

SÉMINAIRE SCHWARTZ

L. SCHWARTZ

Caractérisation des opérateurs nucléaires dans certains cas particuliers

Séminaire Schwartz, tome 1 (1953-1954), exp. n° 13, p. 1-5

http://www.numdam.org/item?id=SLS_1953-1954__1__A14_0

© Séminaire Schwartz

(Secrétariat mathématique, Paris), 1953-1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schwartz » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Exposé n° 13

CARACTÉRISATION DES OPÉRATEURS NUCLEAIRES
DANS CERTAINS CAS PARTICULIERS.

1.- CAS DES ESPACES L^p

Soit X un espace localement compact, μ une mesure positive sur X . Considérons les applications nucléaires de l'espace de Banach E dans $F = L^1_\mu$. On sait que

$$E' \hat{\otimes} L^1_\mu \approx L^1_\mu(E')$$

les deux espaces étant isométriques. Donc si $u: E \rightarrow L^1_\mu$ est nucléaire, elle définit une fonction f , définie presque partout, à valeur dans E' et sommable; et réciproquement.

On a, pour tout $\vec{e} \in E$: $u(\vec{e}) = \langle \vec{f}, \vec{e} \rangle$; ou $u(\vec{e})(x) = \langle \vec{f}(x), \vec{e} \rangle$ presque partout. Soit (Y, ν) un deuxième espace mesuré. Posons $E = L^p_\nu$ alors $E' = L^{p'}_\nu$ ($p \geq 1$, $p \neq \infty$). On va interpréter $E' \hat{\otimes} F$ comme espace fonctionnel sur $X \times Y$. Nous considérerons l'espace des fonctions f définies sur $X \times Y$ et pour lesquelles

$$N_{1,p'}(f) = \int^* d\mu(x) \left[\int^* |f(x,y)|^{p'} d\nu(y) \right]^{1/p'}$$

est fini. C'est un espace vectoriel sur lequel $N_{1,p'}$ est une semi-norme. L'adhérence dans cet espace de $C(X \times Y) = C(X) \hat{\otimes} C(Y)$ s'appellera $L^{1,p'}$, et le quotient par le sous-espace des éléments de semi-norme nulle sera $L^{1,p'}$. Il est complet et a des propriétés analogues aux espaces $L^{p'}$ (démonstrations analogues aux démonstrations classiques; se borner pour simplifier au cas où X et Y sont dénombrables à l'infini). En particulier $L^{1,p'}$ est l'espace des classes (modulo les fonctions négligeables pour la mesure produit $\mu \otimes \nu$) de fonctions $(\mu \otimes \nu)$ -mesurables, pour lesquelles $N_{1,p'}$ est fini.

Alors $L^1_x(L^{p'}_y) = L^{1,p'}_{x,y}$ (même démonstration que pour $L^p_x(L^p_y) = L^p_{x,y}$, exposé 4, théorème 4).

2.- APPLICATIONS NUCLEAIRES DEFINIES DANS $C(X)$

Soit toujours X un espace compact, $C(X)$ l'espace des fonctions continues. Le dual de $C(X)$ est l'espace $\mathcal{M}^1(X) = C'(X)$ des mesures. Soit B une bande

dans $\mathcal{M}^1$, B' la bande ;

supplémentaire de B . $\mathcal{M}^1$ est somme directe ordonnée de B et B' et si $\mu \in B$
 $\nu \in B'$

$$\|\mu + \nu\| = \int d(|\mu| + |\nu|) = \|\mu\| + \|\nu\|$$

Donc la projection de $\mathcal{M}^1$ sur B parallèlement à B' est de norme 1. On en déduit que $B \hat{\otimes} F$ se plonge isométriquement dans $\mathcal{M}^1 \hat{\otimes} F$ pour tout espace de Banach F . Soit μ une mesure positive et $B(\mu)$ la bande engendrée par μ . Comme $\mu \in B(|\mu|)$ pour toute μ , $\mathcal{M}^1$ est la réunion des $B(\mu)$. De plus on a $\mu \leq |\mu| + |\nu|$, $\nu \leq |\mu| + |\nu|$, donc $B(|\mu| + |\nu|)$ contient $B(|\mu|)$ et $B(|\nu|)$; la famille des $B(\mu)$ est filtrante croissante. Enfin toute partie de $\mathcal{M}^1$ contenue dans l'enveloppe convexe fermée d'une suite est contenue dans un $B(\mu)$. Car si μ_i est la suite en question, on a $|\mu_i| \leq 2^i \|\mu_1\| \mu$ si l'on pose $\mu = \sum_i |\mu_i| \frac{1}{2^i \|\mu_1\|}$, cette série étant absolument convergente. Les μ_i sont donc dans $B(\mu)$ et comme celle-ci est fermée et convexe elle contient l'enveloppe convexe fermée des μ_i . En particulier tout compact de $\mathcal{M}^1$ est contenu dans un $B(\mu)$. On en déduit que tout compact de $\mathcal{M}^1 \hat{\otimes} F$ étant contenu dans l'enveloppe convexe équilibrée fermée du produit de deux compacts est contenu dans un espace $B(\mu) \hat{\otimes} F$.

Or le théorème de Lebesgue-Nikodym affirme que l'application $\varphi \rightarrow \varphi \mu$ est une isométrie de $L^1(\mu)$ sur $B(\mu)$. Donc $B(\mu) \hat{\otimes} F$ est isométrique à $L^1_\mu(F)$. Soit alors M une mesure "nucléaire" à valeur dans F c'est-à-dire une application nucléaire de $C(X)$ dans F . Il existe alors une fonction $\vec{f}$ sommable à valeur dans F et une mesure $\mu \gg 0$ telle que

$$M(\varphi) = \int \vec{f}(x) \varphi(x) d\mu(x)$$

Comme on peut naturellement remplacer $\vec{f}$ et μ par $\rho \vec{f}$ et $\frac{\mu}{\rho}$ on peut toujours supposer que $\|\vec{f}(x)\|_F \equiv 1$. Il en résulte que l'application canonique de $\mathcal{M}^1 \hat{\otimes} F$ dans $L^1(C(X); F)$ est biunivoque, car si $M(\varphi) = 0$ quelle que soit φ , $\vec{f}$ est presque partout nulle.

Enfin il faut noter que les opérateurs intégraux à noyau continu sont nucléaires; si K est une fonction continue de x, y :

$$(K \circ f)(x) = \int K(x, y) f(y) d\mu(y),$$

alors $K \in L^1(C_Y; C_X)$ et l'on a $\text{Tr}(K) = \int K(x, x) d\mu(x)$ si $X = Y$.

3.- CAS DES ESPACES DE HILBERT.

Rappelons qu'un espace de Hilbert E est anti-isomorphe à son dual, cet anti-isomorphisme faisant correspondre à $a \in E$ la forme linéaire $\bar{a} : \bar{a}(x) = (x, a)$. On sait aussi que si E et F sont des espaces de Hilbert et u une application continue $E \rightarrow F$ il existe une application adjointe u^* telle que

$$(u(x), y) = (x, u^*(y))$$

u^* appliquant F dans E . Toute application $u : E \rightarrow F$ se décompose de manière unique sous la forme

$$u = W.H$$

où H est un opérateur continu hermitien ≥ 0 de E dans E , W un opérateur partiellement isométrique de E dans F [c'est-à-dire appliquant une sous-variété E_1 de E sur 0 , et la variété orthogonale E_2 isométriquement sur un sous-espace de F ; ce dernier est la variété finale de l'opérateur partiellement isométrique, E_2 sa variété initiale] ayant pour variété initiale $\overline{H(E)}$.

On a $H = \sqrt{u^*u}$, et W est défini sur $H(E)$ par

$$W(H(x)) = u(x)$$

(c'est bien une isométrie, car $(u(x), u(x)) = (u^*u x, x) = (H^2 x, x) = (Hx, Hx)$; elle se prolonge donc de manière unique en une isométrie de $\overline{H(E)}$ sur un sous-espace de F , d'où le résultat).

On posera $H = |u|$. On a $\|W\| = 1$ (si $u \neq 0$).

Si u est nucléaire, $H = W^*u$ est nucléaire; ~~si H est nucléaire, u est nucléaire~~ et $\|H\|_1 = \|u\|_1$. Il suffit donc d'étudier les opérateurs hermitiens (≥ 0) nucléaires de E dans E .

Soit donc u un opérateur hermitien nucléaire. Alors il est compact et l'on a donc

$$u = \sum_i \lambda_i P_i$$

P_i projecteur de rang fini n_i , λ_i suite tendant vers 0, $P_i P_j = \delta_{ij} P_j$. Supposons que $\sum_i |\lambda_i| n_i < +\infty$; comme P_i est de rang fini, $P_i \in E' \otimes E$ et

$$\|P_i\|_{\Pi} = \text{Tr } P_i = n_i$$

donc la série $\sum \lambda_i P_i$ converge absolument dans $E' \hat{\otimes} E$; sa somme U_0 a pour image u dans $\mathcal{L}(E; E)$ car l'application canonique $E' \hat{\otimes} E \rightarrow \mathcal{L}(E; E)$ est continue. De plus

$$\|u\|_1 \leq \|u_0\|_{\Pi} \leq \sum |\lambda_i| \|P_i\|_1 = \sum |\lambda_i| n_i$$

Réciproquement si u est hermitien nucléaire donc compact $u = \sum \lambda_i P_i$ et si l'on pose $Q_k = P_1 + P_2 + \dots + P_k$ on a

$$Q_k u = \sum_{i=1}^k \lambda_i P_i$$

et $\|Q_k u\|_1 = \sum_{i=1}^k |\lambda_i| n_i \leq \|Q_k\| \|u\|_1 = \|u\|_1$ donc à la limite $\sum |\lambda_i| n_i \leq \|u\|_1$

Finalement on a la proposition suivante

PROPOSITION : Pour qu'un opérateur hermitien u soit nucléaire, il faut et il suffit qu'il soit complètement continu, que la suite de ses valeurs propres (avec leur multiplicité) soit sommable et l'on a $\|u\|_1 = \sum |\lambda_i| n_i$.

L'application canonique $u_0 \rightarrow u$ de $E' \hat{\otimes}_\pi E$ sur $L^1(E; E)$ est une isométrie ($\|u_0\|_\pi = \|u\|_1$).

COROLLAIRE : si $u : E \rightarrow F$ est nucléaire, on a :

$$u = \sum_i \lambda_i e_i \otimes f_i \quad \text{et} \quad \sum_i |\lambda_i| < +\infty$$

e_i suite orthonormée de E , f_i suite orthonormée de F et réciproquement.

On va maintenant introduire l'espace $E \hat{\otimes}_\varepsilon F = G$ et chercher son dual. Une forme linéaire A sur G est définie par ses valeurs sur $E \otimes F$ donc par une forme bilinéaire. La topologie π étant plus fine que la topologie ε , A sera continue sur $E \hat{\otimes}_\pi F$ donc définit une forme bilinéaire continue $\tilde{A}$ sur $E \times F$. Nous avons déjà dit qu'une telle forme bilinéaire était appelée intégrale.

Soit $u \in E \otimes F$, $\tilde{u}$ l'opérateur de rang fini de E' dans F qu'il définit. Soit $\tilde{A}$ l'opérateur continu de F dans E' associé à A . Alors $\langle A, u \rangle = \text{Tr}(\tilde{u} \tilde{A})$.

Posons $\tilde{A} = W H$, W partiellement isométrique, H hermitien ≥ 0 .

Si $\tilde{A}$ n'était pas compact, H ne le serait pas, il aurait un projecteur spectral P de rang infini,

$$P = B H, \quad B \text{ continu}.$$

Alors :

$$\langle A, u \rangle = \text{Tr}(\tilde{u} W H).$$

Prenons des $\tilde{u}$ de la forme $\tilde{u} = v B W^*$; alors

$$\langle A, u \rangle = \text{Tr}(v B W^* W H) = \text{Tr}(v B H) = \text{Tr}(v P).$$

On a $\|\tilde{u}\| \leq \|B\| \|v\|$ donc si v parcourt les opérateurs de norme ≤ 1 , $\tilde{u}$ reste borné. Or si on prend pour v un projecteur de rang n contenu dans P , on a

$v P = v$ et $\text{Tr}(v P) = n$ donc $\text{Tr}(\tilde{u} \tilde{A})$ ne reste pas bornée contrairement à l'hypothèse de sa continuité. Donc H est compact. Donc $H = \sum_i \lambda_i P_i$. Mais alors $\text{Tr}(v W^* \tilde{A}) = \text{Tr}(v H) = \sum_i \lambda_i \text{Tr}(v P_i)$; si donc $\|A\|$ est la norme de A dans $(E \hat{\otimes}_\varepsilon F)'$ on a

$$|\sum \lambda_i \text{Tr}(v P_i)| \leq \|A\| \|v\|.$$

En posant $v = \sum_{i=1}^k P_i$ on a $\|v\| = 1$ et l'on en déduit $\sum_{i=1}^k \lambda_i n_i \leq \|A\|$.

Donc $\tilde{A}$ est nucléaire et $\|\tilde{A}\|_1 \leq \|A\|$.

Réciproquement il est trivial que si $u \in E \hat{\otimes}_\varepsilon F$, $A \in E' \hat{\otimes}_\pi F'$ on a

$$|\langle A, u \rangle| \leq \|A\|_\pi \|u\|_\varepsilon$$

d'où $\|A\| \leq \|A\|_\pi = \|\tilde{A}\|_1$.

On a donc le théorème (Dixmier et Schatten):

THÉOREME : Dans le cas des espaces de Hilbert le dual de $E \hat{\otimes}_\varepsilon F$ est $J(E, F) = E' \hat{\otimes}_\pi F'$. Le bidual de $E \hat{\otimes}_\varepsilon F$ est $B(E', F')$. Autrement dit : Le dual de l'espace des opérateurs complètement continus (muni de la norme des opérateurs) est l'espace des opérateurs nucléaires muni de la norme-trace et le dual de ce dernier est l'espace de tous les opérateurs continus (muni de la norme des opérateurs).
