SÉMINAIRE JANET.
MÉCANIQUE ANALYTIQUE
ET MÉCANIQUE CÉLESTE

ALPHONSE CAPELLA

Impulsion-énergie et spin du champ de gravitation, en théorie quantique, à l'approximation linéaire

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 6 (1962-1963), exp. n° 4, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SJ_1962-1963__6__A4_0>

Séminaire de MÉCANIQUE ANALYTIQUE
et de MÉCANIQUE CÉLESTE
6e année, 1962/63, n° 4

12 janvier 1963

IMPULSION-ÉNERGIE ET SPIN DU CHAMP DE GRAVITATION, EN THÉORIE QUANTIQUE, À L'APPROXIMATION LINÉAIRE

par Alphonse CAPELLA

Je vais d'abord rappeler quelques idées sur le tenseur impulsion-énergie approché du champ de gravitation, dont j'ai déjà parlé l'an dernier au Séminaire de Physique mathématique du Collège de France [2]. Ce tenseur sera appliqué ensuite à la quantification du vecteur impulsion-énergie et du spin, à l'approximation linéaire.

1. Le tenseur impulsion-énergie approché.

Il sera déterminé par les deux propriétés suivantes :

a. Il est un tenseur symétrique, de second ordre, ne contenant dans le vide que des dérivées premières des potentiels.

b. Sa somme avec le tenseur matériel est conservative au sens de la dérivée covariante minkowskienne. Ses équations de conservation sont équivalentes aux équations du mouvement de la relativité générale au même ordre d'approximation.

Supposons la variété V_4 portée par un espace-temps minkowskien M_4, le tenseur métrique $g_{\alpha\beta}$ de V_4 admettant des développements convergents autour de la métrique minkowskienne $\eta_{\alpha\beta}$, qui sera rapportée à des coordonnées quelconques.

(1.1) $$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \delta^{(1)} \eta_{\alpha\beta} + \delta^{(2)} \eta_{\alpha\beta} + \dots$$

où les $\delta^{(\rho)} \eta_{\alpha\beta}$ désignent les variations successives autour des valeurs minkowskiennes. Les puissances successives du paramètre physique du développement sont supposées contenues dans le symbole de variation.

On posera par la suite

$$\delta^{(1)} \eta_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} , \quad h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - 1/2\, \eta_{\alpha\beta} h , \quad h = \eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} \quad \text{et} \quad K_\alpha = \nabla^\rho h'_{\rho\alpha} .$$

Les équations d'Einstein s'écrivent en notations évidentes

$$S_{\alpha\beta} = \delta^{(1)} S_{\alpha\beta} + \delta^{(2)} S_{\alpha\beta} + \dots = \delta^{(1)} T_{\alpha\beta} + \delta^{(2)} T_{\alpha\beta} + \dots = T_{\alpha\beta} .$$

Le tenseur de Ricci des $\eta_{\alpha\beta}$ étant nul, les développements commencent au premier ordre. On posera aussi

(1.2) $S^{(p)}_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{4} (\delta^{(p)} S_{\alpha\beta} + \eta_{\alpha\rho}\, \delta^{(p)} S^{\rho}{}_{\beta} + \eta_{\beta\rho}\, \delta^{(p)} S_{\alpha}{}^{\rho} + \eta_{\alpha\rho}\, \eta_{\beta\sigma}\, \delta^{(p)} S^{\rho\sigma})$

et de même pour $T^{(p)}_{\alpha\beta}$ et $h^{(p)}_{\alpha\beta}$. Au premier ordre on a évidemment

$$S^{(1)}_{\alpha\beta} \equiv \delta^{(1)} S_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}\, \delta^{(1)} S^{\rho}{}_{\beta} = \eta_{\beta\rho}\, \delta^{(1)} S_{\alpha}{}^{\rho} = \eta_{\alpha\rho}\, \eta_{\beta\sigma}\, \delta^{(1)} S^{\rho\sigma}$$

et de même pour $T^{(1)}_{\alpha\beta}$ et $h^{(1)}_{\alpha\beta} \equiv h_{\alpha\beta}$. Au premier ordre les équations d'Einstein s'écrivent explicitement

(1.3-a) $R^{(1)}_{\alpha\beta} \equiv -\frac{1}{2} (\nabla^{\rho} \nabla_{\rho} h_{\alpha\beta} - \nabla^{\rho} \nabla_{\alpha} h_{\rho\beta} - \nabla^{\rho} \nabla_{\beta} h_{\rho\alpha} + \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} h) = T^{(1)}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta}\, T^{(1)}$

ou

(1.3-b) $S^{(1)}_{\alpha\beta} \equiv -\frac{1}{2} (\nabla^{\rho} \nabla_{\rho} h'_{\alpha\beta} - \nabla^{\rho} \nabla_{\alpha} h'_{\rho\beta} - \nabla^{\rho} \nabla_{\beta} h'_{\rho\alpha} - \eta_{\alpha\beta}\, \nabla^{\rho} \nabla^{\sigma} h'_{\rho\sigma}) = T^{(1)}_{\alpha\beta}$.

Dans la suite de cette première partie ∇ désigne la dérivée covariante relative à la métrique minkowskienne $\eta_{\alpha\beta}$; celle relative à $g_{\alpha\beta}$ sera désignée par ∇^{R} .

Les équations (1.3) dérivent du lagrangien du vide (1)

(1.4) $$L = \frac{1}{2} \nabla^{\alpha} h'^{\beta\gamma} (\nabla_{\alpha} h'_{\beta\gamma} - 2\nabla_{\beta} h'_{\alpha\gamma}) - \frac{1}{4} \nabla^{\rho} h' \nabla_{\rho} h' \quad .$$

Etant donné que par exemple, $\delta^{(2)} T^{\lambda\mu} \neq \eta^{\lambda\alpha}\, \eta^{\mu\beta}\, \delta^{(2)} T_{\alpha\beta}$, la formulation mathématique la plus générale de la condition de conservativité (condition (b)) est (on se bornera au calcul de $t_{\alpha\beta}$ au second ordre d'approximation, bien que le procédé est généralisable à tout ordre)

(1.5) $$\nabla^{\alpha} (t_{\alpha\beta} + T^{(1)}_{\alpha\beta} + T^{(2)}_{\alpha\beta}) = 0 \quad .$$

La conservativité, au sens de ∇^{R} du tenseur matériel, se traduit, aux différents ordres d'approximation, par

$$\delta^{(p)} (\nabla^{\alpha}\, T_{\alpha\beta}) = 0 \quad .$$

Au premier ordre, il résulte manifestement

(1.6) $$\delta^{(1)} (\nabla^{\alpha}\, T_{\alpha\beta}) = \nabla^{\alpha}\, T^{(1)}_{\alpha\beta} = 0 \quad .$$

Au second ordre, on trouve par un calcul simple

(1.7) $$\delta^{(2)} (\nabla^{\alpha}\, T_{\alpha\beta}) = \nabla^{\alpha}\, T^{(2)}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} h^{\rho\sigma} \nabla_{\rho} T^{(1)}_{\sigma\beta} - \frac{1}{2} \nabla_{\beta} h^{\rho\sigma}\, T^{(1)}_{\rho\sigma}$$
$$+ \frac{1}{4} \nabla^{\rho} h T^{(1)}_{\rho\beta} + \frac{1}{2} \nabla^{\rho} h^{\sigma}_{\beta}\, T^{(1)}_{\rho\sigma} - \frac{1}{2} K^{\rho}\, T^{(1)}_{\rho\beta} = 0 \quad .$$

De (1.5) il résulte, en vertu de (1.6) et (1.7),

---

(1) Ce lagrangien conduit aux équations approchées $R^{(1)}_{\alpha\beta} = 0$ même si la métrique de base est riemannienne. Il a été indiqué par A. LICHNEROWICZ. On trouvera une démonstration dans [5].

$$(1.5') \quad \nabla^{\alpha} t_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} h^{\rho\sigma} \nabla_{\rho} T^{(1)}_{\sigma\beta} - \frac{1}{2} \nabla_{\beta} h^{\rho\sigma} T^{(1)}_{\rho\sigma} + \frac{1}{4} \nabla^{\rho} h T^{(1)}_{\rho\beta} + \frac{1}{2} \nabla^{\rho} h^{\sigma}_{\beta} T^{(1)}_{\rho\sigma} - \frac{1}{2} K^{\rho} T^{(1)}_{\rho\beta} \quad .$$

La condition (a) et la condition (b) (traduite par (1.5) ou (1.5')) <u>détermine univoquement</u> le tenseur $t_{\alpha\beta}$. On obtient (voir [2])

$$(1.8) \quad t_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} (2\bar{t}_{\alpha\beta} - \bar{\bar{t}}_{\alpha\beta} + 2K^{\rho} \nabla_{\rho} h'_{\alpha\beta} + 2K_{\alpha} K_{\beta}) - \frac{1}{2} (h'^{\rho}_{\alpha} S^{(1)}_{\rho\beta} + h'^{\rho}_{\beta} S^{(1)}_{\rho\alpha}) - \frac{1}{4} h' S^{(1)}_{\alpha\beta}$$

où

$$\bar{t}_{\alpha\beta} = H_{\alpha\rho,\sigma} H_{\beta}'^{\rho,\sigma} - \frac{1}{4} \eta_{\alpha\beta} H_{\rho\sigma,\tau} H^{\rho\sigma,\tau} - \frac{1}{2} \nabla_{\alpha} h' \nabla_{\beta} h' + \frac{1}{4} \eta_{\alpha\beta} \nabla_{\rho} h' \nabla^{\rho} h'$$

$$(H_{\alpha\beta,\gamma} = \nabla_{\alpha} h'_{\beta\gamma} - \nabla_{\beta} h'_{\alpha\gamma})$$

$$\bar{\bar{t}}_{\alpha\beta} = \nabla_{\alpha} h'_{\rho\sigma} \nabla_{\beta} h'^{\rho\sigma} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \nabla_{\rho} h'_{\sigma\tau} \nabla^{\rho} h'^{\sigma\tau} - \nabla_{\alpha} h' \nabla_{\beta} h' + \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \nabla_{\rho} h' \nabla^{\rho} h' \quad .$$

2. Invariance de jauge.

Pour tout changement de coordonnées qui ne dépend pas du paramètre physique du développement (1.1) des $g_{\alpha\beta}$, les $h_{\alpha\beta}$, et par conséquent (1.8) se transforment manifestement comme des tenseurs de l'espace-temps de Minkowski M_4 . Si on envisage dans V_4 des changements de coordonnées plus généraux, dépendant du paramètre physique, les $h_{\alpha\beta}$ sont soumis outre le changement tensoriel dans M_4 , à la transformation de jauge

$$(2.1) \qquad h_{\alpha\beta} \rightarrow h^{*}_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} + \nabla_{\alpha} h_{\beta} + \nabla_{\beta} h_{\alpha} \quad .$$

On peut montrer que si $S^{(1)}_{\alpha\beta} = 0$ (cas du vide), la transformation induite par (2.1) dans (1.8) est de la forme d'une divergence antisymétrique, et par conséquent <u>toutes les quantités intégrales et en particulier l'énergie totale, sont invariantes par transformation de jauge.</u>

En effet : les calculs du paragraphe 1 montrent (voir (1.5) et (1.6)) que

$$\nabla^{\alpha}(t_{\alpha\beta} + S^{(2)}_{\alpha\beta}) = 0$$

et ceci identiquement. Par conséquent, on a

$$(2.2) \qquad t_{\alpha\beta} + S^{(2)}_{\alpha\beta} = \nabla^{\rho} A_{\rho\alpha,\beta}$$

où $A_{\rho\alpha,\beta}$ est une expression antisymétrique par rapport aux indices α et ρ (et aussi en β et ρ d'après la symétrie du premier membre).

(2.2) s'écrit après transformation de jauge

$$(2.3) \qquad t^{*}_{\alpha\beta} + S^{*(2)}_{\alpha\beta} = \nabla^{\rho} A^{*}_{\rho\alpha,\beta} \quad .$$

La variation des $\delta^{(2)} S_{\alpha\beta}$ induite par (2.1) est donnée par la dérivée de Lie de $S_{\alpha\beta}$ relative au champ de vecteurs h_α, calculée au second ordre. On a donc comme variations des $S^{(2)}_{\alpha\beta}$ (voir (1.2))

$$(2.4) \quad S^{*(2)}_{\alpha\beta} - S^{(2)}_{\alpha\beta} = h^\rho \nabla_\rho S^{(1)}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \nabla_\alpha h^\rho S^{(1)}_{\rho\beta} + \frac{1}{2} \nabla_\beta h^\rho S^{(1)}_{\rho\alpha} - \frac{1}{2} \nabla^\rho h_\alpha S^{(1)}_{\rho\beta} - \frac{1}{2} \nabla^\rho h_\beta S^{(1)}_{\rho\alpha} \quad .$$

De (2.2), (2.3) et (2.4), il résulte que la variation de $t_{\alpha\beta}$ est

$$t^*_{\alpha\beta} - t_{\alpha\beta} = \nabla^\rho (A^*_{\rho\alpha,\beta} - A_{\rho\alpha,\beta}) - (\ldots S^{(1)}_{\alpha\beta} \ldots)$$

où la parenthèse désigne le deuxième membre de (2.4). On voit donc que, pour $S^{(1)}_{\alpha\beta} = 0$, la variation de (1.8) induite par (2.1) est bien de la forme d'une divergence antisymétrique.

3. Caractère défini positif de l'énergie totale.

Nous nous proposons de montrer que l'énergie totale du champ, définie à l'aide du tenseur (1.8) est positive ou nulle, étant nulle si et seulement si le tenseur de courbure approché est nul.

On peut démontrer aisément cette propriété à l'aide de la transformée de Fourier des $h'_{\alpha\beta}$ comme tenseurs de l'espace de Minkowski, la transformation de jauge n'ayant pas d'influence sur l'énergie totale, comme on a vu au paragraphe 2. En vertu de cette invariance de jauge de l'énergie totale, on peut astreindre les potentiels à satisfaire la condition

$$(3.1) \qquad K_\alpha \equiv \nabla^\rho h'_{\rho\alpha} = 0 \quad .$$

Les $h'_{\alpha\beta}(\vec{X})$ $(\vec{X} \in M_4)$ s'écrivent alors comme transformées de Fourier [2] sur le cône isotrope C, compte-tenu des équations du vide (1.3) et de (3.1)

$$(3.2) \quad h'_{\alpha\beta}(\vec{X}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{A,B=1}^{2} \int_{C^+} (C(AB, \vec{\ell})\, e^{i\vec{\ell}\cdot\vec{x}} + C(AB, -\vec{\ell})\, e^{-i\vec{\ell}\cdot\vec{x}})\, n^{(A)}_\alpha\, n^{(B)}_\beta \, d\Omega(\vec{\ell}) \quad .$$

---

[2] Tous les calculs utilisant la transformée de Fourier sont faits dans des repères rectilignes de M_4.

La démonstration est donnée dans [8] ([3]).

Remarque. - On doit noter que $C(AB , -\vec{\ell})$ sont les complexes conjugués des $C(AB , \vec{\ell})$, comme il résulte de (3.1) et du caractère réel des $h'_{\alpha\beta}$. En effet, en prenant le complexe conjugué des deux membres de (3.1) on a

$$\bar{h}'_{\alpha\beta}(\vec{X}) \equiv h'_{\alpha\beta}(\vec{X})$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{A,B=1}^{2} \int_{C^+} (\bar{C}(AB , \vec{\ell})\, e^{-i\vec{\ell}\cdot\vec{x}} + \bar{C}(AB , -\vec{\ell})\, e^{i\vec{\ell}\cdot\vec{x}})\, n_\alpha^{(A)}\, n_\beta^{(B)}\, d\Omega(\vec{\ell}) \quad .$$

Par comparaison avec (3.2), il résulte $\bar{C}(AB , \vec{\ell}) = C(AB , -\vec{\ell})$ et $\bar{C}(AB , -\vec{\ell}) = C(AB , \vec{\ell})$.

Le vecteur impulsion-énergie est défini par intégration du tenseur (1.8) sur une hypersurface orientée dans l'espace

$$P^\alpha = \int t^{\alpha\beta}\, d\sigma_\beta \tag{3.3}$$

où $d\sigma_\beta = U_\beta\, d\sigma$ $(U_\beta U^\beta = 1)$ et $d\sigma = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$. D'après la conservativité de $t_{\alpha\beta}$ dans le vide, P^α ne dépend pas de $\vec{U}$ et est une constante du mouvement. Par substitution de (3.1) dans (3.3) il vient après un calcul classique un peu long ([4]).

$$P^\alpha = \sum_{A,B=1}^{2} \int_{C^+} \ell^\alpha (C(AB , \vec{\ell})\, C(AB , -\vec{\ell}) + C(AA , \vec{\ell})\, C(BB , -\vec{\ell}))\, d\Omega(\vec{\ell}) \quad . \tag{3.4}$$

L'énergie totale relative à un observateur $\vec{U}$, $E(\vec{U}) = P^\alpha U_\alpha$ est définie positive, compte-tenu du fait que $C(AB , \vec{\ell})$ et $C(AB , -\vec{\ell})$ sont des complexes conjugués (voir la remarque précédente) et que l'intégration porte uniquement sur la nappe positive du cône. En effet, $\vec{\ell}$ est alors orientée vers le futur, et le produit $\ell^\alpha U_\alpha$ est strictement positif.

$E(\vec{U})$ est donc définie positive ; elle est nulle si et seulement si la quantité à l'intérieur de la parenthèse dans (3.4) est nulle. Mais celle-ci est formée, comme nous venons de voir, d'une somme de termes strictement positifs. Sa nullité entraîne la nullité de tous les $C(AB , \vec{\ell})$ et, d'après (3.2), la nullité des

---

([3]) C^+ désigne la nappe positive du cône isotrope C , $d\Omega(\vec{\ell})$ son élément de volume invariant et $\vec{\ell}$ un vecteur de C . Les deux vecteurs $n^{(A)}$ sont tels que : $n^{(A)\rho}\, n_\rho^{(B)} = -\delta^{AB}$ et $n^{(A)\rho}\, \ell_\rho = 0$.

([4]) Voir dans [1], page 27, un calcul analogue pour un champ de spin zéro.

potentiels (à la transformation de jauge près). Les $h_{\alpha\beta}$ sont donc nécessairement de la forme $h_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha h_\beta + \nabla_\beta h_\alpha$. Le tenseur de courbure approché d'un tel $h_{\alpha\beta}$ est, comme on sait, identiquement nul, ce qui complète la preuve du résultat énoncé au début de ce paragraphe.

4. Moment angulaire. Spin.

Si on calcule à partir de (1.4) le tenseur du moment angulaire densitaire, on trouve par la méthode usuelle

(4.1) $$M_{\alpha\beta,\rho} = X_\beta \tilde{t}_{\alpha\rho} - X_\alpha \tilde{t}_{\beta\rho} + S_{\alpha\beta,\rho}$$

où $\tilde{t}$ désigne le tenseur canonique, et la partie du spin S est donnée par l'expression

(4.2) $$S^\rho_{\alpha\beta} \simeq h^\sigma_\alpha(\nabla^\rho h_{\sigma\beta} - \nabla_\beta h^\rho{}_\sigma - \nabla_\sigma h^\rho{}_\beta) + h_\alpha{}^\rho \nabla_\beta h$$

modulo les termes obtenus par antisymétrisation en α et β .

5. Quantification.

Pour procéder à la quantification du champ, on substitue au tenseur $h_{\alpha\beta}$ un tenseur, qui sera désigné par la même notation, dont les composantes sont des opérateurs hermitiens d'un espace de Hilbert complexe. La formule (3.2) reste valable à condition de remplacer les $C(AB , \vec{\ell})$ par des opérateurs. Du caractère hermitien des $h_{\alpha\beta}$ et de (3.2), il résulte (par un raisonnement calqué sur celui de la remarque du paragraphe 3) $C(AB , - \vec{\ell}) = C^*(AB , \vec{\ell})$, où l'étoile désigne le passage à l'opérateur adjoint.

Nous allons profiter de la transformation de jauge (2.1) pour astreindre les potentiels à satisfaire les conditions supplémentaires

(5.1a) $$\partial^\alpha h_{\alpha\beta} = 0$$

(5.1b) $$h \equiv \eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} = 0 \quad .$$

Les équations du champ (1.3) s'écrivent alors dans le vide

(5.1c) $$\partial^\rho \partial'_\rho h_{\alpha\beta} = 0 \quad .$$

Les conditions (5.1a) et (5.1b) éliminent les particules de spin 1 et 0 qui apparaîssent dans le formalisme, mélangées au graviton. En effet, la représentation irréductible du groupe de Lorentz propre homogène par un tenseur symétrique $h_{\alpha\beta}$ de second ordre, de trace nulle (condition (5.1b) est équivalente à la représentation D^{11} du groupe unimodulaire à deux dimensions C_2 . Cette représentation est associée comme on sait à un mélange de particules de spin 2, 1 et 0. Les quatre conditions supplémentaires (5.1a) ne laissent subsister que la valeur 2.

Afin d'obtenir pour les potentiels, des relations de crochet compatibles avec les équations du champ et les conditions (5.1) on est amené à postuler pour les C et C^* les relations de crochet [8] (voir aussi [3])

$$(5.2) \quad [C^*(AB\,,\,\vec{\ell})\,,\,C(CD\,,\,\vec{\ell}')] = \frac{1}{2}(\delta_{AC}\,\delta_{BD} + \delta_{AD}\,\delta_{BC} - \delta_{AB}\,\delta_{CD})\,\delta_\Omega(\vec{\ell}\,,\,\vec{\ell}')$$

tous les autres crochets étant nuls.

Remarque. - Les quatre opérateurs $C(AB\,,\,\vec{\ell})$ se réduisent en fait à deux car $C(12\,,\,\vec{\ell}) = C(21\,,\,\vec{\ell})$ par symétrie et $C(11\,,\,\vec{\ell}) = -C(22\,,\,\vec{\ell})$ en vertu de (5.1b) (cf. [3]).

On vérifie aisément que, compte tenu de la remarque précédente, le signe du deuxième membre de (5.2) permet d'interpréter les C^* et C comme opérateurs de création et annihilation.

6. Le vecteur impulsion-énergie (5).

Pour obtenir l'expression du vecteur impulsion-énergie en termes de produits normaux des opérateurs de création et annihilation C et C^* il suffit de substituer dans la formule non quantique (3.4) les scalaires $C(AB\,,\,\vec{\ell})$ par les opérateurs correspondants (qui satisfont aux relations de crochet (5.2)). On obtient ainsi, en tenant compte du fait que $C(AB\,,\,-\vec{\ell}) = C^*(AB\,,\,\vec{\ell})$ et $\sum_{A=1}^{2} C(AA\,,\,\vec{\ell}) = 0$ (voir la remarque du paragraphe 5)

$$(6.1) \qquad P^\alpha = \sum_{AB=1}^{2} \int_{C^+} \ell^\alpha\, C(AB\,,\,\vec{\ell})\, C^*(AB\,,\,\vec{\ell})\, d\Omega(\vec{\ell}) \qquad .$$

On sait que

$$\sum_{AB=1}^{2} C(AB\,,\,\vec{\ell})\, C^*(AB\,,\,\vec{\ell})$$

est pour $(\hbar = C = 1)$ l'opérateur nombre de particules, et on lit sur (6.1) que l'énergie du graviton est liée à la fréquence par la relation

$$w(\vec{u}) = \ell^\alpha\, u_\alpha = \nu \qquad (\hbar = 1) \qquad .$$

Remarque. - L'expression (6.1) du vecteur impulsion-énergie en fonction des opérateurs de création et annihilation est bien compatible avec les relations de

---

(5) Cf. [6] pour un calcul à partir du pseudo-tenseur d'Einstein approché.

crochet (5.2) qu'on a posé pour ces opérateurs. En effet, de la formule bien connue

$$i\partial_\gamma \, h_{\alpha\beta}(\vec{X}) = [h_{\alpha\beta}(\vec{X}) \, , \, P_\gamma]$$

il vient dans l'espace des impulsions (voir (3.2)) :

(6.2) $[C(AB \, , \, \vec{\ell}) \, , \, P_\gamma] = - \ell_\gamma \, C(AB \, , \, \vec{\ell}) \, , \, [C^*(AB \, , \, \vec{\ell}) \, , \, P_\gamma] = \ell_\gamma \, C^*(AB \, , \, \vec{\ell})$.

Si on substitue (6.1) dans (6.2) on est conduit aux relations de crochet (5.2).

7. Spin du graviton.

Je me propose de montrer que le spin du graviton est un pseudo-vecteur de module 2 , colinéaire à la direction de propagation (6).

Pour obtenir l'expression de la densité de spin du champ de gravitation en théorie quantique, on doit substituer dans (4.2) les $h_{\alpha\beta}$ par les opérateurs correspondants. La densité de spin $S^\rho_{\alpha\beta}$ n'étant pas à divergence nulle, le tenseur du spin total n'est pas, comme on sait, une constante du mouvement. On peut pourtant le rendre constante du mouvement de la manière suivante : les deux vecteurs $n^{(A)}$ qui figurent dans (3.2) sont définis par les relations (voir note en bas de page (3))

$$n^{(A)}_\rho \, n^{(B)\rho} = - \delta^{AB} \qquad n^{(A)}_\rho \, \ell^\rho = 0$$

et par conséquent il ne sont déterminés qu'à la transformation près

(7.1) $$\vec{n}^{(A)} \to \vec{n}^{(A)} + K^{(A)} \, \vec{\ell}$$

où les $K^{(A)}$ sont deux scalaires arbitraires. Cette transformation traduit dans l'espace des impulsions la transformation de jauge (2.1) (voir 3.2).

Pour tout vecteur unitaire $\vec{u}$, orienté dans le temps, on peut choisir les $K^{(A)}$ dans (7.1) de façon qu'on ait

(7.2) $$u^\rho \, n^{(A)}_\rho = 0$$

---

(6) Le fait que le module est 2 résulte du raisonnement bien connu du paragraphe 5 (à la suite des formules 5.1). Qu'il est colinéaire à la direction de propagation résulte de l'étude selon WIGNER du petit groupe, le résultat étant valable pour toute particule de masse nulle. On en donnera ici une démonstration directe en théorie quantique des champs. Dans les **livres** (cf. par exemple [1]) on se borne à calculer la composante du spin selon la direction de propagation, sans montrer que les autres composantes sont nulles. La démonstration qui suit est une généralisation triviale de celle que j'ai donnée par le photon (voir [4]).