

SÉMINAIRE SCHWARTZ

L. SCHWARTZ

Sur certains espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles

Séminaire Schwartz, tome 1 (1953-1954), exp. n° 10, p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=SLS_1953-1954__1__A11_0

© Séminaire Schwartz

(Secrétariat mathématique, Paris), 1953-1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Schwartz » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR CERTAINS ESPACES DE FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES
À VALEURS VECTORIELLES

1. LES ESPACES $\mathcal{H}^m$.

Nous raisonnerons sur $\mathbb{R}^n$, mais il serait facile d'étendre les résultats, avec des modifications convenables, à une variété m fois continuellement différentiable dénombrable à l'infini, et, pour $m = 0$, à un espace localement compact dénombrable à l'infini.

Soit Γ un ensemble de fonctions numériques continues sur $\mathbb{R}^n$, telle que pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$, il existe $\gamma \in \Gamma$ qui ne s'annule pas sur K .

DÉFINITION 1 - On dit que $\varphi \in \mathcal{C}^m$ (c'est-à-dire m fois continuellement différentiable) satisfait jusqu'à l'ordre m (m entier, fini ou infini; pour $m = \infty$, la restriction $|p| \leq m$ est à supprimer) aux conditions de croissance définies par Γ si, pour tout p tel que $|p| \leq m$, et toute $\gamma \in \Gamma$, la fonction $\gamma D^p \varphi$ est bornée sur $\mathbb{R}^n$.

DÉFINITION 2 - $\mathcal{H}^m$ est un espace de fonctions numériques satisfaisant aux conditions suivantes :

$H_1)$ $\mathcal{H}^m$ est l'ensemble des fonctions $\varphi \in \mathcal{C}^m$ satisfaisant jusqu'à l'ordre m aux conditions de croissance définies par Γ .

$H_2)$ $\mathcal{H}^m$ est localement convexe séparé complet ; les injections de $\mathcal{O}^m$ dans $\mathcal{H}^m$ et de $\mathcal{H}^m$ dans $\mathcal{C}^m$ sont continues.

$H_3)$ Pour qu'un ensemble B de fonctions soit borné dans $\mathcal{H}^m$, il faut et il suffit que, pour toute $\gamma \in \Gamma$ et $|p| \leq m$, l'ensemble des nombres $\gamma D^p \varphi(x)$, $\varphi \in B$, $x \in \mathbb{R}^n$, soit borné.

$H_4)$ Sur toute partie bornée B de $\mathcal{H}^m$, la topologie est identique à la topologie induite par $\mathcal{C}^m$.

EXEMPLES. $\mathcal{O}^m$ ($\Gamma = \mathcal{C}^m$), $\mathcal{C}^m$ ($\Gamma = \mathcal{O}^m$), $\mathcal{S}$ ($\Gamma =$ ensemble des polynomes

ou $\mathcal{O}_M$), $\mathcal{O}_M(\Gamma=S)$.

$\mathcal{B}^m$ (ensemble des fonctions bornées ainsi que leurs dérivées d'ordre $\leq m$) correspond à Γ réduit à la fonction 1, mais H_4 n'est pas vérifiée. Il existe entre $\mathcal{B}^m$ et $(\mathcal{O}_{L1}^1)^m$ une dualité séparante ; si on met sur $\mathcal{B}^m$ la topologie borne supérieure de la topologie induite par $\mathcal{E}^m$ et de la topologie de la convergence uniforme sur les parties fortement compactes de $(\mathcal{O}_{L1}^1)^m$, on peut montrer que H_4 est vérifiée.

PROPOSITION 1 - $\mathcal{O}^\infty = \mathcal{O}$ est dense dans $\mathcal{H}^m$.

Soit en effet $\varphi \in \mathcal{H}^m$. Si (α_ν) est une suite de fonctions de $\mathcal{O}$, bornées dans $\mathcal{B}^m$ et convergeant vers 1 dans $\mathcal{E}^m$, les $\alpha_\nu \varphi$ sont dans $\mathcal{O}^m$, et convergent vers φ dans $\mathcal{E}^m$; comme elles sont en outre bornées dans $\mathcal{H}^m$ (condition H_3) elles convergent aussi vers φ dans $\mathcal{H}^m$ (H_4). Donc $\mathcal{O}^m$ est dense dans $\mathcal{H}^m$. Comme $\mathcal{O}$ est dense dans $\mathcal{O}^m$ pour la topologie de $\mathcal{O}^m$ plus fine que celle de $\mathcal{H}^m$, il est dense dans $\mathcal{O}^m$ pour la topologie induite par $\mathcal{H}^m$, donc dans $\mathcal{H}^m$.

PROPOSITION 2 - $\mathcal{H}'^m$ est un espace de distributions.

Si en effet $T_0 \in \mathcal{H}'^m$, c'est une forme linéaire continue sur $\mathcal{H}^m$ donc sur $\mathcal{O}^m$, elle définit donc une distribution T , d'où une application linéaire $T_0 \rightarrow T$ de $\mathcal{H}'^m$ dans $\mathcal{O}'^m$. Comme $\mathcal{O}^m$ est dense dans $\mathcal{H}^m$, la connaissance de T détermine T_0 sur $\mathcal{O}^m$ donc sur $\mathcal{H}^m$, l'application est biunivoque, et $\mathcal{H}'^m \subset \mathcal{O}'^m$. Les injections continues $\mathcal{O}^m \rightarrow \mathcal{H}^m \rightarrow \mathcal{E}^m$ entraînent alors des injections continues $\mathcal{E}'^m \rightarrow \mathcal{H}'^m \rightarrow \mathcal{O}'^m$ pour les topologies faibles, fortes, etc...

2. LES ESPACES $\tilde{\mathcal{H}}^m(E)$.

Soit E un EVT localement convexe séparé complet.

DÉFINITION 3 - On appelle $\tilde{\mathcal{H}}^m(E)$ l'espace des fonctions $\vec{\varphi} \in \mathcal{E}^m(E)$ (c'est-à-dire m fois continuellement différentiables à valeurs dans E) scalairement dans $\mathcal{H}^m$ ($\langle \varphi, e' \rangle \in \mathcal{H}^m$ pour tout $e' \in E'$).

EXEMPLE. $\tilde{\mathcal{E}}^m(E) = \mathcal{E}^m(E)$

$$\tilde{\mathcal{S}}(E) = \mathcal{S}(E)$$

$$\tilde{\mathcal{B}}^m(E) = \mathcal{B}(E)$$

$$\tilde{\mathcal{O}}_M(E) = \mathcal{O}_M(E)$$

les espaces écrits au 2e membre ayant des définitions évidentes (par exemple

$\mathcal{S}(E)$ est l'espace des fonctions $\vec{\varphi}$, indéfiniment dérivables à valeurs dans E , telles que pour tout p , et tout polynôme Q , la fonction $Q D^p \varphi$ soit bornée sur R^n).

Par contre en général $\tilde{\mathcal{O}}^m(E) \neq \mathcal{O}^m(E)$, ce dernier étant l'espace des fonctions $\vec{\varphi}$ m fois continuellement différentiables à valeurs dans E et à support compact. $\vec{\varphi} \in \tilde{\mathcal{O}}^m(E)$ signifie seulement en effet que $\vec{\varphi}$ est scalairement à support compact.

Considérons par exemple la fonction $\vec{\delta} : y \rightarrow \delta_x(y)$ qui à chaque $y \in R^n$ fait correspondre la distribution en x représentée par la masse +1 au point y . Elle n'est pas à support compact, puisque $\delta_x(y) \neq 0$ quel que soit $y \in R^n$. Mais elle est scalairement à support compact, si on la considère comme prenant ses valeurs dans $\mathcal{O}'$, car pour $\vec{e}' = \psi \in \mathcal{O}$, on a $\langle \vec{\delta}, \vec{e}' \rangle = \psi$, à support compact (Par contre si on la considère comme prenant ses valeurs dans $\mathcal{E}'$, elle n'est plus scalairement à support compact). Nous verrons plus loin que si E est un Banach, $\tilde{\mathcal{O}}^m(E) = \mathcal{O}^m(E)$.

PROPOSITION 3 - Si $\vec{\varphi} \in \tilde{\mathcal{H}}^m(E)$, lorsque $\vec{e}'$ parcourt une partie équicontinue H' de E' , $\langle \vec{\varphi}, \vec{e}' \rangle$ parcourt une partie bornée de $\mathcal{H}^m$.

En effet la condition $\vec{\varphi} \in \tilde{\mathcal{H}}^m(E)$ est équivalente à : $\vec{\varphi} \in \mathcal{E}^m(E)$, et pour toute $\chi \in \Gamma$ et $|p| \leq m$, l'ensemble des points de $E : \chi(x) D^p \vec{\varphi}(x)$, $x \in R^n$, est borné ; en effet il est faiblement borné d'après H_1 . Cela entraîne bien que l'ensemble des points $\langle \chi(x) D^p \vec{\varphi}(x), \vec{e}' \rangle$, $x \in R^n$, $\vec{e}' \in H'$, est borné, donc que l'ensemble des $\langle \vec{\varphi}, \vec{e}' \rangle$, $\vec{e}' \in H'$, est borné dans $\mathcal{H}^m(H_2)$. Nous verrons plus loin que cet ensemble est même relativement compact.

COROLLAIRE - Si E est un Banach, $\tilde{\mathcal{O}}^m(E) = \mathcal{O}^m(E)$.

Car si $\vec{e}'$ parcourt la boule unité de E' , $\langle \vec{\varphi}, \vec{e}' \rangle$ reste bornée dans $\mathcal{O}^m$, donc a son support dans un compact fixe de R^n ; il en est de même par homothétie pour tout $\vec{e}' \in E'$.

TOPOLOGIE DE $\tilde{\mathcal{H}}^m(E)$.

DÉFINITION 4 - On dira que $\vec{\varphi}$ converge vers 0 dans $\tilde{\mathcal{H}}^m(E)$ si $\langle \vec{\varphi}, \vec{e}' \rangle$ converge vers 0 dans $\mathcal{H}^m$, uniformément lorsque $\vec{e}'$ parcourt une partie équicontinue quelconque E' .

Ou encore identifions $\vec{\varphi}$ à l'application linéaire $L_{\vec{\varphi}} : \vec{e}' \rightarrow \langle \vec{\varphi}, \vec{e}' \rangle$; on met sur $\tilde{\mathcal{H}}^m(E)$ la topologie $\mathcal{E}$ de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de E' .

C'est bien une topologie d'espace vectoriel à cause de la proposition 3.

PROPOSITION 4 - Si E est complet, on a :

$H'_1)$ $\vec{\varphi} \in \mathcal{H}^m(E)$ est équivalent à :

1°) $\vec{\varphi} \in \mathcal{E}^m(E)$

2°) Pour toute $\gamma \in \Gamma$ et $|p| \leq m$, l'ensemble des points de $E : \gamma(x) D^p \vec{\varphi}(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, est borné.

$H'_2)$ $\tilde{\mathcal{O}}^m(E) \subset \tilde{\mathcal{H}}^m(E) \subset \tilde{\mathcal{E}}^m(E) = \mathcal{E}^m(E)$; ces espaces sont complets et les injections sont continues.

$H'_3)$ Pour qu'une partie B de $\tilde{\mathcal{H}}^m(E)$ soit bornée, il faut et il suffit que, pour toute $\gamma \in \Gamma$ et $|p| \leq m$, l'ensemble de points de $E : \gamma(x) D^p \vec{\gamma}(x)$, $\vec{\varphi} \in B$, $x \in \mathbb{R}^n$, soit borné.

$H'_4)$ Sur les parties bornées de $\tilde{\mathcal{H}}^m(E)$, la topologie est identique à la topologie induite par $\mathcal{E}^m(E)$. Conséquence : $\mathcal{O}^m(E)$ est dense dans $\tilde{\mathcal{H}}^m(E)$.

Nous avons déjà montré H'_1 (proposition 3) ; H'_3 se démontre de la même manière. H'_4 est évident. Reste à voir H'_2 .

Il est classique que $\tilde{\mathcal{E}}^m(E) = \mathcal{E}^m(E)$ est complet. Soit Φ un filtre de Cauchy sur $\tilde{\mathcal{H}}^m(E)$ et $\vec{e}' \in E'$; l'image $\Phi_{\vec{e}'}$ de Φ par $\vec{\varphi} \rightarrow \langle \vec{\varphi}, \vec{e}' \rangle$ est une base de filtre de Cauchy sur $\mathcal{H}^m$.

Soit $\vec{\varphi}_0$ la limite de Φ dans $\tilde{\mathcal{E}}^m(E)$.

$\lim \Phi_{\vec{e}'} = \langle \vec{\varphi}_0, \vec{e}' \rangle \in \mathcal{H}^m$ puisque cet espace est complet Φ converge donc simplement dans $\mathcal{H}^m(E)$, et on voit qu'il converge aussi uniformément.

THÉOREME 1 - $\tilde{\mathcal{H}}^m(E) = \mathcal{H}^m \hat{\otimes}_{\mathcal{E}} E$.

DÉMONSTRATION - $\tilde{\mathcal{H}}^m(E)$ est complet, et en vertu de la définition de sa topologie il contient $\mathcal{H}^m \hat{\otimes}_{\mathcal{E}} E$ comme sous-espace topologique. Il nous reste à voir qu'il existe un sous-espace de $\mathcal{H}^m \hat{\otimes}_{\mathcal{E}} E$ dense dans $\tilde{\mathcal{H}}^m(E)$.

LEMME : $\mathcal{O} \hat{\otimes} E$ est dense dans $\tilde{\mathcal{H}}^m(E)$.

En vertu de (H'_4), $\mathcal{O}^m(E)$ est dense dans $\tilde{\mathcal{H}}^m(E)$. Il suffit donc de voir que $\mathcal{O} \hat{\otimes} E$ est dense dans $\mathcal{O}^m(E)$ pour la topologie induite par $\tilde{\mathcal{O}}^m(E)$, identique lorsque le support reste dans un compact fixe à celle de $\mathcal{E}^m(E)$.

Soit ρ indéfiniment différentiable à support compact. Pour toute $\vec{\varphi} \in \mathcal{O}_0(E)$, $\vec{\varphi} * \rho$ a un sens (voir l'intégration des fonctions continues à

support compact, exposé n° 9). $\vec{\varphi}^* \rho \in \mathcal{D}(E)$, et si $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}^0 \otimes E$, alors $\vec{\varphi}^* \rho \in \mathcal{D} \otimes E$. Mais $\vec{\varphi}$ est approchable uniformément par des $\vec{\varphi}_j \in \mathcal{D}_0 \otimes E$ ayant leurs supports dans un compact fini (exposé n° 2). Alors les $\varphi_j^* \rho$ convergent vers $\varphi^* \rho$ dans $\mathcal{D}(E)$. Donc pour toute $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}_0(E)$, $\vec{\varphi}^* \rho$ est adhérent à $\mathcal{D} \otimes E$ pour la topologie de $\mathcal{D}(E)$. Si maintenant $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}^m(E)$ lorsque $\rho \rightarrow \delta$ dans $\mathcal{E}'^m$ faible, les $\vec{\varphi}^* \rho$ tendent vers $\vec{\varphi}$ dans $\tilde{\mathcal{D}}^m(E)$; le lemme est donc démontré, donc aussi le théorème 1.

3. APPLICATIONS ; INTÉGRATION.

PROPOSITION 5 - $\mathcal{L}_x^1 \hat{\otimes}_{\mathcal{E}} \mathcal{M}_y^m = \mathcal{H}_{x,y}^{1,m}$, correspondant à l'ensemble Γ des fonctions $\alpha \beta$, $\alpha \in \Gamma_x$, $\beta \in \Gamma_y$.

On a en effet $\mathcal{L}_x^1 \hat{\otimes}_{\mathcal{E}} \mathcal{M}_y^m = \tilde{\mathcal{L}}_x^1(\mathcal{M}_y^m) = \tilde{\mathcal{M}}_y^m(\mathcal{L}_x^1)$ et on montre aisément que $\tilde{\mathcal{L}}_m^1(\mathcal{M}_y^m) = \mathcal{H}_{x,y}^{1,m}$ (la topologie de $\mathcal{M}_{x,y}^{1,m}$ étant la topologie $\mathcal{E}$ de la convergence uniforme sur les produits de parties équicontinues de $\mathcal{L}_x^1$ et $\mathcal{M}_y^m$).

PROPOSITION 6 - Soient $\mathcal{L}_x^1$ et $\mathcal{M}_y^m$ deux espaces répondant à la définition 2, u une application linéaire continue de $\mathcal{L}_x^1$ dans $\mathcal{M}_y^m$, et v une application linéaire continue de E dans F où E et F sont deux espaces vectoriels topologiques séparés et complets, alors $u \otimes v$ est une application linéaire continue de $\tilde{\mathcal{L}}_x^1(E)$ dans $\tilde{\mathcal{M}}_y^m(F)$, la seule à vérifier $u \otimes v (\psi \vec{e}) = u(\psi)v(\vec{e})$.

INTÉGRATION : Soit T une distribution appartenant à $\mathcal{H}^m$ et soit $\vec{\varphi} \in \mathcal{H}^m(E)$. Nous allons définir l'intégrale de $\vec{\varphi}$, à valeurs dans E , par rapport à T .

T est une application continue de $\mathcal{H}^m$ dans C . Soit $I_{(E)}$ l'application identité de E sur lui-même, alors $T \otimes I_{(E)}$ applique continuellement $\mathcal{H}^m(E)$ dans E .

DÉFINITION 5 - Soit $\vec{\varphi} \in \mathcal{H}^m(E)$ et $T \in \mathcal{H}^m$; alors l'intégrale de $\vec{\varphi}$ par rapport à T est par définition $T \otimes I_{(E)}(\vec{\varphi}) \in E$ qu'on notera $T(\vec{\varphi})$.

PROPRIÉTÉ DE L'INTÉGRALE.

PROPOSITION 7 - On a : $\langle T(\vec{\varphi}), \vec{e}' \rangle = T(\langle \vec{\varphi}, \vec{e}' \rangle)$ pour tout $\vec{e}' \in E$ et ceci caractérise $T(\vec{\varphi})$. Il suffit de la vérifier sur les éléments de la forme $\varphi \cdot \vec{e}'$ où $\varphi \in \mathcal{H}^m$ et $\vec{e}' \in E$

$$\begin{aligned} \langle T(\varphi \cdot \vec{e}), \vec{e}' \rangle &= \langle T(\varphi) \cdot \vec{e}, \vec{e}' \rangle = T(\varphi) \langle \vec{e}, \vec{e}' \rangle = T(\varphi \langle \vec{e}, \vec{e}' \rangle) = \\ &= T(\langle \varphi \cdot \vec{e}, \vec{e}' \rangle) \end{aligned}$$

PROPOSITION 8 - L'application $(T, \vec{\varphi}, \overleftarrow{e'}) \rightarrow \langle T(\vec{\varphi}), \overleftarrow{e'} \rangle$ est hypo-continue pour : les parties équi continues de $\mathcal{H}^m$, les ensembles bornés de $\tilde{\mathcal{H}}^m(E)$, les parties équi continues de E' .

En effet, lorsque $\vec{\varphi}$ décrit un ensemble borné de $\tilde{\mathcal{H}}^m(E)$ et $\overleftarrow{e'}$ une partie équi continue de E' , les $\langle \vec{\varphi}, \overleftarrow{e'} \rangle$ parcourent une partie bornée de $\mathcal{H}^m$, la formule ci-dessus démontre la propriété dans ce cas. Les autres vérifications sont aussi immédiates, compte tenu de la proposition 7.

PERMUTABILITÉ DE L'INTÉGRATION ET DES APPLICATIONS LINÉAIRES CONTINUES.

Soit v une application linéaire continue de E dans F . Pour $\vec{\varphi} \in \mathcal{H}^m(E)$, $v \circ \vec{\varphi} \in \tilde{\mathcal{H}}^m(F)$, en appelant $v \circ \vec{\varphi}$ la fonction $x \rightarrow v(\vec{\varphi}(x))$ définie sur R^n à valeurs dans F . En effet il est évident que $v \circ \varphi$ est m fois continuellement différentiable, et si $\overleftarrow{f'} \in F'$, $\langle v \circ \vec{\varphi}, \overleftarrow{f'} \rangle = \langle \vec{\varphi}, \overleftarrow{f'} \rangle_v \in \mathcal{H}^m$.

L'application linéaire $\vec{\varphi} \rightarrow v \circ \vec{\varphi}$ de $\tilde{\mathcal{H}}^m(E)$ dans $\tilde{\mathcal{H}}^m(F)$ est continue or sur $\mathcal{H}^m \otimes E$ elle coïncide avec l'application linéaire continue $I_{(\mathcal{H}^m)} \otimes v$, donc on a toujours $v \circ \varphi = (I_{(\mathcal{H}^m)} \otimes v)(\vec{\varphi})$.

Mais alors si $T \in \mathcal{K}^m$, la composée $(T \otimes I_{(F)}) \circ (I_{(\mathcal{H}^m)} \otimes v)$ n'est autre que $T \otimes v$, application linéaire continue de $\tilde{\mathcal{H}}^m(E)$ dans F qui est aussi la composée $v \circ (T \otimes I_{(E)})$. On a donc

$$T(v \circ \vec{\varphi}) = v(T(\vec{\varphi})).$$

PROPOSITION 9 - Si v est une application linéaire continue de E dans F , et $\vec{\varphi} \in \tilde{\mathcal{H}}^m(E)$ alors $v \circ \vec{\varphi} \in \tilde{\mathcal{H}}^m(F)$ et pour toute distribution $T \in \mathcal{H}^{1,m}$ on a $T(v \circ \vec{\varphi}) = v(T(\vec{\varphi}))$.

4. CARACTÉRISATION DE $\tilde{\mathcal{H}}^m(E)$.

THÉOREME 2 - On a $\tilde{\mathcal{H}}^m(E) = \mathcal{H}^m \hat{\otimes}_E E = \mathcal{L}_E(E'_c; \mathcal{H}^m) = \mathcal{L}_E(\mathcal{H}^{1,m}_c; E)$

DÉMONSTRATION - Soit $\vec{\delta}$ l'application $y \rightarrow \delta_x(y)$.

$\vec{\delta}$ peut être considérée comme une fonction à valeurs dans $\mathcal{H}^{1,m}_c$.

Nous avons le lemme : $\vec{\delta}$ est un élément de $\tilde{\mathcal{H}}^m(\mathcal{H}^{1,m}_c)$.

D'abord $\vec{\delta}$ est scalairement dans $\mathcal{H}^m$, en effet soit $\overleftarrow{e'} \in (\mathcal{H}^{1,m}_c)'$, $\overleftarrow{e'} = \psi \in \mathcal{H}^m$.

$\langle \vec{\delta}, \psi \rangle = \psi$ donc $\vec{\delta}$ appartient bien scalairement à $\mathcal{H}^m$. Il reste à vérifier que $\vec{\delta} \in \mathcal{E}^m(\mathcal{H}^{1,m}_c)$, ce qui sera vrai si l'on montre que $\vec{\delta} \in \mathcal{E}^m(\mathcal{H}^{1,m}_c)$. $\vec{\delta}$ est scalairement dérivable. En effet nous avons pour $\psi \in \mathcal{E}^m$: $\langle \vec{\delta}, \psi \rangle = \psi$ donc $D^p_y \langle \vec{\delta}, \psi \rangle = D^p \psi(y) = \langle (-1)^{|p|} D^p_x \vec{\delta}(y), \psi \rangle$

et $(-1)^{|p|} D_x^p \vec{\delta}(y) \in \mathcal{E}'^m$ pour $|p| \leq m$ donc $\vec{\delta}$ est en plus faiblement dérivable dans $\mathcal{E}'_c^m$. Les dérivées de $\vec{\delta}$ sont manifestement faiblement continues. Elles le sont aussi fortement. En effet si y parcourt un compact de $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des $(-1)^{|p|} D_x^p \vec{\delta}(y)$ parcourt un ensemble équicontinu de $\mathcal{E}'^m$ et sur un équicontinu de $\mathcal{E}'^m$ la topologie $\mathcal{E}'_e^m$ et la topologie faible $\mathcal{E}'_c^m$ coïncident (Ascoli). $\vec{\delta}$, considérées comme prenant ses valeurs dans $\mathcal{E}'_c^m$, est donc m fois continuellement différentiable, en vertu du

LEMME : Si E est un espace vectoriel topologique localement convexe muni de deux topologies $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, si $\mathcal{C}_1 \geq \mathcal{C}_2$ et si quelque soit le $\mathcal{C}_1$ -voisinage de 0 , V_1 de E , il existe un $\mathcal{C}_1$ -voisinage W_1 de zéro tel que l'enveloppe convexe $\mathcal{C}_2$ -fermée de tout $\mathcal{C}_1$ -compact de W_1 soit dans V_1 (vérifié si $\mathcal{C}_1$ a un système fondamental de voisinages de 0 convexes et $\mathcal{C}_2$ -fermés, ou si E est $\mathcal{C}_1$ -complet), si $t \rightarrow f(t)$ est une fonction de la variable réelle t continuellement différentiable pour $\mathcal{C}_2$, et que $f'_{\mathcal{C}_2}(t)$ est continue pour $\mathcal{C}_1$ alors $f(t)$ est différentiable pour $\mathcal{C}_1$ et $f'_{\mathcal{C}_2}(t) = f'_{\mathcal{C}_1}(t)$.

Le lemme s'appliquant à une topologie forte et à sa topologie affaiblie, nous concluons donc finalement que

$$\vec{\delta} \in \tilde{\mathcal{H}}^m(\mathcal{H}'_c^m)$$
