

SÉMINAIRE JANET. MÉCANIQUE ANALYTIQUE ET MÉCANIQUE CÉLESTE

ANDRÉ AVEZ

Propriétés globales des espaces-temps périodiques clos

Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste, tome 3 (1959-1960),
exp. n° 9, p. 1-6

http://www.numdam.org/item?id=SJ_1959-1960__3__A9_0

© Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste
(Secrétariat mathématique, Paris), 1959-1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROPRIÉTÉS GLOBALES DES ESPACES-TEMPS PÉRIODIQUES CLOS

par André AVEZ

Nous nous proposons de démontrer les résultats suivants : soit un espace-temps régulier, périodique et clos ; s'il est vide ($R_{\alpha\beta} = 0$), il est localement euclidien ; s'il porte un fluide parfait - champ électromagnétique, il est à constante cosmologique positive.

1. Notations.

Ce sont celles de Mr A. LICHNEROWICZ [3].

2. Définition des espaces-temps réguliers, périodiques et clos.

Soit R la droite numérique. Nous dirons qu'un espace-temps régulier V_4 est périodique et clos s'il existe une variété à 3 dimensions V_3 , close, orientable, de classe C^4 , et un homéomorphisme h , de classe C^4 de V_4 sur $V_3 \times R$ satisfaisant à :

1° Les variétés $h^{-1}(x \times R)$, où $x \in V_3$, sont orientées dans le temps.

2° Les variétés $h^{-1}(V_3 \times t)$, où $t \in R$, sont orientées dans l'espace.

3° La métrique ds^2 de V_4 est de classe C^3 , et il existe un nombre T , appelé période, tel que si on désigne par (x, t) le point $h^{-1}(x \times t)$ de V_4 , on ait pour $\forall x, \forall t$: $ds^2(x, t) = ds^2(x, t + T)$.

3. La variété compacte W_4 .

Soit \mathcal{R} la relation d'équivalence dans V_4 définie par

$$(x, t) \equiv (x', t') \quad (\mathcal{R}) \iff x = x', \quad t = t' \pmod{T} .$$

La variété quotient $W_4 = V_4/\mathcal{R}$ est homéomorphe à $V_3 \times T^1$ et de classe C^4 . En particulier, elle est compacte et orientable. \mathcal{R} définit une projection $p : V_4 \rightarrow W_4$ de classe C^4 . W_4 porte une métrique dont l'image réciproque dans V_4 est ds^2 : p est ainsi, localement, une isométrie.

4. Coordonnées adaptées au caractère périodique.

Tout point de V_4 est de la forme $h^{-1}(x \times t)$, où $x \in V_3$, $t \in R$. Si on a

choisi sur V_3 un système de cartes dans lequel x est représenté par (x^1, x^2, x^3) , les 4 nombres (x^1, x^2, x^3, t) seront dits coordonnées adaptées au caractère périodique pour le point (x, t) . Le même système de coordonnées vaut sur W_4 avec la restriction $0 \leq t < T$.

Dans ces conditions $t = f(x^1, x^2, x^3)$, ou plus brièvement $t = f(x)$, f étant de classe C^0 au moins, représente dans V_4 (resp. W_4 , si $0 \leq f < T$) une variété homéomorphe aux variétés coordonnées $t = \text{constante}$, c'est-à-dire une variété homéomorphe à V_3 .

5. Une formule de cohomologie.

Soit S une sous-variété de W_4 , orientée dans l'espace, d'équation $t = f(x)$, f de classe C^1 .

D'après sa définition, il existe sur W_4 un champ régulier φ_α , orienté dans le temps et fermé ($\nabla_\alpha \varphi_\beta = \nabla_\beta \varphi_\alpha$). Sur $W_4 = S$ ce champ se réduit à un champ de gradients $\partial_\alpha U$. Si v_α est un champ cofermé ($\nabla_\alpha v^\alpha = 0$) orienté dans le temps, on a donc :

$$\int_{W_4} \varphi_\alpha \cdot v^\alpha dv = \int_{W_4 - S} \partial_\alpha U \cdot v^\alpha \cdot dv = \int_{W_4 - S} \nabla_\alpha (Uv^\alpha) dv = \int_{\partial(W_4 - S)} U \cdot v^\alpha n_\alpha d\sigma$$

où dv est l'élément de volume de W_4 , n_α le vecteur unitaire normal de $\partial(W_4 - S)$, $d\sigma$ son élément d'aire.

A la traversée de S dans le sens de φ_α , U subit une discontinuité $U_1 - U_0$, donc

$$\int_{\partial(W_4 - S)} Uv^\alpha n_\alpha d\sigma = \int_S (U_1 - U_0) v^\alpha n_\alpha d\sigma$$

Mais $U_1 - U_0 = \int_{M_0 M_1} \partial_\alpha U \cdot dx^\alpha$, où l'intégrale est prise sur un arc de $W_4 - S$

joignant deux points infiniment voisins de part et d'autre de S . Sur $W_4 - S$, $\partial_\alpha U = \varphi_\alpha$, donc :

$$U_1 - U_0 = \int_{M_0 M_1} \varphi_\alpha dx^\alpha = \oint \varphi_\alpha dx^\alpha = P$$

P est la période de la 1-forme φ_α [1], elle ne dépend pas du point de S où elle est évaluée, donc :

$$\int_{W_4} \varphi_\alpha v^\alpha dv = P \int_S v^\alpha n_\alpha d\sigma$$

6. Métrique elliptique associée à une métrique hyperbolique normale.

Soit V_n une variété à n dimensions, de classe C^1 , munie d'une métrique

$g_{\alpha\beta}$ de signature $n - 1$. Nous savons qu'on peut toujours définir sur V_n un champ continu et régulier de vecteurs v_α dont la norme $N(v_\alpha)$, positive, peut toujours être supposée égale à 1.

Associions à $g_{\alpha\beta}$ le tenseur $h^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta} + 2v^\alpha v^\beta$.

THÉORÈME. - La métrique $h^{\alpha\beta}$ est elliptique.

Calculons la norme du vecteur arbitraire X_α dans la métrique

$$h^{\alpha\beta} : h^{\alpha\beta} X_\alpha X_\beta = -g^{\alpha\beta} X_\alpha X_\beta + 2(v^\alpha X_\alpha)^2 .$$

Posons :

$$\begin{aligned} X_\alpha &= U \cdot v_\alpha + Y_\alpha , \text{ avec } u^\alpha Y_\alpha = 0 , \\ h^{\alpha\beta} X_\alpha X_\beta &= - (U^2 + Y^\alpha Y_\alpha) + 2U^2 = U^2 - Y^\alpha Y_\alpha . \end{aligned}$$

Mais $Y^\alpha v_\alpha = 0$, $v_\alpha v^\alpha > 0 \Rightarrow Y^\alpha Y_\alpha \leq 0$. Donc $h^{\alpha\beta} X_\alpha X_\beta \geq 0$, l'égalité n'étant obtenue que si $U = 0$, $Y_\alpha = 0$, c'est-à-dire $X_\alpha = 0$.

Inégalité de Schwarz. - Si dans la métrique $g_{\alpha\beta}$, $N(X_\alpha) > 0$, pour $\forall Y_\alpha$ on a :

$$N(X_\alpha) \cdot N(Y_\alpha) \leq (Y_\alpha X^\alpha)^2 ,$$

l'égalité n'étant obtenue que si $Y_\alpha = kX_\alpha$.

Soit $h^{\alpha\beta}$ la métrique elliptique associée à $g_{\alpha\beta}$ et au vecteur $v_\alpha = X_\alpha / \sqrt{N(X_\alpha)}$.

$$h^{\alpha\beta} X_\alpha = (-g^{\alpha\beta} + 2v^\alpha v^\beta) X_\alpha = X^\beta ,$$

donc

$$(X^\alpha Y_\alpha)^2 = (h^{\alpha\beta} X_\alpha Y_\beta)^2 .$$

Appliquons l'inégalité de Schwarz, valide dans la métrique

$$h^{\alpha\beta} : (X^\alpha Y_\alpha)^2 \leq (h^{\alpha\beta} X_\alpha X_\beta) (h^{\alpha\beta} Y_\alpha Y_\beta) ,$$

l'égalité n'ayant lieu que si $Y_\alpha = kX_\alpha$. Mais

$$\begin{aligned} h^{\alpha\beta} X_\alpha X_\beta &= X^\alpha X_\alpha = N(X_\alpha) , \\ h^{\alpha\beta} Y_\alpha Y_\beta &= -N(Y_\alpha) + 2(X^\alpha Y_\alpha)^2 / N(X_\alpha) , \end{aligned}$$

donc :

$$(X^\alpha Y_\alpha)^2 \leq -N(X_\alpha) \cdot N(Y_\alpha) + 2(X^\alpha Y_\alpha)^2 ,$$

soit

$$N(X_\alpha) \cdot N(Y_\alpha) \leq (X^\alpha Y_\alpha)^2 ,$$

l'égalité n'étant obtenue que si $Y_\alpha = kX_\alpha$.

7. Existence d'une variété S minima sur W_4

Choisissons sur W_4 un champ v_α cofermé et tel que $N(v_\alpha) \geq 1$ (il en existe toujours sous nos hypothèses topologiques). Sur une variété S , définie comme au paragraphe 5, $n^\alpha v_\alpha$ ne s'annule pas et peut être supposé positif. D'après l'inégalité de Schwarz, on a donc $v^\alpha n_\alpha \geq 1$. La formule de cohomologie entraîne alors :

$$|P^{-1} \int_{W_4} \varphi_\alpha v^\alpha dv| \geq \text{aire } S \quad .$$

Le membre de gauche ne dépend pas de S , les aires des variétés S ont donc une borne supérieure A . Il existe par conséquent une suite de variétés S , soit S_i , d'équations $t = f_i(x)$, telle que $\lim_{i \rightarrow \infty} \text{aire } S_i = A$. Comme W_4 est compacte, les $f_i(x)$ sont également bornées : $0 \leq f_i(x) < T$. Comme les S_i sont orientées dans l'espace, les $f_i(x)$ sont équi-continues. D'après le théorème d'Ascoli-Arzelà, on peut donc extraire de la suite $f_i(x)$ une suite convergeant uniformément vers une fonction $f_A(x)$ continue. Désignons par S_A la variété d'équation $t = f_A(x)$. L'inégalité de Schwarz est encore le principal instrument pour démontrer, par une technique voisine de celle de Rado [2] la semi-continuité supérieure de l'aire. Il en résulte que :

$$\text{aire } S_A \geq \lim_{i \rightarrow \infty} \text{aire } S_i = A \quad ,$$

or $A \geq \text{aire } S_A$, donc $A = \text{aire } S_A$. S_A est donc une solution faible, de classe C^0 , du problème du maximum de l'aire. En adaptant des résultats de GILLIS [2], MORREY [4], NASH [5], on démontre que S_A est solution forte, donc une variété minima au sens de la géométrie différentielle. Il est clair que $p^{-1}(S_A)$ est formé de variétés minima de V_4 d'équations :

$$t = f_A(x) + k.T \quad , \quad k : \text{entier} \quad .$$

8.

Soient Σ et Σ' deux variétés minima de V_4 , d'équations $t = f_A(x)$ et $t = f_A(x) + T$. Ainsi $\Sigma' - \Sigma$ est le bord d'une partie V de V_4 telle que $p(\bar{V}) = W_4$ (\bar{V} : fermeture de V). Feuilletons V_4 pour les variétés parallèles à Σ ; leurs trajectoires orthogonales sont des géodésiques de vecteur unitaire tangent v_α .

Si $R_{\alpha\beta}$ est le tenseur de Ricci de V_4 :

$$R_{\alpha\beta} v^\alpha = \nabla_\alpha \nabla_\beta v^\alpha - \nabla_\beta \nabla_\alpha v^\alpha \quad ,$$

d'où

$$R_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta = v^\beta \nabla_\alpha \nabla_\beta v^\alpha - v^\beta \delta_\beta^\alpha (\nabla_\alpha v^\alpha) \quad .$$

Mais

$$v^\beta \nabla_\alpha \nabla_\beta v^\alpha = \nabla_\alpha (v^\beta \nabla_\beta v^\alpha) - \nabla_\alpha v_\beta \nabla^\beta v^\alpha \quad ,$$

or

$$v^\beta \nabla_\beta v_\alpha = 0 \quad , \quad \nabla_\alpha v_\beta = \nabla_\beta v_\alpha \quad ,$$

donc

$$v^\beta \nabla_\alpha \nabla_\beta v^\alpha = - \nabla_\alpha v_\beta \nabla^\alpha v^\beta \quad .$$

Ainsi :

$$R_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta + \nabla_\alpha v_\beta \nabla^\alpha v^\beta = - v^\beta \nabla_\beta (\nabla_\alpha v^\alpha) \quad .$$

Intégrons les deux membres sur une géodésique précitée, à partir de Σ . Sur Σ , $v_\alpha = n_\alpha$ et $\nabla_\alpha n^\alpha = 0$ puisque Σ est minima, donc :

$$H \equiv \int_0^s [R_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta + \nabla_\alpha v_\beta \nabla^\alpha v^\beta] ds = - (\nabla_\alpha v^\alpha)_{\frac{s}{s}} \quad .$$

Étudions le signe du crochet, en supposant $R_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta \geq 0$. Le vecteur v_α est unitaire, on peut donc lui associer, d'après le paragraphe 6, la métrique elliptique $h^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta} + 2v^\alpha v^\beta$. Dans cette métrique, $h^{\alpha\lambda} h^{\beta\mu} \nabla_\alpha v_\beta \nabla_\lambda v_\mu \geq 0$, l'égalité n'étant obtenue que si $\nabla_\alpha v_\beta = 0$. Or :

$$h^{\alpha\lambda} \nabla_\alpha v_\beta = (-g^{\alpha\lambda} + 2v^\alpha v^\lambda) \nabla_\alpha v_\beta = -\nabla^\lambda v_\beta$$

car $v^\alpha \nabla_\alpha v_\beta = 0$;

$$h^{\beta\mu} \nabla_\lambda v_\mu = (-g^{\beta\mu} + 2v^\beta v^\mu) \nabla_\lambda v_\mu = -\nabla_\lambda v^\beta$$

car $v^\mu \nabla_\lambda v_\mu = 0$, donc :

$$\nabla_\lambda v_\beta \nabla^\lambda v^\beta = h^{\alpha\lambda} h^{\beta\mu} \nabla_\alpha v_\beta \nabla_\lambda v_\mu \geq 0 \quad ,$$

l'égalité n'étant obtenue que si $\nabla_\lambda v_\beta = 0$.

Il en résulte que $H \geq 0$, l'égalité n'étant obtenue que si $R_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta = 0$, $\nabla_\alpha v_\beta = 0$.

Ceci posé, intégrons H sur V , défini au début du paragraphe 8 :

$$\int_V H dv = - \int_V \nabla_\alpha v^\alpha dv = - \int_{\Sigma'} v^\alpha n_\alpha d\sigma + \int_\Sigma v^\alpha n_\alpha d\sigma \quad .$$

Mais sur Σ , $v^\alpha = n^\alpha$, donc $\int_\Sigma v^\alpha n_\alpha d\sigma = \text{aire } \Sigma = A$; sur Σ' , d'après l'inégalité de Schwarz, $v^\alpha n_\alpha \geq 1$, donc

$$\int_{\Sigma'} v^\alpha n_\alpha d\sigma \geq \text{aire } \Sigma' = \text{aire } \Sigma = A \quad .$$

Par suite : $\int_V H dv \leq 0$. De l'étude du signe de H , on tire $H = 0$,

c'est-à-dire $R_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta = 0$, $\nabla_\alpha v_\beta = 0$.

9. Cas extérieur ($R_{\alpha\beta} = 0$).

Puisque $\nabla_\alpha v_\beta = 0$, V et par suite V_4 sont réductibles. $R_{\alpha\beta} = 0$ et les équations de Gauss-Codazzi entraînent alors $R_{\alpha\gamma\beta\delta} = 0$. V_4 est localement euclidienne.

10. Schéma fluide parfait-champ électromagnétique.

Soient k la constante cosmologique, ρ la densité, p la pression, $F_{\alpha\beta}$ le tenseur champ électromagnétique ; les équations d'Einstein s'écrivent :

$$R_{\alpha\beta} = \chi [(\rho + p) u_\alpha u_\beta - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} (\rho - p) + \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} F_{\lambda\mu} F^{\lambda\mu} - F_{\alpha\rho} F_\beta{}^\rho] - \frac{1}{2} k g_{\alpha\beta} \quad .$$

D'après l'inégalité de Schwarz, $(u_\alpha v^\alpha)^2 \geq 1$, donc

$$\chi [(\rho + p)(u_\alpha v^\alpha)^2 - \frac{1}{2}(\rho - p)] \geq \frac{\chi}{2}(\rho + 3p) \quad .$$

L'antisymétrie de $F_{\alpha\beta}$ entraîne $F_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta = 0$, donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} F_{\lambda\mu} F^{\lambda\mu} - v^\alpha F_{\alpha\rho} v^\beta F_\beta{}^\rho &= \frac{1}{4} (-g^{\alpha\lambda} + 2v^\alpha v^\lambda) (-g^{\beta\mu} + 2v^\beta v^\mu) F_{\alpha\beta} F_{\lambda\mu} \\ &= \frac{1}{4} h^{\alpha\lambda} h^{\beta\mu} F_{\alpha\beta} F_{\lambda\mu} \geq 0 \quad , \end{aligned}$$

l'égalité n'étant obtenue que si $F_{\alpha\beta} = 0$. Par suite :

$$R_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta \geq \chi \left[\frac{1}{2}(\rho + 3p) + \frac{1}{4} h^{\alpha\lambda} h^{\beta\mu} F_{\alpha\beta} F_{\lambda\mu} \right] - \frac{1}{2} k \quad .$$

Si $k \leq 0$, il existe donc des domaines où $R_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta > 0$. Mais c'est impossible d'après le paragraphe 8, donc $k > 0$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BIDAL (Pierre) et de RHAM (Georges). - Les formes différentielles harmoniques, Comment. Math. Helv., t. 19, 1946, p. 1-60.
- [2] GILLIS (P.). - Sur les problèmes réguliers du calcul des variations de la forme $I[z] = \int_D F(p_i) d(x^i) = \text{minimum}$, Studia Math., t. 8, 1939, p. 68-77.
- [3] LICHNEROWICZ (André). - Théories relativistes de la gravitation. - Paris, Masson, 1955 (Ouvrages de Mathématiques à l'usage des Physiciens).
- [4] MORREY (C. B.). - Second order elliptic systems of differential equations, Contributions to the theory of partial differential equations ; p. 101-159. - Princeton, Princeton University Press, 1954 (Annals of Mathematics Studies, 33).
- [5] NASH (John). - Parabolic equations, Proc. nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 43, 1957, p. 754-758.