

SÉMINAIRE JEAN LERAY. SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

TAKESHI KOTAKE

**Le théorème aux points fixes d'Atiyah-Bott via les
opérateurs paraboliques**

Séminaire Jean Leray, n° 1 (1968-1969), p. 16-18

http://www.numdam.org/item?id=SJL_1968-1969__1_16_0

© Séminaire Jean Leray (Collège de France, Paris), 1968-1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Jean Leray » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LE THÉORÈME AUX POINTS FIXES D'ATIYAH-BOTT
VIA LES OPÉRATEURS PARABOLIQUES⁽¹⁾

par Takeshi KOTAKE

1. Complexe elliptique. Soit M une variété compacte ; soit $E_0, E_1, \dots, E_N$ des fibrés vectoriels sur M ; notons $\Gamma(E_0), \Gamma(E_1), \dots$ les espaces des sections de classe C^∞ de $E_0, E_1, \dots$. Soit

$$(1.1) \quad \dots \rightarrow \Gamma(E_i) \xrightarrow{d_i} \Gamma(E_{i+1}) \rightarrow \dots$$

une suite d'opérateurs différentiels d_i de degré k_i , que nous supposons être un complexe elliptique ; autrement dit, nous supposons que le système (1.1) satisfait à

$$a) \quad d_i \circ d_{i-1} = 0 \quad 1 \leq i \leq N-1$$

b) la suite des symboles principaux

$$\dots \rightarrow E_{i,x} \xrightarrow{\sigma_i(\xi)} E_{i+1,x} \rightarrow \dots$$

est exacte pour tout covecteur $0 \neq \xi \in T_x^*$, $E_{i,x}$ étant la fibre de E_i au point $x \in M$. Pour un complexe elliptique (1.1), on définira le i -ème groupe de cohomologie par

$$(1.2) \quad h^i = \ker(d_i) / \text{image}(d_{i-1}) ;$$

h^i $i = 0, \dots, N$, sont, comme on le verra, des espaces vectoriels complexes de dimension finie.

2. Section harmonique. Supposons un élément de volume sur M et des structures hermitiennes dans tous les E_i . Ces données nous permettront d'introduire des structures préhilbertiennes dans les espaces $\Gamma(E_i)$, et de considérer l'adjoint hilbertien de (1.1) :

$$(2.1) \quad \dots \leftarrow \Gamma(E_i) \xleftarrow{d_i^*} \Gamma(E_{i+1}) \leftarrow \dots$$

Cela étant, nommons les éléments de

$$(2.2) \quad H(E_i) = \{s \mid s \in \Gamma(E_i), d_i s = d_{i-1}^* s = 0\}$$

les sections harmoniques de E_i ; il est alors aisé de voir que ces $H(E_i)$ sont

(1) À paraître dans : Comm. Pure and Applied Maths, New-York Univ. (1969).

des espaces vectoriels complexes de dimension finie. En effet, si les opérateurs d_i ont tous le même degré, on a des opérateurs $\Delta_i = -(d_{i-1} \circ d_{i-1}^* + d_i^* \circ d_i)$ de type elliptique, et on peut considérer les espaces $H(E_i)$ comme noyaux de ces Δ_i ; même dans le cas général, il n'est pas difficile de construire des opérateurs $L_i : \Gamma(E_i) \rightarrow \Gamma(E_i)$, jouissant des propriétés :

(a) Les L_i sont des opérateurs différentiels, fortement elliptiques, à des parties symétriques négatives

$$(b) \quad d_i \cdot L_i = L_{i+1} \cdot d_i$$

$$(c) \quad H(E_i) = \text{Ker}(L_i) ;$$

le fait : $\dim_{\mathbb{C}} H(E_i) < \infty$ se déduit de (a), (c) et de la compacité de M . D'ailleurs, comme généralisation d'un théorème bien connu de De Rham, on a

LEMME 1. Soit $(H_i)_{0 \leq i \leq N}$ une famille de projections : $\Gamma(E_i) \rightarrow H(E_i)$ avec $d_i \cdot H_i = H_{i+1} \cdot d_i$. On peut alors définir des opérateurs $Q_i : \Gamma(E_{i+1}) \rightarrow \Gamma(E_i)$ tels que

$$(2.1) \quad I_i = H_i + d_{i-1} \cdot Q_{i-1} + Q_i \cdot d_i$$

I_i étant l'opérateur identique dans $\Gamma(E_i)$.

De (2.1), il résulte

$$(2.2) \quad H(E_i) \simeq \mathfrak{h}^i ;$$

ainsi, $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}^i < \infty$ pour tout i .

3. Nombre de Lefschetz. Soit $g : M \rightarrow M$ une application de classe C^∞ ; g induit alors, pour chaque i , une application linéaire $f_g : \Gamma(E_i) \rightarrow \Gamma(g^{-1}E_i)$, $g^{-1}E_i$ étant le fibré induit à partir de E_i via g . Supposons maintenant qu'on ait des homomorphismes $h_i : g^{-1}E_i \rightarrow E_i$; ces h_i induisent d'une façon naturelle, des applications linéaires : $\Gamma(g^{-1}E_i) \rightarrow \Gamma(E_i)$, qu'on notera par les mêmes symboles h_i . La composition de f_g et h_i nous donne alors des endomorphismes

$$(3.1) \quad P_i = h_i \cdot f_g : \Gamma(E_i) \rightarrow \Gamma(E_i) \quad 0 \leq i \leq N ;$$

le système $(P_i)_{0 \leq i \leq N}$ sera nommé un endomorphisme du complexe (1.1), si

$$(3.2) \quad d_i \cdot P_i = P_{i+1} \cdot d_i .$$

La condition (3.2) implique que les sous-espaces $\ker(d_i)$, $\text{image}(d_{i-1})$, de $\Gamma(E_i)$, sont stables par application de P_i ; donc, par passage aux quotients, des endomorphismes

$$\tilde{P}_i : \mathfrak{h}^i \rightarrow \mathfrak{h}^i, \quad 0 \leq i \leq N.$$

Pour $(\tilde{P}_i)_{0 \leq i \leq N}$, on définit le nombre de Lefschetz par

$$(3.3) \quad \underline{L}(\tilde{P}, E) = \sum_i (-1)^i \text{trace } (\tilde{P}_i | \mathfrak{h}^i).$$

$\underline{L}(\tilde{P}, E)$ se réduit à la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(E) = \sum_i (-1)^i \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}^i$, si $P_i = I_d$ pour tout i .

4. Représentation analytique de $\underline{L}(\tilde{P}, E)$. Considérons les équations différentielles de type parabolique

$$(4.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} = L_i \quad t > 0, \quad 0 \leq i \leq N,$$

et notons $G_i(t)$ la solution fondamentale de (4.1). Du théorème d'unicité de la solution du problème de Cauchy il s'ensuit

$$(a) \quad d_i \cdot G_i(t) = G_{i+1}(t) \cdot d_i,$$

$$(b) \quad H_i = G_i(t) \cdot H_i,$$

pour $t > 0$. De ces propriétés, et de (2.1), (3.2), il résulte facilement

LEMME 2. Indépendamment de $t > 0$, on a

$$(4.2) \quad \underline{L}(\tilde{P}, E) = \sum_i (-1)^i \text{trace } (P_i \cdot G_i(t))$$

où $P_i \cdot G_i(t)$ $0 \leq i \leq N$ sont des transformations intégrales à noyau régulier et les traces sont prises au sens usuel.

5. Théorème des points fixes d'Atiyah-Bott. Supposons que $g : M \rightarrow M$ soit régulièrement transversal. Alors, l'ensemble $\text{Fix}(g) \subset M$ des points fixes de l'application g est un ensemble fini, constitué des points simples, isolés.

THÉORÈME. Avec les notations et les hypothèses ci-dessus, on a

$$(5.1) \quad \underline{L}(\tilde{P}, E) = \sum_i \sum_{a \in \text{Fix}(g)} \frac{(-1)^i \text{trace } h_i(a)}{|\det(I - g'(a))|}$$

où $g'(a)$ est le Jacobien de g et $h_i(a) : E_{i,a} \rightarrow E_{i,a}$, au point fixe $a \in \text{Fix}(g)$.

Preuve. En vue du lemme 2, le calcul de $\underline{L}(\tilde{P}, E)$ est réduit au problème local autour de $a \in \text{Fix}(g)$; la formule (5.1) découle alors aisément de l'expression explicite d'une paramétrix pour (4.1).