

SÉMINAIRE SCHWARTZ

L. SCHWARTZ

Les opérateurs de convolution. Le théorème des noyaux

Séminaire Schwartz, tome 1 (1953-1954), exp. n° 11, p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=SLS_1953-1954__1__A12_0

© Séminaire Schwartz

(Secrétariat mathématique, Paris), 1953-1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schwartz » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Exposé n° 11

LES OPÉRATEURS DE CONVOLUTION - LE THÉORÈME DES NOYAUX.

I. (1) $\tilde{\mathcal{H}}^m(E) \simeq \mathcal{L}_E(\mathcal{H}_c^m; E)$. Cette proposition est équivalente à l'assertion (2) $\vec{\delta} \in \tilde{\mathcal{H}}^m(\mathcal{H}_c^m)$.

Si nous avons la propriété (1) nous en déduisons la propriété (2). En effet, prouver (2) revient alors à montrer que ${}^tL_{\vec{\delta}}$ appartient à $\mathcal{L}_E(\mathcal{H}_c^m; \mathcal{H}_c^m)$ or cette application est l'identité, donc appartient bien à ce dernier espace.

Réciproquement, soit $v \in \mathcal{L}_E(\mathcal{H}_c^m; E)$, alors $v \circ \vec{\delta} \in \tilde{\mathcal{H}}^m(E)$. $\vec{v} = v \circ \vec{\delta}$ est l'élément associé à v cherché. Pour cela il nous faut vérifier ${}^tL_{\vec{v}} = v$, ou $v(T) = T(\vec{v})$, pour $T \in \mathcal{H}_c^m$. Or $T(\vec{v}) = T(v \circ \vec{\delta}) = v(T(\vec{\delta})) = v(T)$. Ceci achève de prouver l'équivalence de (2) et de (1). En vertu du lemme démontré la dernière fois nous déduisons l'assertion (1).

II. Opérateurs de convolution.

Convention : Dans la suite, toute variable en indice, ou surmontée d'un chapeau, désignera une variable muette; ainsi $f(x)$ désigne la valeur de la fonction f au point x , $f(\hat{x})$ désigne la fonction f .

$$f(\hat{x}, y) = (x \rightarrow f(x, y)) \quad , \quad f(\hat{x}, \hat{y}) = (y \rightarrow (x \rightarrow f(x, y))) .$$

$$f(\hat{x})_y = (x \rightarrow f(x)_y) .$$

Un indice répété 2 fois dans une formule telle que $T_x(\varphi(x)) = T(\varphi)$ est aussi muet.

Problème. Soit E un espace de distribution, ($E \subset \mathcal{D}'$, l'injection de E dans $\mathcal{D}'$ étant continue), $\mathcal{H}^m$ un espace de fonction de l'espèce considérée dans le précédent exposé. On se propose de déterminer les opérateurs de convolution appliquant continuellement $\mathcal{H}_c^m$ dans E , c'est-à-dire les opérateurs linéaires continus de $\mathcal{H}_c^m$ dans E qui sur $\mathcal{E}_c^m \subset \mathcal{H}_c^m$ sont des convolutions. L'espace de ces opérateurs, muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de $\mathcal{H}_c^m$ sera noté

$$\mathcal{O}'_c(\mathcal{H}'^m_c; E).$$

Exemples : $\mathcal{O}'_c(\mathcal{D}' ; \mathcal{D}') = \mathcal{E}'$, $\mathcal{O}'_c(\mathcal{E}' ; \mathcal{D}') = \mathcal{D}'$

$$\mathcal{O}'_c(\mathcal{S}' ; \mathcal{S}') = \mathcal{O}'_c$$

Théorème 1 - Pour que $A \in \mathcal{O}'_c(\mathcal{H}'^m_c; E)$ il faut et il suffit que la fonction $\vec{A} : (y \rightarrow \tau(y)A)$ appartienne à $\tilde{\mathcal{H}}^m(E)$, ($\tau(y)A_x$ est la distribution A_x translatée de y).

Démonstration : La condition est suffisante ; en effet, si $\vec{A} \in \tilde{\mathcal{H}}^m(E)$ $T(\vec{A})$ a un sens, appartient à E , et $\vec{A} \rightarrow T(\vec{A})$ est continue de $\mathcal{H}'^m_c$ dans E ; de plus, pour $e' = \psi \in \mathcal{D} \subset E' : \langle T(\vec{A}), \psi \rangle = T(\langle \vec{A}, \psi \rangle) = T_y(\tau_y A(\psi)) = T(\vec{A} * \psi) = (T * A)(\psi)$ si $T \in \mathcal{E}'$, C.Q.F.D.
La condition est nécessaire. Si en effet $A \in \mathcal{O}'_c(\mathcal{H}'^m_c; E)$, comme $\vec{\delta} \in \tilde{\mathcal{H}}^m(\mathcal{H}'^m_c)$, $A \circ \vec{\delta}$ doit appartenir à $\tilde{\mathcal{H}}^m(E)$; mais $A \circ \vec{\delta}$ est la fonction $y \rightarrow A(\delta_x(y)) = A * \delta_x(y) = \tau(y)A$ donc la fonction $\vec{A}$.

III. Transformée de Fourier.

Montrons d'abord que $\exp(-2i\pi \langle \hat{x}, \hat{y} \rangle) \in \tilde{\mathcal{S}}_y(\mathcal{S}'_x)$. Tout d'abord cette fonction de y prend ses valeurs dans $\mathcal{S}'_x$, et même dans $\mathcal{B}_x$. Ensuite elle est indéfiniment dérivable en tant que fonction à valeurs dans $\mathcal{E}_x$, donc a fortiori à valeurs dans $\mathcal{D}'_x$; comme toutes ses dérivées (en tant que fonction à valeurs dans $\mathcal{D}'_x$) sont des fonctions continues de y à valeurs dans $\mathcal{S}'_x$, elle est indéfiniment dérivable en tant que fonction à valeurs dans $\mathcal{S}'_x$. Reste à voir qu'elle est scalairement dans $\mathcal{S}_y$; c'est équivalent au fait que la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ applique $\mathcal{S}_x$ dans $\mathcal{S}_y$. On en déduit :

Proposition 1. $\mathcal{F} T_y = T_y (\exp(-2i\pi \langle \hat{x}, y \rangle))$ définit une application linéaire continue de $\mathcal{S}'_y$ dans $\mathcal{S}'_x$.

IV. Structure de certains espaces d'applications linéaires. Le théorème des noyaux.

Définition 1. X étant l'espace de la variable x , Y celui de la variable y , un noyau sur $X \times Y$ est un élément de $\mathcal{D}'_{x,y}$.

On note par $N(\varphi) = \iint_{x,y} N_{x,y} \varphi(x,y) dx dy$ la forme linéaire qu'il définit sur $\mathcal{D}_{x,y}$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_y$ ($\varphi(x,y) = u(x), v(y)$). N définit alors sur $\mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_y$

une forme bilinéaire séparément continue. $N(\hat{u} \otimes v)$ est une application linéaire continue de $\mathcal{D}'_x$ dans $\mathcal{C}$. C'est donc un élément de $\mathcal{D}'_x$. De plus $v \rightarrow N(\hat{u} \otimes v)$ est continue de $\mathcal{D}_y$ dans $\mathcal{D}'_x$ faible. N définit donc un élément $N(\hat{u} \otimes \hat{v})$ de $\mathcal{L}(\mathcal{D}_y; \mathcal{D}'_x)$.

On note aussi $N \circ y = N(\hat{u} \otimes v)$ et $u \circ N = N(u \otimes \hat{v})$, $N \circ v$ définit l'intégration partielle par rapport à y . On la notera $\int N_{x,y} v(y) dy = N \circ v$. On a donc la

Proposition 2. Tout noyau $N_{x,y}$ de $\mathcal{D}'_{x,y}$ définit une application linéaire continue de $\mathcal{D}_y$ dans $\mathcal{D}'_x$, à savoir $N(\hat{u} \otimes \hat{v})$ qui est aussi donnée par $(v \in \mathcal{D}_y) : v \rightarrow \int N_{x,y} v(y) dy = N \circ v$.

Le théorème de Fubini est valable pour les intégrations partielles, c'est-à-dire $\langle u \circ N, v \rangle = \langle u, N \circ v \rangle$.

Remarque : Continuité de $\mathcal{D}_y$ fort dans $\mathcal{D}'_x$ fort, de $\mathcal{D}_y$ faible dans $\mathcal{D}'_x$ faible, de $\mathcal{D}_y$ fort dans $\mathcal{D}'_x$ faible, sont équivalentes, car $\mathcal{D}_y$ et $\mathcal{D}'_x$ ont la topologie τ .

Nous nous proposons d'établir une réciproque de la première partie de cette proposition. Nous traiterons d'abord quelques cas particuliers.

A) $\mathcal{L}_\varepsilon((\mathcal{H}_y^n)'_c; \mathcal{H}_x^m)$ ou $\mathcal{H}_x^m$ et $\mathcal{H}_y^n$ sont deux espaces de fonctions du type $\mathcal{H}^{m,n}$.

On a :

$$\mathcal{L}_\varepsilon((\mathcal{H}_y^n)'_c; \mathcal{H}_x^m) \approx (\mathcal{H}_y^n) \hat{\otimes}_\varepsilon (\mathcal{H}_x^m) \approx \mathcal{H}_{x,y}^{m,n} \approx \tilde{\mathcal{H}}_y^n(\mathcal{H}_x^m).$$

Soit $L \in \mathcal{L}((\mathcal{H}_y^n)'_c; \mathcal{H}_x^m)$, elle définit un élément $N(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathcal{H}_{x,y}^{m,n}$ associé aussi à $\vec{N} = N(\hat{x}, \hat{y}) \in \tilde{\mathcal{H}}_y^n(\mathcal{H}_x^m)$ tel que $L(T) = T(\vec{N}) = \int N(\hat{x}, y) T_y dy$, $N(\hat{x}, \hat{y})$ est le noyau de L .

Une application L de $\mathcal{E}'_y$ dans $\mathcal{E}_x$ sera dite régularisante. De $\mathcal{E}_x \hat{\otimes} \mathcal{E}_y = \mathcal{E}_{x,y}$ nous tirons donc la proposition :

Proposition 3 - Toute application régularisante est définie par un noyau, fonction indéfiniment différentiable, $N(\hat{x}, \hat{y})$. Si T_y est une distribution à support compact, sa régularisée par N est définie par l'intégrale $\int N(\hat{x}, y) T_y dy$.

$$\text{On a } N(\hat{x}, \hat{y}) = L \circ \vec{\delta} \quad \text{ou} \quad \vec{\delta} \in \tilde{\mathcal{E}}_y(\mathcal{E}'_y)$$

donc $L(\delta_y(b)) = N(\hat{x}, b)$ et $L(\delta_y(b))(a) = N(a, b)$

B) $\mathcal{L}_c(\mathcal{H}_y^n; \mathcal{H}_x^m)$ ou $\mathcal{H}_x^m$ et $\mathcal{H}_y^n$ sont deux espaces de fonctions du

type $\mathcal{H}^m, \mathcal{H}_y^n$ étant en outre bornologique.

Soit E un espace vectoriel topologique complet tel que E'_0 soit complet, et que les parties compactes de E'_0 soient équicontinues (donc $(E'_0)'_0 = E$). On a alors :

$$\mathcal{L}_0(E; \mathcal{M}_x^m) \approx \mathcal{L}_E((E'_0)'_0; \mathcal{M}_x^m) \approx \mathcal{L}_E((\mathcal{M}_x^m)'_0; E'_0) \approx \mathcal{M}_x^m \hat{\otimes}_E E'_0 \approx \mathcal{M}_x^m(E'_0)$$

Les conditions imposées à E seront manifestement remplies si E est tel que tout ensemble H de E' équicontinu sur les parties compactes de E est équicontinue, ce qui est lorsque E est bornologique. [Soit en effet alors E' son dual, et $H \subset E'$ équicontinu sur tout compact de E . Soit V un voisinage convexe équilibré de zéro dans C (un disque), et S une suite quelconque de E qui tende vers zéro. Par hypothèse $(\bigcap_{h \in H} h^{-1}(V)) \cap (S \cup \{0\})$ est l'intersection de $S \cup \{0\}$ et d'un voisinage de zéro dans E , donc $\bigcap_{h \in H} h^{-1}(V)$, convexe, équilibré, absorbe S , donc tout borné de E , et est en conséquence un voisinage de zéro dans E].

Soit $L \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_y^n; \mathcal{M}_x^m)$, tL sa transposée et $N(\hat{x})_y = \vec{N} \in \mathcal{M}_x^m((\mathcal{H}_y^n)'_0)$ l'élément associé à L . $N(\hat{x})_y$ est le noyau de L . Pour toute distribution $T_x \in \mathcal{M}_x^m$ on a ${}^tL(T_x) = T_x(N(x)_y) = \int N(x)_y T_x dx$. Pour toute $\varphi \in \mathcal{H}_y^n$, on a

$$\langle L(\varphi(\hat{y})), T_x \rangle = \langle \varphi(\hat{y}), T_x(\vec{N}) \rangle = T_x(\langle \varphi(\hat{y}), \vec{N} \rangle)$$

$L(\varphi(\hat{y}))$ est donnée par l'intégrale partielle

$$L(\varphi(\hat{y})) = \int N(\hat{x})_y \varphi(y) dy = \langle \varphi(\hat{y}), \vec{N} \rangle.$$

On a aussi :

$$L(\varphi(\hat{y}))(a) = \int (N(a))_y \varphi(y) dy$$

$N(x)_y$ est le noyau de L .

C'est bien un noyau. C'est en effet une fonction continue de $x \in X$ à valeurs dans $\mathcal{O}'_y$. On définira $N(\varphi)$ pour $\varphi(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathcal{O}_{x,y}$ par $N(\varphi) = \int_X dx \int_Y K(x)_y \varphi(x, y) dy$.

Comme $\varphi(\hat{x}, \hat{y})$ est continue de x à valeurs dans $\mathcal{O}_y$, et $N(\hat{x})_y$ continue de x à valeurs dans $\mathcal{O}'_y$, l'intégrale en dy définit une fonction continue de x à support compact, donc $N(\varphi)$ a un sens. Si φ converge vers 0 dans $\mathcal{O}_{x,y}$ en gardant son support dans un compact fixe $H \times K$ de $X \times Y$; $\varphi(x, \hat{y})$ converge vers 0 dans $\mathcal{O}_y$ uniformément par rapport à x ,

$N(x)_y$ reste borné dans $\mathcal{D}'_y$ lorsque x parcourt H , donc l'intégrale en y converge vers 0 uniformément par rapport à x , en gardant son support dans H , donc $N(\varphi) \rightarrow 0$. Donc N est bien une distribution $\in \mathcal{D}'_{x,y}$, c'est-à-dire un noyau.

Cas particulier. $\mathcal{L}(\mathcal{D}_y; \mathcal{E}_x) \approx \widetilde{\mathcal{E}}_x(\mathcal{D}'_y) = \mathcal{E}_x(\mathcal{D}'_y)$. Les applications de $\mathcal{L}(\mathcal{D}_y; \mathcal{E}_x)$ sont dites semi-régulières en x .

Proposition 4. Toute application L semi-régulière en x est définie par un noyau fonction indéfiniment dérivable de x à valeurs dans $\mathcal{D}'_y$.
Si $\varphi \in \mathcal{D}_y$, et $N(x)_y$ est le noyau de L on a :

$$L(\varphi) = \int N(x)_y \varphi(y) dy$$

c) $\mathcal{L}_{\mathcal{E}}((\mathcal{M}_x^m)'; (\mathcal{N}_y^n)') \approx \widetilde{\mathcal{M}}_x^m((\mathcal{N}_y^n)')$ lorsque $\mathcal{M}_x^m$ et $\mathcal{N}_y^n$ sont des espaces du type $\mathcal{H}^m$, $\mathcal{H}$ bornologique.

Ce cas a été traité tout à l'heure dans B), avec $L(\delta_y(b)) = N_x(b)$.

Inversons donc les rôles de x et y . Alors si $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{E}}((\mathcal{M}_y^m)'; (\mathcal{N}_x^n)')$ il est défini par un noyau $N_x(\varphi) \in \widetilde{\mathcal{M}}_y^m((\mathcal{N}_x^n)')$.

Cas particulier :

$\mathcal{L}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}_y'; \mathcal{D}_x') = \mathcal{E}_y(\mathcal{D}_x')$, N est alors un noyau semi-régulier en y .

Le théorème général des noyaux. Il s'énonce :

Théorème 2 - Toute application linéaire continue de $\mathcal{D}_y$ dans $\mathcal{D}'_x$ est définie par un noyau, déterminé d'une manière unique. Soit L l'application, $\varphi(\varphi) \in \mathcal{D}_y$ et $N_{x,y}$ le noyau de L , nous avons $L(\varphi(\varphi)) = \int N_{x,y} \varphi(y) dy$. L'unicité du noyau est évidente, car L détermine N sur $\mathcal{D}_x \otimes \mathcal{D}_y$, dense dans $\mathcal{D}_{x,y}$.

Démonstration. Elle se fait en quatre étapes :

- 1°) $L \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_x; \mathcal{E}_x^0)$. Ce cas a été traité dans B).
- $N_{x,y} = N(x)_y \in \mathcal{E}_x^0 \hat{\otimes} \mathcal{D}'_y$. Pour $\varphi(\varphi) \in \mathcal{D}_y$ on a : $N \circ \varphi = \int N(x)_y \varphi(y) dy$.
- 2°) $L \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_y; (\mathcal{E}_x^m)')$. Soit $\varphi(\varphi) \in \mathcal{D}_y$. Nous nous ramènerons au cas précédent en régularisant $L(\varphi)$. La solution élémentaire E_k de l'équation de Laplace itérée Δ^k sur R^n est r^{2k-n} à une constante près [c'est $((2k-n)(2k-2-n) \dots (4-n)(2-n) \cdot 2^{k-1} \cdot (k-1)! \frac{2(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma(n/2)}) r^{2k-n}$ pour n impair].

Pour n pair, nous avons une formule analogue r^{2k-n} étant remplacé par $r^{2k-n} \log r$.

De toute façon, pour k assez grand E_k est une fonction m fois continuellement différentiable. Alors, dans ces conditions, $E_k * L(\varphi)$ est un élément de $\mathcal{E}_x^0$, donc $\varphi \rightarrow E_k * L(\varphi)$ est un élément de $\mathcal{L}(\mathcal{O}_y; \mathcal{E}_x^0)$ donc est défini par un noyau $N \in \mathcal{E}_x^0 \hat{\otimes}_{\mathcal{E}} \mathcal{O}_y'$.

$E_k * L(\varphi) = N * \varphi$. Si nous appliquons la formule de Poisson, nous obtenons alors :

$L(\varphi) = \Delta^k_{E_k} * L(\varphi) = \Delta^k(E_k * L(\varphi)) = \Delta^k(N_{x,y} * \varphi) = (\Delta^k_x N_{x,y}) * \varphi$, donc L est bien définie par un noyau.

3°) $L \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_y; \mathcal{E}_x')$. L est dite "compactifiante". La forme bilinéaire $\tilde{L}$ sur $\mathcal{E}_y \times \mathcal{E}_x$ définie par L est séparément continue; $\mathcal{E}_x$ et $\mathcal{E}_y$ étant des espaces du type $(\mathcal{F})$, $\tilde{L}$ est continue. Donc il existe un ouvert de $\mathcal{E}_y$ appliqué par L en un borné de $\mathcal{E}_x'$. Mais une partie bornée de $\mathcal{E}_x'$ est plongée dans un certain $\mathcal{E}_x^m$ et est bornée dans cet espace. Donc L se prolonge en une application continue de $\mathcal{E}_y$ dans un $(\mathcal{E}_x^m)'$, elle définit donc un élément de $\mathcal{L}(\mathcal{O}_y; (\mathcal{E}_x^m)')$ (et elle est parfaitement définie par cet élément puisque $\mathcal{O}_y$ est partout dense dans $\mathcal{E}_y$ pour la topologie de $\mathcal{E}_y$).

L est donc définie par un noyau, d'après 2°)

On a aussi la :

Proposition 3. Toute forme bilinéaire (séparément) continue sur $\mathcal{E}_x \times \mathcal{E}_y$ est définie par un noyau $N_{x,y} \in \mathcal{E}_{x,y}$.

4°) $L \in \mathcal{L}(\mathcal{O}_y; \mathcal{O}_x')$

L définit une forme bilinéaire $\tilde{L}$ sur $\mathcal{O}_x \times \mathcal{O}_y$, séparément continue. Soit A un ouvert relativement compact dans X (resp. B dans Y).

Soit $\alpha(x)$ une fonction $\in \mathcal{O}_x$ telle que $\alpha(x) = 1$ pour tout $x \in A$; $\beta(y)$ une fonction $\in \mathcal{O}_y$ telle que $\beta(y) = 1$ pour tout $y \in B$.

Soient maintenant $\varphi(x) \in \mathcal{O}_x$ et $\psi(y) \in \mathcal{O}_y$. Alors $\tilde{L}(\alpha(x)\varphi(x), \beta(y)\psi(y))$ est une forme bilinéaire sur $\mathcal{E}_x \times \mathcal{E}_y$ séparément continue. Elle est donc définie par un noyau $N_{x,y}(A,B)$. Si alors $C \supset A$, $D \supset B$, on a $N_{x,y}(A,B) = N_{x,y}(C,D)$ donc $A \times B$, car ils coïncident sur $\mathcal{O}_x(A) \hat{\otimes} \mathcal{O}_y(B)$ dense dans $\mathcal{O}_{x,y}(A \times B)$.

Par recollement des morceaux nous construisons un noyau définissant L .

Le théorème est démontré.

Remarque : La proposition 5 signifie aussi que $\mathcal{E}_x \hat{\otimes}_{\pi} \mathcal{E}_y$ et $\mathcal{E}_x \hat{\otimes}_{\mathcal{E}} \mathcal{E}_y$ ont le même dual.

Nous verrons qu'ils sont identiques, et cela est lié au fait que $\mathcal{E}$ est nucléaire . (C'est précisément le théorème des noyaux qui est à l'origine du mot nucléaire).
