

SÉMINAIRE JEAN LERAY. SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

LAURENT SCHWARTZ

Un théorème de convergence dans les L^p , $0 \leq p < +\infty$

Séminaire Jean Leray, n° 2 (1969-1970), p. 15-17

http://www.numdam.org/item?id=SJL_1969-1970__2_15_0

© Séminaire Jean Leray (Collège de France, Paris), 1969-1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Jean Leray » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UN THÉORÈME DE CONVERGENCE DANS LES L^p , $0 \leq p < +\infty$
par M. LAURENT SCHWARTZ ⁽¹⁾

Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $L^p(\Omega, \mu)$, $0 \leq p < +\infty$, telle que, pour toute suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels tendant vers zéro $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n X_n$ converge, alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} X_n$ converge aussi.

Soit E un espace vectoriel topologique. Une suite $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E sera appelée C -suite, si, pour toute suite scalaire $c = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers zéro, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n X_n$ converge dans E . On dira que E est un C -espace, si, pour toute C -suite X , $\sum_{n \in \mathbb{N}} X_n$ converge. Les C -espaces ont été étudiés par Erik Thomas ⁽²⁾; un espace localement convexe séquentiellement faiblement complet est un C -espace, en particulier tous les espaces $L^p(\Omega, \mu)$ pour $1 \leq p < +\infty$. Par contre, sauf si μ est combinaison finie de mesures de Dirac, $L^0(\Omega, \mu)$ n'est pas un C -espace.

THÉORÈME. L'espace $L^p(\Omega, \mu)$, pour $0 \leq p < 1$, est aussi un C -espace ⁽³⁾.

Ces espaces ne sont plus localement convexes. $L^0(\Omega, \mu)$ est l'espace des μ -classes de fonctions μ -mesurables sur Ω , muni de la topologie de la convergence en mesure.

LEMME 1. Soit $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une C -suite de $L^0(\Omega, \mu)$. Sur tout ensemble de μ -mesure finie, $\sum_{n \in \mathbb{N}} |X_n|^2$ converge μ -presque partout.

Ce lemme est dû à Kolmogorov et Khintchine ⁽⁴⁾.

LEMME 2. Soit $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une C -suite de $L^p(\Omega, \mu)$, $0 \leq p < 1$. Alors X_n converge vers zéro pour n infini.

Démonstration. D'après le lemme 1, X_n converge vers zéro μ -presque partout sur tout ensemble de μ -mesure finie, donc dans $L^0(\Omega, \mu)$; ce qui montre le lemme pour $p = 0$. Soit donc $0 < p \leq 1$. D'après Egorov, on peut trouver une partition de Ω ,

$$\Omega = \bigcup_{m=0}^{\infty} \Omega_m \cup N,$$

telle que chaque Ω_m soit μ -mesurable de μ -mesure finie, que X_n converge vers zéro pour n infini uniformément sur chaque Ω_m , et que tous les X_n soient μ -presque partout nuls sur N . Supposons que X_n ne converge pas vers zéro dans L^p pour n infini. Il existe alors $\delta' > 0$ tel que $\int |X_n|^p \geq \delta'$

(1) reproduit une note aux C.R. Acad. Sc. Paris, t. 268, p. 704-706 (31 mars 1969) série A.

pour une infinité de valeurs de n . Soit $0 < \delta < \delta'$. Déterminons par récurrence une suite de parties disjointes de Ω , $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$, chacune réunion d' Ω_m , et une suite strictement croissante d'entiers, $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$, de manière que $\int_{A_k} |X_{n_k}|^p \geq \delta$, et que, pour $j \neq k$,

$$\int_{A_j} |X_{n_k}|^p \leq 1/2^{j+k}.$$

Déterminons d'abord A_0 , n_0 . Nous prendrons n_0 tel que $\int |X_{n_0}|^p > \delta$; il existe alors A_0 , réunion finie d' Ω_m , tel que $\int_{A_0} |X_{n_0}|^p \geq \delta$. Supposons déterminés A_k et n_k jusqu'à $k = \ell - 1$. Il existe B_ℓ , réunion finie d' Ω_m , contenant $A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_{\ell-1}$, tel que

$$\int_{B_\ell} |X_{n_k}|^p \leq 1/2^{k+\ell}$$

pour tout $k \leq \ell - 1$. Il existe ensuite $n_\ell > n_{\ell-1}$ tel que $\int |X_{n_\ell}|^p \geq \delta'$, et que $\int_{B_\ell} |X_{n_\ell}|^p$ soit $\leq 1/2^{2\ell}$ et $< \delta' - \delta$, de sorte que

$$\int_{B_\ell} |X_{n_\ell}|^p > \delta.$$

Il existe alors A_ℓ , réunion finie d' Ω_m , contenue dans B_ℓ , tel que

$$\int_{A_\ell} |X_{n_\ell}|^p \geq \delta.$$

Alors

$$\int_{A_k} |X_{n_k}|^p \geq \delta, \quad \int_{A_j} |X_{n_k}|^p \leq \frac{1}{2^{j+k}} \quad \text{pour } j \leq \ell, k \leq \ell, j \neq k.$$

Soit alors $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels, $0 \leq c_n \leq 1$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n^p = +\infty$. Minorons

$$I = \int \left| \sum_{k=0}^{\ell} c_k X_{n_k} \right|^p.$$

D'abord

$$\left| \sum_{k=0}^{\ell} c_k X_{n_k} \right|^p \geq c_j^p |X_{n_j}|^p - \sum_{k \leq \ell, k \neq j} c_k^p |X_{n_k}|^p,$$

donc

$$I \geq \sum_{j=0}^{\ell} \int_{A_j} \left(c_j^p |X_{n_j}|^p - \sum_{k \leq \ell, k \neq j} c_k^p |X_{n_k}|^p \right) \geq \sum_{j=0}^{\ell} c_j^p \delta - \sum_{j,k=0}^{\ell} \frac{1}{2^{j+k}} \geq \delta \sum_{j=0}^{\ell} c_j^p - 4.$$

Comme $\sum_{j=0}^{\infty} c_j^p = +\infty$, on voit que $\sum_{k \in \mathbb{N}} c_k X_{n_k}$ ne converge pas dans L^p , ce qui contredit les hypothèses, car $(X_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ est aussi une C-suite.

Bien que le résultat soit connu pour $1 < p < +\infty$, on le démontrerait de manière tout analogue, en utilisant l'inégalité de Minkowski.

Démonstration du théorème. Il suffit maintenant de montrer que, si E est un espace vectoriel topologique complet dans lequel toute C-suite converge vers zéro, E est un C-espace. Si en effet, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une C-suite, et si $\sum_{n \in \mathbb{N}} X_n$ ne converge pas, elle ne vérifie pas le critère de Cauchy. Donc il existe un voisinage V de zéro dans E , et une suite strictement croissante d'entiers

$$n_0, n'_0, n_1, n'_1, \dots, n_k, n'_k, \dots$$

tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $S_{n'_k} - S_{n_k} \notin V$, où $S_N = \sum_{n \leq N} X_n$. Si nous posons

$Y_k = S_{n'_k} - S_{n_k}$, c'est encore une C-suite, or elle ne converge pas vers zéro,

ce qui est contradictoire, d'où le théorème.

BLE I
DIRE
UES PURES
INSTITUT FOURIER

(1) Sous le nom d'espaces faiblement Σ -complets : cf. Comptes rendus, 267, série A, 1968, p. 7.

(2) Pour $p = 0$, cf. Paul LEVY, Comptes rendus, 265, série A, 1967, p. 470.
Le même résultat, pour $p = 0$, vient d'être démontré indépendamment par Richard DUDLEY, Proc. Amer. Math. Soc. (à paraître)

(3) KOLMOGOROV-KHINTCHINE, Math. Sbornik, 32, 1925, p. 668-677. Voir aussi KWAPIEN, Comptes rendus, 267, série A, 1968, p. 698.