

SÉMINAIRE L. DE BROGLIE. THÉORIES PHYSIQUES

A. VISCONTI

Renormalisation et états de masses des particules

Séminaire L. de Broglie. Théories physiques, tome 25 (1955-1956), exp. n° 10, p. 1-12

http://www.numdam.org/item?id=SLDB_1955-1956__25__A9_0

© Séminaire L. de Broglie. Théories physiques
(Secrétariat mathématique, Paris), 1955-1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire L. de Broglie. Théories physiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RENORMALISATION ET ETATS DE MASSES DES PARTICULES

par A. VISCONTI.

(H. UMEZAWA and A. VISCONTI : Renormalisation and Mass-levels, Nuclear Phys., 1, 1956 p. 20)

Il est un problème que l'on peut raisonnablement se poser pour toutes les théories quantiques ayant des application, c'est le suivant : "Est-ce que l'opérateur de masse $P_\mu P_\mu$ (P_μ vecteur impulsion-énergie) a-t-il une seule valeur propre ou bien en a-t-il plusieurs ? "

On ne sait évidemment pas résoudre ce problème ni pour l'électromagnétisme ni pour aucune autre théorie mésique, mais on a un modèle, assez grossier d'ailleurs, celui de Lee, où on sait le résoudre.

Nous allons diviser cet exposé en 3 parties :

- 1.- Electromagnétisme quantique à un seul état de masse de l'électron.
- 2.- Extension au cas où plusieurs états de masse existent.
- 3.- Application au modèle de Lee (T.D LEE, Phys. Rev., 95, 1954, p. 1329 ; G. KALLEN and W. PAULI, Det. Kgl. Danske., Festkrift til Niels BOHR, 1955, N° 7).

1.- Electromagnétisme quantique à 1 seul état de masse de l'électron.

- Quantités non renormalisées indiquées par $\hat{}$: $\hat{\Psi}$, $\hat{A}$, $\hat{e}$, $\hat{m}$
- Quantités renormalisées : Ψ , A , e , m .

La renormalisation consiste en 3 changements d'échelles :

- 1) changement d'échelle de la fonction d'ordre du fermion :

$$(1) \quad \Psi(x) = Z_2^{-\frac{1}{2}} \hat{\Psi}(x) \quad , \quad \bar{\Psi}(x) = Z_2^{-\frac{1}{2}} \hat{\bar{\Psi}}(x) \quad : \quad Z_2 \text{ supposé réel}$$

permet de passer de la fonction d'onde de l'électron "nu" à l'électron avec son nuage de photons.

2) changement d'échelle de la fonction d'onde du photon :

$$(2) \quad A(x) = Z_3^{-\frac{1}{2}} \hat{A}(x) \quad : Z_3 \text{ réel}$$

permet de passer du photon nu au photon avec son usage de paires d'électrons.

3) changement d'échelle intéressant la charge par l'intermédiaire du diagramme sommet corrigé :

$$\Gamma(z, x, x') = Z_1^{-1} \hat{\Gamma}(z, x, x')$$

c'est-à-dire

$$e \bar{\Psi}(x) A(z) \Psi(x') = Z_1^{-1} e \hat{\bar{\Psi}}(x) \hat{A}(z) \hat{\Psi}(x')$$

d'où

$$(3) \quad e = Z_1^{-1} Z_2 Z_3^{\frac{1}{2}} \hat{e} .$$

Le lagrangien non renormalisé est invariant de jauge :

$$\hat{\Psi} \longrightarrow \hat{\Psi}' = e^{-ie \hat{A}} \hat{\Psi} \quad , \quad \hat{A} \longrightarrow \hat{A}' = A + \frac{\partial \hat{\Lambda}}{\partial x_\mu}$$

et il doit en être de même pour celui renormalisé :

$$\Psi' = e^{-i Z_1 Z_2^{-1} Z_3^{-\frac{1}{2}} \hat{\Lambda}} \Psi \quad ; \quad A' = A + \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left\{ Z_3^{-\frac{1}{2}} \hat{\Lambda} \right\}$$

d'où

$$\Lambda = Z_3^{-\frac{1}{2}} \hat{\Lambda} \quad ; \quad Z_1 Z_2^{-1} = 1$$

d'où

$$(4) \quad Z_1 = Z_2$$

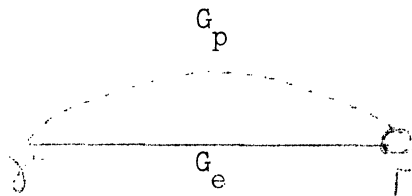
Enfin, Z_2 et Z_3 représentant de probabilités, il faut que :

$$(5) \quad 0 \leq Z_1, Z_3 < 1 .$$

Comment se présente la renormalisation de masse ? Le propagateur d'un électron a pour forme dans l'espace des moments :

$$(6) \quad G^{-1}(p) = -i Z_2^{-1} (i \gamma p + m + \mathcal{M}(-i \gamma p)) \equiv i Z_2^{-1} (-i \gamma p - m - \mathcal{M}(-i \gamma p))$$

m : masse mécanique, $\mathcal{M}(-i \gamma p)$ noyau opérateur de masse représenté par le diagramme



soit m' la masse expérimentale :

$$(7a) \quad \mathcal{M}(-i\gamma p) = Z_2 [A + B(i\gamma p + m') + (i\gamma p + m') \sum_c (i\gamma p)] \cdot$$

ou changeant $-i\gamma p$ en x :

$$(7b) \quad \mathcal{M}(x) = Z_2 [A + B(-x + m') + C(-x + m') \sum_c (-x)]$$

le facteur Z_2 provient du sommet gauche non renormalisé, $\sum_c$ quantité finie.

On a :

$$(8) \quad \begin{aligned} a) \quad Z_2 A &\equiv \delta m = \mathcal{M}(m') \\ b) \quad Z_2 B &= - \left. \frac{\partial \mathcal{M}(x)}{\partial x} \right|_{x = +m'} \quad \text{on remplace } -i\gamma p \text{ par } x. \end{aligned}$$

avec :

$$m' = m + \delta m = m + \mathcal{M}(m')$$

donc masse expérimentale m' racine de l'équation :

$$(9) \quad x - m - \mathcal{M}(x) = 0.$$

Le propagateur s'écrit :

$$\begin{aligned} G^{-1}(p) &= i Z_2^{-1} (-i\gamma p - m - \delta m - Z_2 B(i\gamma p + m') - (i\gamma p + m') \sum_c (i\gamma p)) = \\ &= -i Z_2^{-1} (i\gamma p + m') (1 + Z_2 B + Z_2 \sum_c (i\gamma p)) \end{aligned}$$

Déterminons Z_2 de telle sorte que :

$$(10) \quad 1 + Z_2 B = Z_2$$

$G^{-1}(p)$ ne contient plus d'infini et s'écrit :

$$(11) \quad G^{-1}(p) = -i(i\gamma p + m') (1 + \sum_c (i\gamma p))$$

10 et 8b donnent :

$$(12) \quad Z_2 = 1 - \left. \frac{\partial \mathcal{M}(x)}{\partial x} \right|_{x = +m'} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ x - m - \mathcal{M}(x) \right\}_{x = +m'}.$$

2.- Etude d'une théorie à plusieurs états de masse.

On considère une théorie à plusieurs états de masse où :

$$(13) \quad P_{\mu}^2(m_j^2) = (\bar{p}^2 - p_0^2) \Big|_{m_j^2} > = m_j^2 \Big|_{m_j^2} >$$

P_μ vecteur impulsion-énergie, le spectre de P_μ^2 est supposé être la réunion de deux spectres : un discret :

$$m_1 < m_2 < \dots m_N \leq C$$

un spectre continu.

Le propagateur dans l'espace des impulsions

$$(14) \quad G(p) = \frac{-i}{-i\gamma p - m - \mathcal{M}(-i\gamma p)}$$

correspond à la fonction du nombre $x (x \rightarrow -i\gamma p)$:

$$(15) \quad \frac{-i}{x - m - \mathcal{M}(x)} .$$

Les racines de :

$$(16) \quad x - m - \mathcal{M}(x) = 0$$

qui sont en même temps valeurs propres appartenant au spectre discret de P_μ^2 définissent les états de masse de la théorie. Nous supposons que $m_1 \dots m_N$ sont ces racines et qu'elles sont toutes simples.

D'autre part :

$$(17) \quad \frac{1}{x - m - \mathcal{M}(x)} = \frac{1}{a(x)} \prod_{j=1}^N \frac{1}{x - m_j} = \frac{1}{a(x)} \sum_{j=1}^N \frac{b_j}{x - m_j}$$

$a(x)$ ne s'annule par aucun des m_j . Une identification du produit

$$\prod_{j=1}^N \frac{1}{x - m_j} \text{ avec } \sum_{j=1}^N \frac{b_j}{x - m_j} \text{ donne :}$$

$$(18) \quad b_j = \prod_{p=1}^N \frac{1}{m_j - m_p} = \frac{a(m_j)}{\frac{\partial}{\partial x} \{x - m - \mathcal{M}(x)\} \big|_{x=m_j}} = Z_j a(m_j)$$

Posant d'autre part :

$$(19) \quad a(x) = x a_1(x^2) - a_2(x^2) \quad \begin{array}{l} a_1(x^2) \text{ fonction impaire} \\ a_2(x^2) \text{ fonction paire} \end{array}$$

on a finalement :

$$(20) \quad \frac{1}{x - m - \mathcal{M}(x)} = \frac{x a_1(x^2) + a_2(x^2)}{x^2 a_1^2 - a_2^2} \sum b_j \frac{x + m_j}{x^2 - m_j^2}$$

revenant à $x = -i\gamma p$:

$$(21) \quad \frac{1}{-i\chi p - m - \mathcal{U}(-i p)} = \frac{-i\chi p a_1(p^2) + a_2(-p^2)}{p^2 a_1^2(-p^2) + a_2^2(-p^2)} \sum b_j \times \frac{-i\chi p + m_j}{p^2 + m_j^2}$$

Revenant à l'espace x , il vient :

$$(22) \quad G(x) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int_L \frac{e^{ipx}}{-i\chi p - m - \mathcal{U}(-i\chi p)} d^4 p =$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^4} \int_L e^{ipx} \frac{i\chi p a_1 - a_2}{p^2 a_1^2 + a_2^2} \sum b_j \frac{i\chi p - m_j}{p^2 + m_j^2} d^4 p.$$

Quel que soit le contour d'intégration, nous devons le compléter par le demi-cercle de l'infini, par des coupures de façon à ce que le premier facteur soit holomorphe et enfin par des circonférences autour des points $p_0 = \pm \sqrt{p^2 + m_j^2}$ avec $\pm$ suivant que $x_0 = -ix_4 \gtrless 0$. Ces dernières intégrations peuvent se faire suivant l'axe réel si on y ajoute le facteur $\delta_+(p^2 + m_j)$ à chacune de ces intégrales.

On a alors :

$$(23) \quad G(x) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int e^{ipx} \frac{i\chi p a_1 - a_2}{p^2 a_1^2 + a_2^2} \sum b_j \frac{i\chi p - m_j}{p^2 + m_j^2} \delta_+(p^2 + m_j^2) d^4 p$$

$$+ \frac{-i}{(2\pi)^4} \int_C \dots \dots \dots d^4 p$$

le chemin C représentant la réunion de tous les chemins qui ne sont pas inclus dans la première intégrale.

La première intégrale de 23, compte tenue de δ_+ s'écrit :

$$(24) \quad \frac{-i}{(2\pi)^4} \sum b_j \int e^{ipx} \frac{i\chi p a_1(m_j^2) - a_2(m_j^2)}{-m_j^2 a_1^2(m_j^2) + a_2^2(m_j^2)} \frac{i\chi p - m_j}{p^2 + m_j^2} \delta_+(p^2 + m_j^2) d^4 p$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^4} \sum b_j \int e^{ipx} \frac{1}{m_j a_1(m_j) - a_2(m_j^2)} \frac{i\chi p - m_j}{p^2 + m_j^2} \delta_+(p^2 + m_j^2) d^4 p$$

$$= + \sum \frac{b_j}{a(m_j^2)} S_F(m_j; x).$$

ou bien :

$$\begin{aligned}
 (25) \quad G(x) &= \frac{-i}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{ipx}}{-i\gamma p - m - \mathcal{B}(-i p)} d^4 p \equiv \\
 &\equiv \frac{1}{(2\pi)^4} \sum Z_j \int e^{ipx} \frac{a(m_j)}{a(i\gamma p)} \frac{1}{i\gamma p + m_j} d^4 p = \sum Z_j \frac{a(m_j)}{a(m_j^2)} S_c(x, m_j) + \\
 &+ \frac{1}{(2\pi)^4} \int_C \dots \dots \dots d^4 p
 \end{aligned}$$

Nous allons écrire la contribution du pôle m_j sous une autre forme en considérant le système de vecteurs propres : p de P_μ :

$$P_\mu |p\rangle = p_\mu |p\rangle$$

pour $x_0 - x'_0 > 0$ on a par définition :

$$\begin{aligned}
 (26) \quad G(x - x') &= \langle 0 | \Psi(x) \bar{\Psi}(x') | 0 \rangle = \sum_p \langle 0 | \Psi(x) | p \rangle \langle p | \bar{\Psi}(x') | 0 \rangle \\
 &= \sum_p \langle 0 | \Psi(0) | p \rangle \langle p | \bar{\Psi}(0) | 0 \rangle e^{ip(x-x')}
 \end{aligned}$$

puisque l'équation d'onde de $\Psi(x) : \frac{\partial \Psi}{\partial x_\mu} = i [P_\mu, \Psi(x)]$ a pour solution

$$(27) \quad \Psi(x) = e^{iP_\mu x_\mu} \Psi(0) e^{-iP_\mu x'_\mu}.$$

La contribution des impulsions $\mathcal{P}^{(j)}$ telles que :

$$(28) \quad \mathcal{P}_\mu^{(j)} \mathcal{P}_\mu^{(j)} = -m_j^2$$

est donc :

$$(29) \quad \sum_{(j)} \langle 0 | \Psi(0) | \mathcal{P}^{(j)} \rangle \langle \mathcal{P}^{(j)} | \bar{\Psi}(0) | 0 \rangle e^{i \mathcal{P}^{(j)}(x-x')}$$

que nous écrirons sous la forme :

$$(30) \quad \sum e^{i \mathcal{P}^{(j)}(x-x')} (i \gamma \mathcal{P}^{(j)} + m_j) \lambda(m_j^2).$$

D'après (25) la contribution du pôle m_j est :

$$Z_j \frac{a(m_j)}{a(m_j^2)} S_F(x - x', m_j)$$

pour $x_0 - x'_0 > 0$, cette expression s'écrit :

$$\begin{aligned}
 (31) \quad \frac{1}{(2\pi)^3} \sum \frac{b_j}{a(m^2_j)} \int e^{i[\mathcal{P}(x-x') - \mathcal{P}_0^{(j)}(x_0-x'_0)]} \frac{(i \mathcal{P}_0^{(j)} + m_j)}{\mathcal{P}_0^{(j)}} d^3 \mathcal{P}_0^{(j)} \\
 = \frac{1}{V} \sum_{\mathcal{P}_j} \frac{b_j}{a(m^2_j)} \frac{(i \mathcal{P}_0^{(j)} + m_j)}{\mathcal{P}_0^{(j)}} e^{i \mathcal{P}_0^{(j)}(x-x')}
 \end{aligned}$$

par suite :

$$(32) \quad \frac{1}{V} \frac{b_j}{a(m^2_j) \mathcal{P}_0^{(j)}} = \lambda(m_j)$$

Or il est facile de voir que $\lambda(m_j) > 0$, par suite :

1) $a(m^2_j)$ doit être imaginaire pur, si $a(x) = \mathcal{R}a(x) + i \mathcal{I}a(x)$, la formule de Hilbert donne

$$(33) \quad \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{R}a(\xi)}{\xi - m^2_j} d\xi = 0.$$

2) b_j d'après (18) change de signe chaque fois que j varie d'une unité ; par suite $a(x)$ doit changer de signe chaque fois que x passe pour une des valeurs $m_1, m_2, \dots, m_N$. Il doit donc avoir des zéros ou des singularités dans chaque intervalle $m_1, m_2, \dots$. Mais si $m_1, m_2, \dots$ sont les seules racines du propagateur pour $x \leq 0$, il s'ensuit que $a(x)$ doit avoir des singularités dans ces domaines. Si de plus $a(x)$ est holomorphe dans ce domaine, il y a là une contradiction évidente : l'hamiltonien cesse d'être hermitien et par suite la matrice S cesse d'être unitaire. En effet, prenons la trace de (34) :

$$\lambda(m^2_j) = \frac{1}{4m_j} \text{tr} \langle 0 | \Psi_\alpha(0) | \mathcal{P}^{(j)} \rangle \langle \mathcal{P}^{(j)} | \bar{\Psi}_\beta(0) | 0 \rangle$$

et par suite :

$$b_j \sim \frac{1}{4m_j} \text{tr} \langle 0 | \Psi_\alpha(0) | \mathcal{P}^{(j)} \rangle \langle \mathcal{P}^{(j)} | \Psi_\beta(0) | 0 \rangle$$

avec un facteur de proportionnalité positif. Chaque fois donc qu'on rencontre un b_j négatif $\bar{\Psi}$ n'est pas le conjugué de Ψ

Remarque : Calculons : $\lambda(m^2_j)$, on a :

$$(34) \quad \langle 0 | \Psi_\alpha(0) | \mathcal{P}^{(j)} \rangle \langle \mathcal{P}^{(j)} | \Psi_\beta(0) | 0 \rangle = (i\gamma^0 \mathcal{P}^{(j)} + m_j)_{\alpha\beta} \lambda(m^2_j)$$

pas de sommations sur $\mathcal{P}^{(j)}$. Multiplions à droite et gauche respectivement par :

$$i(\gamma_\rho)_{\mu\alpha} \mathcal{P}^{(j)}_\rho \quad \text{et} \quad -i(\gamma_\sigma)_{\beta\nu} \mathcal{P}^{(j)}_\sigma$$

il vient :

$$0 \leq (\gamma_\rho)_{\mu\alpha} \mathcal{P}^{(j)}_\rho \langle 0 | \Psi_\alpha(0) | \mathcal{P}^{(j)} \rangle \langle \mathcal{P}^{(j)} | \Psi_\beta^\dagger(0) | 0 \rangle (\gamma_4)_{\beta\rho} (\gamma_\sigma)_{\rho\nu} \mathcal{P}^{(j)}_\sigma$$

expression positive puisque produit de matrices adjointes. Effectuons les produits et prenant les traces ; il vient :

$$\lambda(m^2_j) > 0 \quad .$$

3.- Modèle de Lee.

3 types de particules : Ψ_V , Ψ_N , φ pour les particules θ :

$$(35a) \quad \mathcal{H}_0 = m_V \bar{\Psi}_V \Psi_V + m_N \bar{\Psi}_N \Psi_N + \frac{1}{2} \{ (\partial_\mu \varphi)^2 + \mu^2 \varphi \}$$

$$(35b) \quad \mathcal{H}_1 = g(\bar{\Psi}_V \Psi_N \varphi^+ + \bar{\Psi}_N \Psi_V \varphi^-)$$

le premier terme de $\mathcal{H}_1$ correspond à :

$$(36a) \quad N + \theta \longrightarrow V$$

le deuxième à :

$$(36b) \quad V \longrightarrow N + \theta$$

la seule réaction possible est donc la transmutation de V en N et θ .

Le calcul des corrections radiatives par les propagateurs $G_V^{(0)}(p)$, $G_N^{(0)}$, $G_\varphi^{(0)}$ se font commodément en schéma d'interaction.

Les équations d'ondes sont :

$$i \frac{\partial \Psi_V}{\partial t} = m_V \Psi_V \quad , \quad i \frac{\partial \Psi_N}{\partial t} = m_N \Psi_N \quad ; \quad (\square - \mu^2) \varphi = 0$$

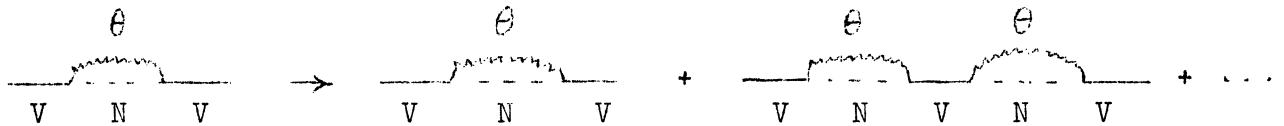
les propagateurs non corrigés peuvent s'écrire en représentation p :

$$(37) \quad G^{(0)}(p_0) = \frac{1}{p_0 - m_V + i\epsilon} \quad ; \quad G_N^{(0)}(p_0) = \frac{1}{p_0 - m_N + i\epsilon} \quad ; \quad G^{(0)}(p) = - \frac{1}{p_\mu^2 + \mu^2}$$

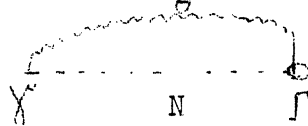
m_V , m_N , μ sont les masses expérimentales.

$G_N^{(0)}$ et $G_\theta^{(0)}$ n'ont pas de corrections radiatives, car ni N ni θ ne peuvent se désintégrer.

La correction radiative à apporter au propagateur $G_V^{(0)}$ est donné par l'itération du diagramme.



Le noyau de l'opérateur de masse correspond au diagramme :



les propagateurs G_N et G_θ sont corrigés, d'autre part $\Gamma = \gamma$ puisque comme on l'a dit N et θ ne peuvent rien émettre.

On a :

$$\mathcal{M}(x) = G_N(x) \cdot G_\theta(x)$$

dont le transformé de Fourier est :

$$(38) \quad \mathcal{M}(p_0) = -g^2 \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{\omega(\omega - p_0 + m_N)}$$

où :

$$g \text{ est mis pour } g/2\pi$$

$$\omega = \sqrt{k^2 + \mu^2}.$$

$\mathcal{M}(p_0)$ est infini .

Considérons le propagateur $G_V(p_0)$ en schéma de Heisenberg :

$$(39) \quad G_V^{-1}(p_0) = p_0 - m_V - \mathcal{M}(p_0)$$

Nous désignons maintenant par m_V la masse mécanique $= m_V' - \delta m_V'$ de sorte que en vertu de (8a) :

$$(40) \quad G_V^{-1}(p_0) = [p_0 - m_V' + \delta m_V' - \mathcal{M}(p_0)] = [p_0 - m_V' + \mathcal{M}(m_V') - \mathcal{M}(p_0)]$$

$$= (p_0 - m_V') \left(1 + g^2 \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{\omega(\omega - p_0 + m_N)(\omega - m_V' + m_N)} \right)$$

Cherchons la condition pour^{que} $G_V^{-1}(p_0)$ définisse une deuxième masse m_V'' :
 $G_V^{-1}(m_V'') = 0$ c'est-à-dire :

$$(41) \quad 1 + g^2 \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{\omega(\omega - m_V' + m_N)(\omega - m_V'' + m_N)} = 0$$

Remplaçons en 40, le nombre 1 tire de (41), il vient :

$$(42) \quad G_V^{-1}(p_0) = g^2(p_0 - m_V')(p_0 - m_V'') \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{\omega(\omega - m_V' + m_N)(\omega - m_V'' + m_N)(\omega - p_0 + m_N)} \\ = (p_0 - m_V')(p_0 - m_V'') a(p_0)$$

et nous rencontrons la première intégrale finie. Mais g^2 d'après (41) est infini, nous aurons besoin donc d'une deuxième renormalisation celle de la constante de couplage :

$$(43) \quad g_C^2 = Z g^2 \quad \begin{cases} g_C'^2 = Z' g^2 \\ g_C''^2 = Z'' g^2 \end{cases}$$

avec :

$$(44a) \quad Z'^{-1} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ x - m_V - \mathcal{M}(x) \right\}_{x=m_V'} = 1 + g^2 \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{\omega(\omega - m_V' + m_N)^2}$$

$$(44b) \quad Z''^{-1} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ x - m_V - \mathcal{M}(x) \right\}_{x=m_V''} = 1 + g^2 \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{\omega(\omega - m_V'' + m_N)^2}$$

ou :

$$(45a) \quad Z' = 1 - g_C'^2 \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{\omega(\omega - m_V' + m_N)^2} \quad \frac{1}{g_C'^2} = \frac{1}{g^2} + \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{\omega(\omega - m_V' + m_N)^2}$$

$$(45b) \quad Z'' = 1 - g_C''^2 \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{\omega(\omega - m_V'' + m_N)^2} \quad \frac{1}{g_C''^2} = \frac{1}{g^2} + \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{\omega(\omega - m_V'' + m_N)^2}$$

Introduisons g_C' dans la condition de compatibilité (41) et exprimons Z' et Z'' à l'aide des formules précédentes, cette condition de compatibilité s'exprime entre termes finis et devient :

$$(46a) \quad 1 - g_C'^2 (m_V' - m_V'') \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{\omega(\omega - m_V' + m_N)^2 (\omega - m_V'' + m_N)} = 0$$

$$(46b) \quad 1 - g_C''^2 (m_V'' - m_V') \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{\omega(\omega - m_V' + m_N) (\omega - m_V'' + m_N)^2} = 0$$

Une des conditions de renormalisation sera l'existence de g_C satisfaisant aux équations 46 .

Discussion. Toutes les complications qui apparaissent dans ce modèle proviennent de l'apparition de la deuxième masse m_V'' .

Supposons que $m_V'' < m_V'$ ($< \mu + m_N$ pour que la particule V soit stable), l'équation 46a admet alors une solution en $g_C'^2$ positive :

$$(47) \quad g_C'^2 = \frac{1}{m_V' - m_V''} \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{\omega(\omega - m_V' + m_N)^2 (\omega - m_V'' + m_N)}$$

mais (46b) admet une solution $g_C''^2$ négative : il est donc impossible que les deux constantes de couplage sont à la fois réelles

1) L'hamiltonien n'est plus un opérateur hermitien, la matrice S n'est plus unitaire.

2) Z' et Z'' , qui doivent être compris entre 0 et 1 , sont tous deux infinis.

3) Supposons que nous ayons une coupure des impulsions à K : les contradictions (1) et (2) demeurent, mais on peut y échapper pour certaines valeurs de g_C' . En effet, pour m_V' donné, la plus petite valeur que peut prendre $g_C'^2$ correspond à $m_V'' = \pm \infty$ et elle s'écrit :

$$g = \lim_{m_V'' \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{m_V'}{m_V''} - 1} \int_0^K \frac{k^2 dk}{\omega(\omega - m_V' + m_N)^2 (\frac{\omega}{m_V''} - 1 + \frac{m_N}{m_V'})}$$

$$= \int_0^K \frac{k^2 dk}{\omega(\omega - m_V' + m_N)^2}$$

si donc dans une théorie à facteur de forme $g_0 \leq g_{cr.}$, les équations (46a et b) ne peuvent être satisfaites, il n'y a donc qu'un seul état de masse m_V' et Z' qui lui correspond est > 0 ainsi que g_0' et g . Bien que le modèle de Lee soit trop simple pour servir de fil directeur valable à l'étude des infinis en électromagnétisme et théories mésiques, le fait que nous avons rencontré une valeur de la constante de couplage au-dessous de laquelle la théorie est exempte de contradictions vaut peut être la peine d'être noté.
