

SÉMINAIRE L. DE BROGLIE. THÉORIES PHYSIQUES

V. KHOSIAINOV

La transmission de la chaleur à travers la frontière entre l'hélium I et l'hélium II

Séminaire L. de Broglie. Théories physiques, tome 26 (1956-1957), exp. n° 15, p. 1-9

http://www.numdam.org/item?id=SLDB_1956-1957__26__A13_0

© Séminaire L. de Broglie. Théories physiques
(Secrétariat mathématique, Paris), 1956-1957, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire L. de Broglie. Théories physiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LA TRANSMISSION DE LA CHALEUR À TRAVERS LA FRONTIÈRE
ENTRE L'HÉLIUM I ET L'HÉLIUM II.

(Exposé de V. KHOSIAINOV, le 9.4.1957)

1.- Récemment, V. PECHKOV réussit à observer un phénomène tout à fait nouveau dans la physique de l'hélium liquide : l'existence d'une frontière visible et stable entre les deux modifications de l'hélium liquide (notamment l'hélium I et l'hélium II) à condition qu'un courant stationnaire de chaleur passe la frontière de l'hélium I à l'hélium II. Bien que dans les conditions habituelles, la transition de phase dans l'hélium entre la modification ordinaire et la modification superfluide est de seconde espèce, sur la frontière on peut observer une discontinuité (un saut) de la densité et de la température.

En utilisant les méthodes d'interférence optique, PECHKOV ⁽¹⁾ réussit à mesurer la grandeur du saut et sa dépendance du courant stationnaire de chaleur à travers la frontière. Les résultats expérimentaux sont représentés par la figure 1. On voit bien que si le $\Delta \rho$ (saut de la densité) varie comme le carré de la densité du courant de chaleur, la variation de ΔT (saut de la température) s'exprime par une fonction plus compliquée. Les valeurs de la densité et de la température dans l'hélium en général sont liées par une relation bien connue (cf. l'article de Pechkov) qu'on emploie pour calculer les résultats de l'expérience.

Il est clair que les phénomènes ayant lieu à la surface de contact des phases superfluide et non superfluide, sont d'une extrême complexité. L'existence même de la frontière stable dans un liquide paraît, à première vue, incompréhensible si l'on tient compte qu'il doit sans doute exister une turbulence (une conductivité turbulente de la chaleur) dans l'hélium I. En effet, on sait en hydrodynamique que la frontière entre deux couches d'un liquide ou de deux liquides différents est absolument instable s'il y a mouvement dans le liquide. Dans ces conditions les couches doivent se mélanger immédiatement.

⁽¹⁾ V. PECHKOV.- Žurnal eksperimental'noj i teoretičeskoj Fiziki (J.E.T.P.), 30, 1956, 581 p.

Le problème de la transmission de l'énergie thermique de l'hélium I à l'hélium II (où, si l'on veut, d'un liquide "classique" à un liquide "quantique") se pose donc.

2.- Nous allons tenter une explication du phénomène observé qui en décrive les propriétés essentielles, et nous allons voir que le mécanisme qui détruit habituellement la frontière entre les deux couches de liquide est précisément celui qui en assure la stabilité.

Conformément au point de vue contemporain, l'hélium II est un liquide quantique. Sa propriété essentielle est qu'il reste liquide (à cause de la faiblesse des interactions entre ses atomes) jusqu'à une température assez basse pour que les effets quantiques se manifestent. Quand la longueur d'onde du mouvement thermique tend vers les dimensions atomiques, on ne peut plus considérer les atomes séparément. On doit parler d'un système quantique indivisible, composé d'atomes. Dans ce système peuvent s'effectuer des mouvements collectifs quantifiés, dont l'énergie constituera l'énergie thermique du milieu. Etant quantifiées, ces excitations possèdent certaines propriétés corpusculaires, ce sont des quasi-particules : des phonons et des rotons qui diffèrent par leur spectre d'énergie. La compatibilité avec l'expérience est atteinte si on suppose pour les phonons l'expression usuelle

$$(1) \quad \xi = c p$$

et pour les rotons le spectre suivant :

$$(2) \quad \xi = \Delta + \frac{(p-p_0)^2}{2\mu}$$

Il faut remarquer que, pour les températures proches de T_λ un spectre plus simple (sans p_0) a été utilisé avec succès dans le premier travail de Landau, et ce n'est que pour les températures plus basses, que l'introduction du troisième paramètre est devenue nécessaire.

L'état du liquide est caractérisé par le nombre et l'énergie des quasi-particules. Ce point de vue exprime le modèle phénoménologique à deux composantes de l'hélium liquide. En effet, la partie normale de la densité $\rho = \rho_n + \rho_s$ est constituée par les excitations, tandis que le liquide non excité reste superfluide. On a démontré qu. jusqu'à 0, 6° K. ce sont les phonons qui jouent le rôle prépondérant, alors qu'entre cette température et $T_\lambda = 2,18^\circ \text{ K}$ la contribution des phonons est négligeable : ce sont les rotons qui jouent le rôle principal.

Les mécanismes de la transmission de chaleur dans l'hélium I et II sont différents en principe (l'hélium II étant super-conducteur de chaleur). Dans le liquide normal, s'effectue une transmission classique de la chaleur, qui peut être compliquée par les effets de convection et de la turbulence. En résultat, nous aurons un gradient moyen de température, d'où la formule exprimant ce courant de chaleur :

$$(3) \quad q = - \kappa \nabla T .$$

D'autre part, l'entropie de l'hélium superfluide est déterminée par la distribution des quantas d'excitation. Si le "gaz" des quantas est en repos, il n'y a pas de transport macroscopique de l'entropie. Le transfert de la chaleur est effectué par la partie normale du liquide. Le courant thermique dans l'hélium II, c'est le courant des quantas d'excitation. La chaleur possède donc dans ce cas la propriété d'inertie. Même quand il n'y a pas de transport de masse dans l'hélium :

$$(4) \quad j = \rho_n \vec{v}_n + \rho_s \vec{v}_s = 0$$

dans l'hélium liquide peuvent exister deux mouvements contraires $\rho_n \vec{v}_n = - \rho_s \vec{v}_s$ qui constituent le mécanisme convectif original de conductivité. Le courant de chaleur dans l'hélium II s'exprime par

$$(5) \quad \vec{q} = \rho \sigma T \vec{v}_n$$

où σ est l'entropie d'un gramme d'hélium, T la température, ρ la densité, et $\vec{v}_n$ la vitesse de la partie normale du liquide. Du point de vue phénoménologique, sur la frontière en question, ont lieu d'une part l'absorption de la partie superfluide, et d'autre part la production de la partie normale de liquide, c'est-à-dire des quantas d'excitation.

Le long de l'hélium II, dont on connaît les propriétés superconductives, la température T_0 est pratiquement constante ; elle se trouve naturellement au-dessous du point T_λ . On peut dire qu'elle est définie par la densité du courant thermique que l'hélium doit transmettre, parce que la densité normale (densité moyenne des rotons) est une fonction bien déterminée de la température.

3.- Considérons dans l'hélium II un système de rotons défini par la densité moyenne $n_0(T_0)$. L'interaction entre les rotons est inconnue. Pour la température en question elle doit être grande parce que la densité des rotons étant élevée, un atome peut participer, dans le même temps, à plusieurs mouvements collectifs (c'est-à-dire aux rotons). Nous supposons néanmoins que l'énergie d'interaction des rotons est

inférieure au Δ sinon on ne pourrait pas parler d'un roton comme d'une quasi-particule distincte. Nous supposons d'autre part que la forme du spectre d'énergie des rotons reste la même, et que, seules les valeurs de Δ et de μ varient avec la température.

Le mécanisme proposé de naissance des quasi-particules, sur la frontière entre les deux modifications de l'hélium, repose essentiellement sur la formation, dans les régions voisines de la frontière, de systèmes composés possédant une densité d'énergie plus grande que celle du milieu qui les entoure. En réalité, ces systèmes peuvent être, par exemple, des gouttes d'hélium I dans le milieu d'hélium II, provenant du broiement des couches voisines de la frontière, broiement provoqué par la non-stabilité hydrodynamique de cette frontière. La fréquence de production de ces systèmes composés, par seconde et par cm^2 de surface, dépend des propriétés hydrodynamiques du liquide, et de la tension superficielle qui agit à la surface. Cette tension est, dans notre cas, très petite. Nous n'allons pas ici développer la théorie hydrodynamique de la décomposition de la couche voisine de la frontière en gouttelettes. Désignons par ν la fréquence recherchée. La grandeur des gouttelettes en question peut suggérer les remarques suivantes. Il est clair que les dimensions linéaires du système composé ne peuvent pas être inférieures à la longueur d'onde de de Broglie du roton λ_r parce qu'autrement on ne pourrait pas parler de la désintégration du système en quasi-particules. D'autre part, ces dimensions ne peuvent pas être plus grandes que la longueur du libre parcours du roton dans le milieu ℓ_r . Dans ce cas, la goutte pourrait bien se comporter comme un morceau d'hélium II, en effectuant la transmission de la chaleur par le mécanisme quantique. De là, la condition : $\lambda_r < L < \ell_r$.

Le système composé qui satisfait à ces conditions possède un temps de vie moyen, qui est forcément limité par les grandes interactions dans le champ des rotons ; puis ce système se désintègre, et son énergie se transmet dans un certain nombre de particules (rotons). Le nombre de rotons par cm^3 excédant la densité moyenne des rotons pour la température T_0 est emporté immédiatement par le courant de chaleur. Ainsi s'établit le processus stationnaire du passage de la chaleur à travers la frontière et le mécanisme du changement de caractère du mouvement thermique.

La probabilité de la désintégration du système composé en n rotons peut être calculée par les méthodes bien connues, selon l'approche par E. Fermi, du problème analogue de la production des mesons dans une collision de nucléons de grande énergie. Nous considérons la probabilité relative des états finaux de la désintégration du système comme déterminée par la densité de ces états ; l'argument habituel est fondé

sur l'existence d'une grande interaction entre les particules grâce à laquelle l'équilibre dans le système est vite atteint. Ce qui permet d'égaliser à 1 l'élément de matrice dans la formule :

$$(6) \quad P = \frac{2\pi}{h} |M|^2 \rho(W)$$

La densité $\rho(W)$ dépend de la grandeur du volume dans l'espace de phase accessible aux particules dans l'état final de l'énergie W , compte tenu des restrictions dues aux lois de conservation. On peut montrer alors que la formule de probabilité relative de désintégration en n particules est la suivante :

$$(7) \quad S_{(n)} = \frac{V^{n-1}}{(2\pi h)^{3(n-1)}} \frac{d}{dW} \int \prod_{i=1}^{n-1} d\vec{p}_i = \frac{V^{n-1}}{(2\pi h)^{3(n-1)}} \frac{d}{dW} Q_n(W)$$

où Q est un volume dans l'espace de $3(n-1)$ dimensions, calculé en tenant compte du fait que l'énergie du système est $\leq W$. Le calcul de cette formule dépend essentiellement de la forme du spectre d'énergie des particules produites. Pour le spectre habituel des rotons (sans p_0), on obtient l'expression

$$(8) \quad S_n(W) = \frac{\tau^{n-1}}{\Delta \cdot n!} \cdot \frac{\frac{3n-5}{2} (W-n)}{n^{3/2} \Gamma(\frac{3n-3}{2})}, \quad W = \frac{W}{\Delta}$$

ici, τ est un paramètre sans dimensions (qui joue le rôle du volume) formé par les constantes du spectre d'énergie :

$$(9) \quad \tau = \left(\frac{\mu\Delta}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{V}{h^3}$$

D'autres formules (que nous ne noterons pas ici) peuvent être obtenues pour des spectres d'énergie différents. Le facteur $n!$ en dénominateur provient du fait que les particules sont identiques dans le sens de la mécanique quantique.

La probabilité absolue sera :

$$(10) \quad P_n(W) = \frac{S_n(W)}{\sum S_n(W)}$$

d'où l'on peut déduire le nombre moyen de particules produites dans une désintégration

$$(11) \quad \bar{n}(w) = \sum_n n P_n(w) = \frac{\sum_n n S_n}{\sum_n S_n}$$

En tenant compte que, dans notre cas : $n S_n = \frac{d}{d\tau} \tau S_n$, nous pouvons écrire :

$$(12) \quad \bar{n}(w) = \frac{\tau d}{d\tau} \log Z(\tau, w) ; Z(\tau, w) = \tau \cdot \sum_n S_n(w)$$

où la sommation comprend tous les états finaux accessibles. Il nous faut maintenant effectuer la sommation. Malheureusement, elle ne peut l'être exactement. Approximativement, nous pouvons utiliser la formule connue d'Euler-Mc Loren qui, dans notre cas, comme on peut le voir facilement, s'applique parfaitement. En effet, $S_n(w)$ comme fonction de n , possède un maximum prononcé quelque part dans l'intervalle de variation de n , ce qui rend petits les termes supplémentaires de l'expression d'Euler-Mc Loren. Maintenant, nous avons affaire à une intégrale dont l'intégrant est :

$$(13) \quad f(x) = \frac{\tau^x (w-x)^{\frac{3x-5}{2}}}{x^{3/2} \Gamma(x+1) \Gamma(\frac{3x-3}{2})} = e^{\varphi(x)}$$

En développant $\varphi(x)$ en séries, près du point de maximum, nous obtenons

$$(14) \quad \int f(x) dx = f(x_0) \int e^{\varphi(x) - \varphi(x_0)} dx ,$$

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \frac{(x-x_0)^2}{2!} \varphi''(x_0) + \dots$$

Mais les dérivées de la fonction $\varphi(x)$ sont :

$$(15) \quad \begin{aligned} \varphi(x) &= x \log \tau + \chi(x) , \\ \varphi'(x) &= \log \tau + \chi'(x) \\ \varphi''(x) &= \chi''(x) \end{aligned}$$

Nous voyons que déjà la seconde dérivée ne dépend pas de τ . Si nous calculons maintenant le nombre moyen de particules, nous obtenons l'expression suivante :

$$(16) \quad \bar{n} = \tau \frac{d}{d\tau} \varphi(x_0) = \tau \frac{d}{d\tau} [x_0 \log \tau + \chi(x_0)] = x_0 + 0 \left(\frac{1}{\tau}\right)$$

On voit que le terme principal n'est autre que le point de maximum pour lequel nous avons l'équation :

$$(17) \quad \text{Log } z + \frac{3}{2} \text{Log}(w-x_0) - \frac{3x_0^{-5}}{2(w-x_0)} - \frac{3}{2x_0} - \Psi(x_0+1) - \frac{3}{2} \Psi\left(\frac{3x_0-3}{2}\right) = 0$$

Cette équation transcendante peut être résolue, soit numériquement, soit approximativement, en remplaçant $x_0 = wt$, d'où

$$(18) \quad 3 \text{Log}(1-t) - 5 \ell_n t - \frac{3t}{1-t} = 2 \text{Log } \frac{w}{t} + 3 \ell_n \frac{3}{2}$$

et, tenant compte que les valeurs de t donnant les solutions de l'équation sont petites ($\leq 0,4$) et développant en puissances de t , on trouve :

$$(19) \quad t^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{3}{w}\right)^2 (1-t)^3 e^{-\frac{3t}{1-t}}$$

de là découle la formule recherchée pour x_0

$$(20) \quad x_0 = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{5}} \left(\frac{3}{w}\right)^{\frac{2}{5}}}{1 + 6/5 \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{5}} \left(\frac{3}{w}\right)^{\frac{2}{5}}}$$

Remarquons qu'au cas où les particules sont considérées comme non-identiques, au lieu de la formule précédente, nous trouvons une expression linéaire $x_0 = w \cdot t_0$ où t_0 ne dépend pas de w .

Enfin dans le cas asymptotique de grande énergie w on obtient pour le nombre moyen des rotons produits dans une désintégration d'un système composé l'expression suivante :

$$(21) \quad \bar{n}(w) \sim \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{5}} \left(\frac{3}{w}\right)^{\frac{2}{5}}$$

Cette expression peut être considérée comme d'autant plus valable que le saut de la température est plus grand sur la frontière, parce que la différence des densités d'énergie dans le système composé (gouttelette) et dans le milieu qui l'entoure, est déterminée par la différence des températures entre l'hélium I et l'hélium II. C'est dans ce cas asymptotique de grande énergie contenue dans le système, qu'est

justement le mieux applicable la méthode proposée. Dans la première approximation, on peut évaluer l'énergie libérée par le système composé au $c(T-T_0)$. Multiplions maintenant le nombre moyen de rotons produits dans une désintégration par l'énergie moyenne des rotons dans le milieu de l'hélium II et par la fréquence des formations de systèmes composés. On obtient alors la densité du courant de chaleur à travers la frontière.

$$(22) \quad q = \left(\frac{2}{3}\right)^{3/5} \bar{\epsilon}^{3/5} \bar{v} \cdot w^{3/5}$$

De là, on tire l'expression de la différence de température :

$$(23) \quad \Delta T = T - T_0 = \frac{3}{2c \bar{\epsilon}^{2/3} (\bar{v} \cdot \Delta)^{5/3}} \cdot q^{5/3}$$

4.- La comparaison de cette loi des $5/3$ avec l'expérience montre la compatibilité avec l'expérience pour les courants assez grands. L'accord avec l'expérience peut être considéré comme satisfaisant dans le cadre des approximations faites dans le développement de la théorie. Le calcul numérique des formules d'autre part, sera certainement utile pour établir la fonction $\Delta T(q)$ pour toutes les valeurs de q . Remarquons que le même calcul effectué pour le cas des particules non identiques donne une loi tout à fait différente, qui diverge avec l'expérience, ce qu'on pouvait prévoir.

L'idéalisation du problème consistait à supposer que les propriétés des liquides des deux côtés de la frontière étaient différentes en principe : l'un classique, l'autre quantique, ce qui ne peut pas être exact aux environs du point λ .

L'approfondissement de la théorie peut être effectué dans plusieurs directions. Il faut, par exemple, prendre en considération, le fait que l'expansion de l'énergie contenue dans les systèmes composés s'effectue non pas dans le vide, mais dans un milieu avec une densité de rotons. En première approximation, on peut tenir compte de cet effet en introduisant la notion du libre parcours. D'autre part, il est nécessaire de calculer la fréquence de formation des gouttelettes, qui doit dépendre de la tension superficielle qui, elle-même, dépend de la différence des densités, c'est-à-dire de la différence des températures. Nous ne développerons pas plus avant la théorie ; nous nous bornerons à remarquer que les résultats du calcul précédent prouvent que le mécanisme essentiel du phénomène est saisi par la théorie.

