j)(x) - f_j(x)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{(\mu(K))^{1/p}}$$ - donc ceci pour tout $x \in X$, d'où (4) - C.Q.F.D.

THÉORÈME 2.- Soit X un espace compact, $C(X)$ l'espace des fonctions continues sur X, muni de la topologie de la convergence uniforme. L'espace $C(X)$ vérifie (A).

(Pour le cas, X non compact, Cf. Théorème 4 ci-après).

DÉMONSTRATION.

Soit $\{\alpha_i, \xi_i\}_{i=1}^{n}$ une partition de l'unité pointée (i.e. (α_i) = partition de l'unité, ξ_i choisi dans le support de α_i)

On prend pour $\mathcal{F}$ la famille des applications

$$\varphi \longrightarrow u(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i).\alpha_i$$

lorsque $\{\alpha_i, \xi_i\}$ varie. On a : $\|u\| \leqslant 1$ pour tout $u \in \mathcal{F}$.

On termine comme au b) du théorème 1.

COROLLAIRE 1.- Soit X, μ comme au théorème 1. L'espace L^∞ vérifie (A).

DÉMONSTRATION.

L^∞ est isomorphe à un espace $C(\tilde{X})$, $\tilde{X}$ compact - (Kakutani, ou bien : L^∞ algèbre (par multiplication) d'opérateurs de $L^2 \longrightarrow L^2$, $\tilde{X}$ = spectre de cette algèbre, et Gelfand).

COROLLAIRE 2.- Soit X localement compact, B(X) (ou $C^\infty(X)$) l'espace des fonctions continues bornées sur X, muni de la topologie de la convergence uniforme L'espace B(X) vérifie (A).

DÉMONSTRATION.

$\mathfrak{Z}(X)$ est isomorphe à un $C(\tilde{X})$, $\tilde{X}$ compact.

THÉORÈME 3.- Soit X compact ; l'espace $C'(X) = \mathcal{M}^1(X)$, dual fort de C(X), vérifie (A)

1ère DÉMONSTRATION.

C'(X) est isomorphe à un espace L^1 (Kakutani), donc corollaire du th. 1.

2ème DÉMONSTRATION.

a) Construction de $\mathcal{F}$ (voir exposé n° 13 - page 2).

Soit $\mu \geqslant 0$, $\in C'(X)$, $B(\mu)$ la bande engendrée par μ ; C'(X) est somme directe de $B(\mu)$ et de la bande supplémentaire $B'(\mu)$: pour tout $\nu \in C'(X)$ on a la décomposition unique

$$\nu = \nu_\mu + \nu'_\mu \ , \ \nu_\mu \in B(\mu) \ , \ \nu'_\mu \in B'(\mu) \text{ et}$$
$$\| \nu_\mu \| \leqslant \| \nu \| .$$

Mais $B(\mu)$ est isomorphe à $L^1(\mu)$ (X compact) ; soit $\mathcal{F}_\mu$ l'ensemble des opérateurs de rang fini, de norme $\leqslant 1$, construits dans le théorème 1 ; soit $\mathcal{F}_\mu$ encore les opérateurs correspondants dans $\mathcal{L}(B(\mu);B(\mu))$, de rang fini, norme $\leqslant 1$. Pour $v \in \mathcal{F}_\mu$ on désigne par $\tilde{v}$ l'application

$$\nu \longrightarrow \tilde{v}(\nu) = v(\nu_\mu) \ ;$$

$\tilde{v}$ est de rang fini $C'(X) \to C'(X)$, de norme $\leqslant 1$; disons que $\tilde{v}$ parcourt $\tilde{\mathcal{F}}_\mu$ si v parcourt $\mathcal{F}_\mu$. On désigne enfin par $\mathcal{F}$ l'ensemble des $\tilde{\mathcal{F}}_\mu$, lorsque $\mu \geqslant 0$ varie. L'ensemble $\mathcal{F}$ est équicontinu (norme $\leqslant 1$).

b) Par la remarque préliminaire, tout revient à ceci : soit $\mu_1, \dots, \mu_k$ données dans C'(X) et $\varepsilon > 0$ donné, trouver $u \in \mathcal{F}$ avec $\| u(\mu_i) - \mu_i \| \leqslant \varepsilon$, $i = 1, \dots, k$.

On sait qu'il existe $\mu \geqslant 0$ avec $\mu_i \in B(\mu)$, $i = 1, \dots, k$ ($\mu = \sum_i \mu_i$)
Comme $B(\mu) \approx L^1(\mu)$ il existe $v \in \mathcal{F}_\mu$ avec

$$\| v(\mu_i) - \mu_i \| \leqslant \varepsilon \ , \ i = 1, \dots, k \qquad \text{(théorème 1)}$$

Soit $\tilde{v}$ l'application $\in \tilde{\mathcal{F}}_\mu \subset \mathcal{F}$ correspondant à v ; on a :

$v(\mu_i) = \tilde{v}(\mu_i)$ d'où les inégalités voulues.

C.Q.F.D.

THÉORÈME 4.- Soit X localement compact, dénombrable à l'infini. L'espace C(X) des fonctions continues à support compact, muni de la topologie limite inductive naturelle, vérifie (A) .

DÉMONSTRATION.

On donne $\mathcal{H}$ compact de C(X) et V voisinage de 0 dans C(X) . On cherche $u \in \mathcal{L}(C(X);C(X))$, de rang fini, avec

(5) $\qquad u(\varphi) - \varphi \in V$ pour tout $\varphi \in \mathcal{H}$.

Mais $\mathcal{H}$ est compact dans $C_K(X)$ = sous-espace de C(X) formé des fonctions à support dans un compact K convenable (à ne pas confondre avec C(K)). Soit H un voisinage compact de K . Supposons que u opère de $\mathcal{H}$ dans $C_H(X)$. Alors (5) équivaut à :

(6) $\qquad |u(\varphi)(x) - \varphi(x)| \leqslant \varepsilon$ pour $x \in H$, $\varphi \in \mathcal{H}$ ($\varepsilon > 0$ convenable)

Or soit φ_H la restriction de $\varphi \in C(X)$ à H : $\varphi_H \in C(H)$; si φ parcourt $\mathcal{H}$, φ_H parcourt $\mathcal{H}_1$ compact de C(H) et il existe donc (théorème 2) $v \in \mathcal{L}(C(H);C(H))$, de rang fini, avec

(7) $\qquad |v.\varphi_H(x) - \varphi_H(x)| \leqslant \varepsilon$ pour $x \in H$, $\varphi \in \mathcal{H}_1$.

Mais l'application $\varphi \longrightarrow v.\varphi_H$ est de rang fini de C(X) dans C(H) , non de C(X) dans C(X) . Pour arranger cela, on introduit $\alpha \in C(X)$, $\alpha = 1$ dans K , à support dans H , $\alpha \leqslant 1$ partout ; l'application

(8) $\qquad \varphi \longrightarrow \alpha . v\varphi_H$ est continue de rang fini de C(X) dans C(X) et

$$|\alpha v\varphi_H(x) - \varphi(x)| \leqslant |v\varphi_H(x) - \varphi_H(x)| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour } x \in H , \varphi \in \mathcal{H} .$$

Si l'on prend pour u l'application (8) , on a (6) d'où le théorème.

THÉORÈME 5.- L'espace $\mathcal{D}_{R^n} = \mathcal{D}$ vérifie (A) .

(plus généralement , $\mathcal{D}_V$, V = variété indéfiniment différentiable, vérifie (A))

DÉMONSTRATION.

Soit $\mathcal{H}$ un compact de $\mathcal{D}$, V un voisinage de 0 dans $\mathcal{D}$. On cherche $u \in \mathcal{L}(\mathcal{D};\mathcal{D})$, de rang fini, avec

$$u(\varphi) - \varphi \in V \qquad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{H}.$$

Pour déterminer u on opère comme suit :

1°) On choisit $\rho \in \mathcal{D}$ avec

$$(\rho - \delta) * \mathcal{H} \subset \tfrac{1}{3}.V$$

(abus d'écriture clair)

2°) $\mathcal{H}$ est compact dans un espace $\mathcal{D}_K$, K compact de R^n. On choisit ε de sorte que si $\psi \in C(K)$, majoré par ε sur K, alors

$$\rho * \tilde{\psi} \in \tfrac{1}{2} \cdot V$$

($\tilde{\psi}$ prolongeant ψ par 0 hors de K)

3°) $\mathcal{H}$ est compact dans $C(K)$. Donc (théorème 2) on peut choisir v, $\in \mathcal{L}(C(K); C(K))$, de rang fini, avec

$$\| v.\varphi - \varphi \|_{C(K)} \leq \varepsilon \qquad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{H}.$$

Ceci posé, considérons l'application :

$$\varphi \longrightarrow \rho * (v\varphi_K)^{\sim}$$

de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}$, de rang fini. On peut la prendre pour u ; en effet, pour $\varphi \in \mathcal{H}$:

$$\rho * (v\varphi_K)^{\sim} - \varphi = \rho * (v\varphi_K - \varphi_K) + \rho * \varphi - \varphi,$$

et $\rho * \varphi - \varphi \in \frac{1}{2} V$ (1°), $|v\varphi_K - \varphi_K|$ majoré par ε sur K (3°) donc $\rho * (v\varphi - \varphi)^{\sim} \in \frac{1}{2} V$ (2°), donc $\rho * (v\varphi_K)^{\sim} - \varphi \in V$ d'où le théorème.

THÉORÈME 6.- On donne sur R^n un espace de distributions E : $\mathcal{D} \subset E \subset \mathcal{D}'$, les injections $\mathcal{D} \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{D}'$ étant continues. On fait les hypothèses :

(H_1) (existence de troncatures convenables). Si $\alpha \in \mathcal{D}$, $T \longrightarrow \alpha.T$ est une application continue de $E \longrightarrow E$; pour tout $\mathcal{H}$ compact de E et V voisinage de 0 dans E, il existe $\alpha \in \mathcal{D}$ avec

$$\alpha T - T \in V \qquad \text{pour tout } T \in \mathcal{H}.$$

(H_2) (existence de régularisations convenables). Pour $\alpha \in \mathcal{D}$ fixée et $\rho \in \mathcal{D}$ fixée, l'application $T \longrightarrow \rho * (\alpha T)$ est continue de $E \longrightarrow \mathcal{D}$; pour tout compact $\mathcal{H}$ de E et V voisinage de 0 dans E, et α fixée, il existe $\rho \in \mathcal{D}$ avec

$$\rho * (\alpha T) - \alpha T \in V \qquad \text{pour tout } T \in \mathcal{H}$$

CONCLUSION : E vérifie (A) .

DÉMONSTRATION.

Soit $\mathcal{K}$ compact de E , V voisinage de 0 . On choisit $\alpha \in \mathcal{D}$ avec

$$\alpha T - T \in \frac{1}{3} . V \quad \text{pour tout} \quad T \in \mathcal{K} \ (\alpha \text{ existe par } (H_1)).$$

On choisit $\rho \in \mathcal{D}$ avec

$$\rho * (\alpha T) - \alpha T \in \frac{1}{3} V \quad \text{pour tout} \quad T \in \mathcal{K} \ (\rho \text{ existe par } (H_2)) .$$

Comme $T \longrightarrow \rho * (\alpha T)$ est continue de $E \longrightarrow \mathcal{D}$, $\rho * \alpha T \in \mathcal{K}_1$ compact de $\mathcal{D}$ lorsque $T \in \mathcal{K}$; donc (théorème 5, V étant un voisinage de 0 dans $\mathcal{D}$) il existe $v \in \mathcal{D}' \otimes \mathcal{D}$ avec

$$v(\rho * \alpha T) - \rho * \alpha T \in \frac{1}{3} V \quad \text{pour tout} \quad T \in \mathcal{K} .$$

L'application $T \longrightarrow v(\rho * \alpha T)$, est continue de rang fini de $E \longrightarrow \mathcal{D}$, donc de $E \longrightarrow E$ et l'on a :

$$v(\rho * \alpha T) - T \in V \quad \text{pour tout} \quad T \in \mathcal{K} \ - \text{d'où le théorème.}$$

EXEMPLES.

Les espaces suivants vérifient les hypothèses du théorème 6 :

$\mathcal{D}^{(m)}$, $\mathcal{E}^{(m)}$, $B_c^{(m)}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{O}_{(M)}$

$\mathcal{D}'$, $\mathcal{E}'$, $\mathcal{S}'$, $\mathcal{O}_c'$, $\mathcal{D}'^m_c$, $\mathcal{E}'^m_c$, $\mathcal{D}'_{L^p}$ $(p < \infty)$.

THÉORÈME 7.- Soit E un E.V.T.L.C., $\hat{E}$ le complété de E . Si $\hat{E}$ vérifie (A) , alors E vérifie (A) .

DÉMONSTRATION.

Soit $\mathcal{K}$ un compact de E , V un voisinage de 0 dans E . Soit $\hat{V}$ le complété de V , voisinage de 0 dans $\hat{E}$. Comme $\hat{E}$ vérifie (A) , il existe $v \in (\hat{E})' \otimes \hat{E} = E' \otimes \hat{E}$ avec

$$(v - 1)\mathcal{K} \subset \tfrac{1}{2} . \hat{V} .$$

Soit $v = \sum_{i=1}^{n} e'_i \otimes \hat{e}_i$, $e'_i \in E'$, $\hat{e}_i \in \hat{E}$.

Les e'_i étant fixés, on a :

$$|\langle e, e'_i \rangle| \leq C < \infty \quad \text{pour tout} \quad e \in \mathcal{K} , \ i = 1 , \ldots , n .$$

On choisit $e_i \in E$ avec

$$\hat{e}_i - e_i \in \frac{1}{2\,Cn} V \quad \text{et on considère}$$

$$u = \sum_{i=1}^{n} e'_i \otimes e_i \quad . \quad \text{Alors, pour } e \in \mathcal{H}$$

$$u(e) - e = u(e) - (e) + (e) - e \in V \quad \text{car}$$

$$v(e) - e \in \tfrac{1}{2} V \quad \text{et} \quad u(e) - (e) = \sum_{i=1}^{n} \langle e'_i , e \rangle . (e_i - \hat{e}_i) \in \tfrac{1}{2} V$$

THÉORÈME 8.- Tout espace de Hilbert E vérifie (A) .

DÉMONSTRATION.

On considère la famille $\mathcal{F}$ (équicontinue) de tous les projecteurs orthogonaux de rang fini.

N.B. On peut aussi se ramener à L^2 - et le théorème 1 -

COROLLAIRE 1.- Tout espace pré-hilbertien séparé vérifie (A) .

DÉMONSTRATION.

Son complété, qui est un Hilbert, vérifie (A) (théorème 8), donc lui-même vérifie (A) (théorème 7)

THÉORÈME 9.- Soit E un espace tel qu'il existe un système fondamental de voisinages U de 0 , tels que E_U vérifie (A) . Alors E vérifie (A) .

DÉMONSTRATION.

Soit V voisinage de zéro donné, $\mathcal{K}$ compact donné dans E . On peut prendre V convexe cerclé fermé, tel que E_V vérifie (A) . Soit p la jauge de V , Θ l'application canonique $E \longrightarrow E_V$. L'image $\Theta . \mathcal{K} = \mathcal{K}_1$ est un compact de E_V . Il existe donc $v \in \mathcal{L}(E_V ; E_V)$, de rang fini, avec

$$\| v . \Theta x - \Theta x \| \leq 1 \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathcal{K} .$$

Posons :

$$w . x = v . \Theta x \quad ; \quad w \in \mathcal{L}(E ; E_V) \text{ , de rang fini, soit}$$

$$w = \sum_{i=1}^{n} e'_i \otimes f_i \quad , \quad e'_i \in E' \quad , \quad f_i \in E_V \text{ . Considérons alors}$$

$$u = \sum_{i=1}^{n} e'_i \otimes e_i \quad , \quad \text{où } e_i \text{ quelconque avec } \Theta . e_i = f_i \text{ .}$$

On a, pour tout $x \in \mathcal{H}$.

$$\Theta(u.x - x) = w.x - \Theta x \quad \text{donc} \quad \|\Theta(ux - x)\| \leq 1 \quad \text{donc}$$
$$p(ux - x) \leq 1 \quad \text{donc} \quad ux - x \in V \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathcal{H}.$$

C.Q.F.D.

COROLLAIRE 1.- Tout sous-espace d'un produit d'espaces préhilbertien séparés vérifie (A).

Soit en effet $E = \prod_{i \in I} \mathcal{H}_i$; on peut toujours supposer que $pr_i E = \mathcal{H}_i$. Il existe un système fondamental de voisinages de 0 , U , qui sont de la forme $U = \prod_{i \in J} U_i \times \prod_{i \in K} \mathcal{H}_i$, J fini $\subset$ I , U_i boule de $\mathcal{H}_i$. Alors $E_U \approx \prod_{i \in J} \mathcal{H}_i$ est préhilbertien séparé, donc vérifie (A) , donc aussi E .

Remarque : Tous les sous-espaces d'un tel espace E vérifient aussi (A) .

REMARQUE 1.- On montrera que tout espace nucléaire est nécessairement limite projective d'espace de Hilbert, donc vérifie (A).

Comme application du Corollaire 1 ci-dessus, montrons le

THÉORÈME 10.- Soit V une variété analytique complexe dénombrable à l'infini, $\mathcal{H}(V)$ = espace des fonctions holomorphes sur V , muni de la topologie de la convergence compacte. Alors $\mathcal{H}(V)$ vérifie (A) .

DÉMONSTRATION.- $\mathcal{E}(V)$ peut être défini comme espace des fonctions f indéfiniment différentiables, muni de la topologie la moins fine telle que les applications $f \longrightarrow Df$ (D = opérateur différentiel à coefficients indéfiniment différentiables à support compact) soient continues de $\mathcal{E}$ dans L^2, (L^2 = espace de Hilbert défini par une mesure dx associée à un ds^2 Riemannien sur V). On peut donc appliquer le corollaire 1 ci-dessus : tous les sous-espaces de $\mathcal{E}(V)$ vérifient (A) . En particulier $\mathcal{H}(V)$, sous-espace des fonctions holomorphes, dans lequel la convergence compacte est identique à la convergence dans $\mathcal{E}(V)$.

Soit toujours V comme au théorème 10 et E un espace complet . On désigne par $\mathcal{H}(V;E)$ l'espace des fonctions holomorphes sur V à valeurs dans E , avec la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de V . Supprimons partout V dans les notations. On va montrer le

THÉORÈME 11.- $\mathcal{H}(E) = \mathcal{H}\hat{\otimes} E \ (= \mathcal{H}\hat{\otimes}_\varepsilon E)$, algébriquement et topologiquement.

DÉMONSTRATION.

a) $\mathcal{H}$ vérifie (A) (théorème 10) , donc (exposé n° 14 , théorème 2, conditions (A_4)) :

$$\mathcal{H}\hat{\otimes}_\varepsilon E = \mathcal{L}_\varepsilon(E'_c;\mathcal{H}) \quad \text{(algébriquement et topologiquement).}$$

b) Mais $\vec{\varphi} \in \mathcal{L}_\varepsilon(E'_c;\mathcal{H})$ équivaut à $\begin{cases} \vec{\varphi} \in \mathcal{L}_\varepsilon(E'_c;\mathcal{E}) = \mathcal{E}(E) \\ \langle \vec{\varphi}, \overleftarrow{e'} \rangle \in \mathcal{H} \text{ pour tout } \overleftarrow{e'} \in E' \end{cases}$

donc équivaut à $\vec{\varphi} \in \mathcal{H}(E)$, car toute fonction "scalairement holomorphe" est holomorphe. D'où le théorème.

Autrement dit : toute fonction holomorphe à valeurs dans E est limite, uniformément sur tout compact de V de fonctions holomorphes "dégénérées" :

$$\sum_{\text{finie}} \varphi_\nu \, \vec{e}_\nu \ , \varphi_\nu \in \mathcal{H}$$

VARIANTE DES THÉORÈMES 10 ET 11.

D = opérateur différentiel (on peut généraliser) sur R^n . $\mathcal{E}_D$ = sous-espace vectoriel (fermé) de $\mathcal{E}$ des solutions de l'équation $D\varphi = 0$; topologie de la convergence compacte si D est elliptique, induite par $\mathcal{E}$ si D n'est pas elliptique. Alors : $\mathcal{E}_D$ vérifie (A) . Soit maintenant $\mathcal{E}_D(E)$ = sous-espace de $\mathcal{E}(E)$ des solutions de $D\vec{\varphi} = 0$. Alors :

$$\mathcal{E}_D(E) = \mathcal{E}_D \hat{\otimes}_\varepsilon E \ .$$

REMARQUE 3.

Pour montrer qu'un espace E vérifie (A) on a seulement utilisé la condition (A) du théorème 2 -Exposé n° 14 - On peut évidemment parfois se ramener à une autre condition de ce théorème.

Exemple : $E = \mathcal{H}^{(m)}$ - au sens de l'exposé n° 10 - Alors E vérifie (A) par application du théorème 2 -Exposé n° 10 - et de (A_4) .

PROBLÈMES NON RÉSOLUS.

On ne sait pas si les espaces suivants vérifient ou non (A) :

$B^{(m)}$, $m > 0$: fonctions f bornées, $D^p f$ bornée, $|p| \leq m$, convergence uniforme sur R^n pour $D^p f$, $|p| \leq m$.

$\mathcal{E}^m_{L^p}(\Omega)$ $(p \neq 2 , m > 0)$: Ω ouvert de R^n , $D^q f \in L^p(\Omega)$ pour $|q| \leq m$; topologie la moins fine telle que $f \longrightarrow D^q f$ continue dans $L^p(\Omega)$ (vrai si $p = 2$, car espace de Hilbert).

$\mathcal{E}^m_{L^\infty}(R^n)$, $m > 0$.

$\mathcal{D}'^m$, $\mathcal{E}'^m$ forts - m fini - .