

SÉMINAIRE JEAN LERAY. SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

E. COMBET

Solutions élémentaires du laplacien généralisé

Séminaire Jean Leray, n° 2 (1963-1964), p. 25-45

http://www.numdam.org/item?id=SJL_1963-1964__2_25_0

© Séminaire Jean Leray (Collège de France, Paris), 1963-1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Jean Leray » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

par

E. COMBET

I. DISTRIBUTIONS DE GUELFAND ET CHILOV SUR $\underline{\mathbb{R}}^m$, pour $\operatorname{Re} \lambda > -\frac{m}{2} - \frac{1}{2}$.

Dans ce § I, les nombres réels x^j ($j = 1, \dots, m$) sont les coordonnées d'un point quelconque de $\underline{\mathbb{R}}^m$ où nous considérons les distributions $\mathcal{P}^\lambda$, $(P \pm i0)^\lambda$, $\pm \delta_{1,2}^{(k)}(P)$ de Guelfand et Chilov ([1], ch. III, § 2) en rappelant exactement leurs définitions et leurs résultats, pour $\operatorname{Re} \lambda > -\frac{m}{2} - \frac{1}{2}$.

1. Distribution $\mathcal{P}^\lambda$:

Soit sur $\underline{\mathbb{R}}^m$ la forme quadratique à coefficients complexes g_{rs} :

$$\mathcal{P} = g_{rs} x^r x^s = P + i P'$$

où P est une forme quadratique réelle quelconque non dégénérée et P' une forme quadratique réelle définie positive. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, posons

$$\mathcal{P}^\lambda = \exp [\lambda (\operatorname{Log} |\mathcal{P}| + i \operatorname{Arg} \mathcal{P})] \text{ où } 0 < \operatorname{Arg} \mathcal{P} < \pi.$$

Pour $\operatorname{Re} \lambda > 0$, l'intégrale

$$\langle \mathcal{P}^\lambda, \varphi \rangle = \int_{\underline{\mathbb{R}}^m} \mathcal{P}^\lambda \varphi \, dx, \text{ où } \varphi \in \mathcal{D}$$

converge et est une fonction analytique des coefficients de $\mathcal{P}$ et de λ . La distribution $\mathcal{P}^\lambda \in \mathcal{D}'$ ainsi définie est donc univoquement déterminée par ses valeurs sur l'ensemble des $\mathcal{P} = i P'$ pour lesquelles $P = 0$.

Pour $\mathcal{P} = i P' = i a_{rs} x^r x^s$, il vient :

$$\langle \mathcal{P}^\lambda, \varphi \rangle = e^{i\pi \frac{\lambda}{2}} \int_{\underline{\mathbb{R}}^m} (a_{rs} x^r x^s)^\lambda \varphi \, dx.$$

On peut trouver un système de coordonnées x^i où $P = (x^1)^2 + \dots + (x^m)^2 = r^2$.

Alors :

$$\langle \mathcal{P}^\lambda, \varphi \rangle = \frac{e^{\frac{i\pi\lambda}{2}}}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}^m} r^{2\lambda} \varphi \, dx' = \frac{e^{\frac{i\pi\lambda}{2}}}{\sqrt{(-i)^m g}} \int_{\mathbb{R}^m} r^{2\lambda} \varphi \, dx' ,$$

où $a = \det(a_{rs})$ et $g = \det(g_{rs})$.

Passons aux coordonnées polaires $x'^i = r \omega_i$:

$$\int r^{2\lambda} \varphi \, dx' = \int_0^\infty r^{2\lambda+m-1} \psi(r) dr \quad \text{où} \quad \psi(r) = \int_{S_m} \varphi(r \omega_i) d\Omega ,$$

S_m = sphère unité de $\mathbb{R}^m$.

On peut écrire :

$$\int r^{2\lambda} \varphi \, dx' = \int_0^1 r^{2\lambda+m-1} (\psi(r) - \psi(0)) dr + \int_1^\infty r^{2\lambda+m-1} \psi(r) dr + \frac{1}{2} \frac{\psi(0)}{\lambda + \frac{m}{2}}$$

où le second membre est analytique en λ dans le domaine $\operatorname{Re} \lambda > -\frac{m}{2} - \frac{1}{2}$ avec $\lambda \neq -\frac{m}{2}$. On obtient ainsi le prolongement analytique de $\mathcal{P}^\lambda$ dans ce domaine $\lambda = -\frac{m}{2}$ étant un pôle simple avec :

$$\text{Résidu}_{\lambda = -\frac{m}{2}} \langle \mathcal{P}^\lambda, \varphi \rangle = \frac{e^{-\frac{i\pi\frac{m}{2}}{4}}}{2\sqrt{(-i)^m g}} \psi(0) = \frac{e^{-\frac{i\pi\frac{m}{2}}{4}}}{2\sqrt{(-i)^m g}} \varphi(0) \int d\Omega = \frac{\pi^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{i\pi\frac{m}{2}}{4}}}{\sqrt{(-i)^m g} \Gamma(m/2)} \varphi(0) .$$

Finalement :

$$(1) \quad \text{Résidu}_{\lambda = -\frac{m}{2}} \mathcal{P}^\lambda = \frac{\pi^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{i\pi\frac{m}{2}}{4}}}{\Gamma(m/2) \sqrt{(-i)^m g}} \delta \quad (\delta = \text{distribution de Dirac à l'origine})$$

Pour $\mathcal{P} = P + iP'$, la distribution $\mathcal{P}^\lambda$ admet dans le domaine $\operatorname{Re} \lambda > -\frac{m}{2} - \frac{1}{2}$

le seul pôle (il est simple) $\lambda = -\frac{m}{2}$ où le résidu s'obtient en prolongeant analytiquement (1). Ce prolongement s'effectue de la manière suivante : on

passse aux coordonnées $y^r = b^r_s x^s$ où $P = \sum_{i=1}^m \lambda_i (y^i)^2$ et $P' = \sum_{i=1}^m (y^i)^2$.

Alors :

$$(-i)^m g = (-i)^m b^2 (\lambda_1 + i) \dots (\lambda_m + i) = b^2 (1 - i\lambda_1) \dots (1 - i\lambda_m)$$

et l'on porte alors dans (1) l'expression analytique :

$$\sqrt{(-i)^m g} = |b| (1 - i\lambda_1)^{1/2} \dots (1 - i\lambda_m)^{1/2}$$

où

$$z^{1/2} = |z|^{1/2} e^{\frac{i \arg z}{2}}, \quad -\pi < \arg z < \pi.$$

Prenons en particulier

$$P = (x^1)^2 + \dots + (x^p)^2 - (x^{p+1})^2 - \dots - (x^m)^2 = \text{forme quadr. hyperbolique de signature } (p, q-)$$

$$P' = \varepsilon [(x^1)^2 + \dots + (x^m)^2] \quad \text{où } \varepsilon > 0,$$

Alors :

$$\sqrt{(-i)^m g} = \underbrace{(\varepsilon - i)^{1/2} \dots (\varepsilon - i)^{1/2}}_{p \text{ termes}} \underbrace{(\varepsilon + i)^{1/2} \dots (\varepsilon + i)^{1/2}}_{q \text{ termes}}.$$

Avec ces expressions de P et P' , Gelfand et Chilov posent :

$$(P + i0)^\lambda = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{P}^\lambda.$$

Cette distribution $(P + i0)^\lambda$ est régulière pour $\operatorname{Re} \lambda > -\frac{m}{2} - \frac{1}{2}$, sauf au point

$\lambda = -\frac{m}{2}$ (pôle simple) et, compte tenu de (1) et de l'expression précédente de

$\sqrt{(-i)^m g}$:

$$(2) \quad \begin{aligned} \text{Résidu} \quad (P + i0)^\lambda &= \frac{\pi^{\frac{m}{2}} e^{-i\pi \frac{q}{2}}}{\Gamma(m/2)} \delta \\ \lambda &= -\frac{m}{2} \end{aligned}$$

En raisonnant de la même façon sur les formes quadrat. à partie imaginaire définie négative, on obtient $(P - i0)^\lambda$ et :

$$(2') \quad \begin{aligned} \text{Résidu} \quad (P - i0)^\lambda &= \frac{\pi^{\frac{m}{2}} e^{+i\pi \frac{q}{2}}}{\Gamma(m/2)} \delta \\ \lambda &= -\frac{m}{2} \end{aligned}$$

2. Distributions $P_{\pm}$ et $\delta_{1,2}^{(k)}(P)$

On suppose toujours que $P = \sum_{i=1}^p (x^i)^2 - \sum_{j=p+1}^{m+p+q} (x^j)^2$ est hyperbolique.

Pour $\operatorname{Re} \lambda > 0$, considérons les distributions

$$\langle P_+^\lambda, \varphi \rangle = \int_{P>0} P^\lambda \varphi dx \quad \text{et} \quad \langle P_-^\lambda, \varphi \rangle = \int_{P<0} (-P)^\lambda \varphi dx$$

Soit P ultra hyperbolique (p et $q > 1$) : Passons aux coordonnées bipolaires $x^i = \rho \omega_i$ et $x^j = \sigma \omega_j$:

$$\begin{aligned} \langle P_+^\lambda, \varphi \rangle &= \int_{\rho > \sigma} (\rho^2 - \sigma^2) \varphi(\rho \omega_i, \rho \omega_j) \rho^{p-1} \sigma^{q-1} d\rho d\sigma d\Omega^{(p)} d\Omega^{(q)} = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\rho (\rho^2 - \sigma^2) \psi(\rho, \sigma) \rho^{p-1} \sigma^{q-1} d\rho d\sigma \end{aligned}$$

avec

$$\psi(\rho, \sigma) = \int_{S_p \times S_q} \varphi(\rho \omega_i, \omega_j) d\Omega^{(p)} d\Omega^{(q)}.$$

Posons ensuite $u = \rho^2$, $v = \sigma^2$, $\psi_1(u, v) = \psi(\rho, \sigma)$ et enfin $v = ut$:

$$\langle P_+^\lambda, \varphi \rangle = \frac{1}{4} \int_0^\infty u^{\lambda + \frac{m}{2} - 1} du \int_0^1 (1-t)^\lambda t^{\frac{q-2}{2}} \psi_1(u, tu) dt.$$

Il en résulte que $\langle P_+^\lambda, \varphi \rangle$ a la première série de pôles $\lambda = -k$ ($k = 1, 2, \dots$) qui sont ceux de

$$\Phi(\lambda, u) = \frac{1}{4} \int_0^1 (1-t)^\lambda t^{\frac{q-2}{2}} \psi_1(u, tu) dt$$

avec

$$\text{résidu}_{\lambda = -k} \Phi(\lambda, u) = \frac{(-1)^{k-1}}{4(k-1)!} \frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}} \left[t^{\frac{q-2}{2}} \psi_1(u, tu) \right]_{t=1}$$

d'où, pour $k > \frac{m}{2}$;

$$\begin{aligned} \text{résidu}_{\lambda = -k} < P_+^\lambda, \varphi > &= \frac{(-1)^{k-1}}{4(k-1)!} \int_0^\infty \frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}} \left[t^{\frac{q-2}{2}} \psi_1(u, tu) \right] \Big|_{t=1} u^{-k + \frac{m}{2} - 1} du = \\ &= \frac{(-1)^{k-1}}{4(k-1)!} \int_0^\infty \frac{\partial^{k-1}}{\partial v^{k-1}} \left[v^{\frac{q-2}{2}} \psi_1(u, v) \right] \Big|_{v=u} u^{\frac{p-2}{2}} du . \end{aligned}$$

Ce résidu introduit la distribution $\delta_1^{(k-1)}(P)$ portée par le cône $P = 0$, d'un type primitivement considéré par J. Leray :

$$< \delta_1^{(k)}(P), \varphi > = \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{\partial^k}{\partial v^k} \left[v^{\frac{q-2}{2}} \psi_1(u, v) \right] \Big|_{v=u} u^{\frac{p-2}{2}} du .$$

Donc :

$$\text{résidu}_{\lambda = -k > -\frac{m}{2}} P_+^\lambda = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \delta_1^{(k-1)}(P) .$$

Dans les mêmes conditions, on trouve :

$$\text{résidu}_{\lambda = -k > -\frac{m}{2}} P_-^\lambda = \frac{1}{(k-1)!} \delta_2^{(k-1)}(P)$$

où

$$< \delta_2^{(k)}(P), \varphi > = \frac{(-1)^k}{4} \int_0^\infty \frac{\partial^k}{\partial u^k} \left[u^{\frac{p-2}{2}} \psi_1(u, v) \right] \Big|_{u=v} v^{\frac{q-2}{2}} dv .$$

De l'expression primitive de $< P_+^\lambda, \varphi >$ il découle que le point $\lambda = -\frac{m}{2}$ est aussi un pôle pour P_+^λ (nous nous bornons toujours à $\text{Re} \lambda > -\frac{m}{2} - \frac{1}{2}$). On trouvera l'expression de ces résidus dans l'ouvrage cité de Guelfand et Chilov.

Pour $\text{Re} \lambda > 0$,

$$(3) \quad (P \pm i0)^\lambda = P_+^\lambda + e^{\pm i\pi\lambda} P_-^\lambda$$

et cette égalité se prolonge pour $\text{Re} \lambda > -\frac{m}{2} - \frac{1}{2}$, $\lambda \neq -\frac{m}{2}$.

Cette relation, jointe à l'expression des résidus de $(P \pm i0)^\lambda$ et des $P_\pm^\lambda$ permet d'obtenir les égalités suivantes :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta_1^{(k)}(P) - \delta_2^{(k)}(P) = 0 \quad \text{pour } k < \frac{m}{2} - 1 \\ \delta_1^{(\frac{m}{2}-1)}(P) - \delta_2^{(\frac{m}{2}-1)}(P) = \begin{cases} (-1)^{\frac{p}{2}} \pi^{\frac{m}{2}} \delta & \text{pour } p \text{ et } q \text{ pairs} \\ (-1)^{\frac{p-1}{2}} \pi^{\frac{m}{2}-1} \left[\frac{\Gamma'(\frac{p}{2})}{\Gamma(\frac{p}{2})} - \frac{\Gamma'(\frac{q}{2})}{\Gamma(\frac{q}{2})} \right] \delta & \text{pour } p \text{ et } q \text{ impairs.} \end{cases} \end{array} \right.$$

On peut inversement commencer par définir les distributions $P_\pm^\lambda$, $\delta_{1,2}^{(k)}(P)$ comme au n°2, puis démontrer (4) et enfin obtenir (2) et (2') en posant, par définition :

$$(P \pm i0)^\lambda = P_+^\lambda + e^{\pm i\pi\lambda} P_-^\lambda$$

Ce procédé (voir [2], ch. I), en évitant d'introduire une métrique complexe, permet d'étendre ces distributions à une variété riemannienne V_m .

3. Le cas hyperbolique normal :

Supposons maintenant que $P = (x^1)^2 - (x^2)^2 - \dots - (x^m)^2$ est hyperbolique-normale. On peut étendre tous les résultats précédents, en remplaçant ϱ par x^1 . De plus, le cône $P = 0$ comporte deux nappes Γ^+ et Γ^- et partage $\mathbb{R}^m$ en 3 régions $\mathcal{C}^+$ (futur de l'origine : $P > 0$ et $x^1 > 0$), $\mathcal{C}^-$ (passé de l'origine : $P > 0$ et $x^1 < 0$) et Ω^- (ailleurs de l'origine : $P < 0$). On peut alors partager les distributions $\delta_1^{(k)}(P)$ et P_+^λ en sommes :

$$\delta_1^{(k)}(P) = \delta_1^{(k)+}(P) + \delta_2^{(k)-}(P) \quad \text{et} \quad P_+^\lambda = P_+^{\lambda+} + P_+^{\lambda-}$$

où les notations sont évidentes et où l'on procède comme précédemment par régularisation d'intégrales et par prolongement analytique (voir [2], ch.III). On peut montrer par exemple que, dans le domaine $\operatorname{Re} \lambda > -\frac{m}{2} - \frac{1}{2}$, les seuls pôles des différences $P_+^{\lambda+} - P_+^{\lambda-}$ sont les points $\lambda = -k$ et que

$$(5) \quad \text{Résidu}_{\lambda = -k} (P_+^{\lambda+} - P_+^{\lambda-}) = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} (\delta_1^{(k-1)+}(P) - \delta_2^{(k-1)-}(P))$$

II. LES DISTRIBUTIONS DE GUELFAND ET CHILOV SUR V_m :

V_m est une variété riemannienne hyperbolique orientée, de classe $\mathcal{C}^\infty$, de dimension ≥ 3 , d'élément de volume η .

Soit x' un point fixé de V_m , Ω un voisinage de x' dont chaque point x puisse être joint à x' par un arc géodésique $\widehat{x'x}$ unique contenu dans Ω . A tout $u_{x'} \in T_{x'}$ (espace tangent en x' à V_m) correspond sur la géodésique $\widehat{x'x}$ tangente en x' à $u_{x'}$, un paramètre géodésique affine unique s tel que $s_{x'} = 0$. Si $T_{x'}$ est rapporté au repère quelconque $R^{x'}$, les m nombres bien déterminés :

$$x^\alpha = s u_{x'}^\alpha$$

définissent sur Ω le système de coordonnées normales d'origine x' et relatives à $R^{x'}$.

Dans ces coordonnées normales :

$$g_{\alpha\beta}(x) x^\alpha x^\beta = g_{\alpha\beta}(x') x^\alpha x^\beta.$$

Nous désignerons par $P(x)$ cette fonction et nous utiliserons dans toute la suite un repère $R^{x'}$ orthonormé. Alors :

$$P(x) = \sum_{i=1}^p (x^i)^2 - \sum_{j=p+1}^{m=p+q} (x^j)^2.$$

Dans ce système de coordonnées :

$$\eta(x) = \sqrt{|g(x)|} \, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m \quad \text{où} \quad g(x) = \det(g_{\alpha\beta}(x))$$

donc

$$|g(x')| = +1 \quad .$$

Nous pouvons alors définir les distributions $P_{\pm}^{\lambda}$ et $\delta_{1,2}^{(k)}(P)$ comme au § I,2 en posant

$$\psi(\rho, \sigma) = \int_{S_p \times S_q} \varphi(\rho \omega_i, \sigma \omega_j) \sqrt{|g(\rho \omega_i, \sigma \omega_j)|} \, d\Omega(p) \, d\Omega(q)$$

et en remplaçant δ par δ_x , (puisque $\sqrt{|g(x')|} = 1$) dans l'expression des résidus. Nous pouvons ensuite démontrer les relations (4) et définir :

$$(P \pm io)^{\lambda} = P_{+} + e^{\pm i\pi\lambda} P_{-}^{\lambda} \quad .$$

Nous obtenons alors les mêmes résultats qu'au § I (pour $\operatorname{Re} \lambda > -\frac{m}{2} - \frac{1}{2}$). Dans le domaine considéré : pour les distributions $P_{\pm}^{\lambda}$, les pôles $\lambda = 1, -2, \dots > -\frac{m}{2}$ sont simples et :

$$(6) \quad \text{résidu}_{\lambda = -k} P_{+} = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \delta_1^{(k-1)}(P) \quad \text{et} \quad \text{résidu}_{\lambda = -k} P_{-}^{\lambda} = \frac{1}{(k-1)!} \delta_1^{(k-1)}(P) \quad .$$

Le point $\lambda = -\frac{m}{2}$ est le seul pôle (il est simple) de $(P \pm io)^{\lambda}$ et

$$(7) \quad \text{résidu}_{\lambda = -\frac{m}{2}} (P \pm io)^{\lambda} = \frac{e^{\pm i\pi \frac{m}{2}}}{\Gamma(m/2)} \delta_x \quad .$$

Ces résultats sont valables dans tous les cas hyperboliques. Dans le cas hyperbolique-normal, ils se complètent par les considérations du § I,3 : on a toujours la formule (5) .

III. CALCUL DE LAPLACIENS SUR V_m :

Les hypothèses sur V_m sont les mêmes qu'au § II. ∇ désigne la dérivation covariante (on l'écrit ∂ sur les scalaires). Rappelons que les dérivées successives d'une distribution sont des p -tenseurs distributions dont on trouvera la définition et l'étude dans un article de A. Lichnerowicz [3].

Nous faisons tous les calculs sur Ω en coordonnées normales d'origine x' avec $R^{x'}$ orthonormé et nous posons

$$\Delta = - g^{\alpha\beta}(x) \nabla_{\alpha} \partial_{\beta} \quad .$$

1. Calcul de Laplaciens :

Nous avons, en coordonnées normales les formules connues :

$$g_{\alpha\beta}(x)x^{\alpha} = g_{\alpha\beta}(x')x^{\beta}$$

$$g^{\alpha\beta}(x) \partial_{\beta} P(x) = 2x^{\alpha} \quad ; \quad g^{\alpha\beta}(x) \partial_{\beta} P(x) \cdot \partial_{\alpha} P(x) = 4 P$$

$$g^{\alpha\beta}(x) \partial_{\alpha} P(x) \partial_{\beta} u(x) = 2 s \partial_s u(x) \quad (\text{où } u(x) \text{ est différentiable})$$

$$\Delta P(x) = - 2m - \frac{2s}{\sqrt{|g(x)|}} \partial_s \sqrt{|g(x)|} \quad .$$

Nous en déduisons immédiatement, pour $\text{Re } \lambda > 1$, et l'entier $n \geq 0$:

$$\Delta(P \pm io)^{\lambda+n+1} = -(\lambda+n+1)(P \pm io)^{\lambda+n} [-\Delta P + 4\lambda + 4n] \quad ,$$

$$\begin{aligned} \Delta[(P \pm io)^{\lambda+n+1} u] &= -4(\lambda + \frac{m}{2})(P \pm io)^{\lambda} (\lambda + n + 1) P^n u + (P \pm io)^{\lambda} P^{n+1} \Delta u \\ &\quad - (P \pm io)^{\lambda} P^n (\lambda + n + 1) \left\{ 4s \partial_s u + u(4n + \frac{2s}{\sqrt{|g|}} \partial_s \sqrt{|g|}) \right\} \quad , \end{aligned}$$

et, pour une somme du type introduit par Hadamard [4] :

$$U(x) = \sum_{n=1}^N U_n(x) P^n(x) \quad (N = \text{entier fini positif quelconque}) \quad ,$$

il vient :

$$\begin{aligned} \Delta[(P \pm io)^{\lambda+1} U] &= -4(\lambda + \frac{m}{2})(P \pm io)^{\lambda} U' - \\ &\quad - (\lambda+1)(P \pm io)^{\lambda} [4s \partial_s U_0 + U_0 (\frac{2s}{\sqrt{|g|}} \partial_s \sqrt{|g|})] - \\ (8) \quad &-(P \pm io)^{\lambda} \sum_{n=1}^N P^n [(\lambda+n+1) \left\{ 4s \partial_s U_n + U_n (4n + \frac{2s}{\sqrt{|g|}} \partial_s \sqrt{|g|}) \right\} - \Delta U_{n-1}] + \\ &\quad + (P \pm io)^{\lambda+N+1} \Delta U_N . \end{aligned}$$

avec :

$$(9) \quad U'(x) = \sum_{n=0}^N (\lambda + n + 1) U_n(x) P^n(x).$$

2. Paramétrix sur V_m :

Nous pouvons utiliser (8) pour construire sur Ω une paramétrix pour le point x' : nous pouvons déterminer par récurrence des solutions $U_n(x) \in \mathcal{C}^\infty$ des équations

$$4s \partial_s U_0 + U_0 (\frac{2s}{\sqrt{|g|}} \partial_s \sqrt{|g|}) = 0 , \quad U_0(x') = 1$$

$$(\lambda + n + 1) \left\{ 4s \partial_s U_n + U_n (4n + \frac{2s}{\sqrt{|g|}} \partial_s \sqrt{|g|}) \right\} - \Delta U_{n-1} = 0$$

ce qui donne :

$$(10) \quad U_0(x) = \frac{1}{4\sqrt{|g(x)|}} \quad \text{et} \quad U_n(x) = \frac{U_0(x)}{4(\lambda+n+1)s_n} \int_0^s \frac{t^{n-1} \Delta U_{n-1}(\xi)}{U_0(\xi)} dt \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{intégrale} \\ \text{prise le} \\ \text{long de la} \\ \text{géodésique} \end{array} \right. \quad x'x .$$

et le Laplacien :

$$(11) \quad \Delta[(P \pm io)^{\lambda+1} U] = -4(\lambda + \frac{m}{2})(P \pm io)^{\lambda} U' + (P \pm io)^{\lambda+N+1} \Delta U_N$$

avec

$$(12) \quad U'(x') = \lambda + 1 .$$

Compte tenu des expressions (10) et de l'expression (7) du résidu de $(P \pm io)^\lambda$ pour $\lambda = -\frac{m}{2}$, les deux membres de (11) restent égaux par prolongement analytique dans le domaine $\operatorname{Re} \lambda > -\frac{m}{2} - \frac{1}{2}$, $\lambda \neq -2, -3, \dots, -N-1$ pourvu que $N < \frac{m}{2} - 1$. D'après (12), on en déduit que :

$$\Delta[(P \pm io)^{1-\frac{m}{2}} U] = -4(1 - \frac{m}{2}) \frac{e^{\pm i\pi \frac{q}{2} \frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})} \delta_{x'} + (P \pm io)^{N+1-\frac{m}{2}} \Delta U_N$$

ou encore

$$\Delta \left[\frac{e^{\pm i\pi \frac{q}{2} \Gamma(\frac{m}{2}-1)}}{4\pi \frac{m}{2}} (P \pm io)^{1-\frac{m}{2}} U \right] = \delta_{x'} + \frac{e^{\pm i\pi \frac{q}{2} \Gamma(\frac{m}{2}-1)}}{4\pi \frac{m}{2}} (P \pm io)^{N+1-\frac{m}{2}} \Delta U_N$$

On peut déduire de ces formules une paramétrix due à Mme Choquet-Bruhat [5] .

IV. SOLUTIONS ÉLÉMENTAIRES SUR V_m ANALYTIQUE.

En plus des hypothèses faites aux § II et III, nous supposons que V_m est analytique, à métrique analytique et nous nous proposons de construire, sur un voisinage de x' une solution élémentaire de Δ en ce point, c'est-à-dire une solution $E \in \mathcal{D}'$ de

$$\Delta E = \delta_{x'} .$$

La méthode que nous suivons est due à Hadamard [4]. Sauf avis contraire, V_m est supposée de type hyperbolique quelconque.

1. Cas où m est impair :

On prend dans ce cas

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) P^n(x) \quad \text{et} \quad U'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + n + 1) U_n(x) P^n(x) ,$$

où les $U_n(x)$ ($n = 0, 1, \dots$) sont donnés par (10). Le laplacien (8) s'écrit, pour $\operatorname{Re} \lambda > 1$:

$$\Delta[(P \pm i0)^{\lambda+1} U] = -4(\lambda + \frac{m}{2})(P \pm i0)^{\lambda} U'.$$

Pour démontrer la convergence des séries U et U' on peut utiliser pratiquement sans modification la méthode de J. Hadamard qui fait intervenir l'analyticité de V_m par l'emploi de la méthode des fonctions majorantes : les séries U et U' sont analytiques en x sur un voisinage suffisamment petit de x' et holomorphes en λ pour $\lambda \neq -2, -3, -4, \dots$. Prolongeant analytiquement la relation ci-dessus jusqu'à $\lambda = -\frac{m}{2}$ on obtient :

$$\Delta[(P \pm i0)^{1-\frac{m}{2}} U] = 4 \cdot \frac{e^{\pm i\pi \frac{q}{2} \frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2}-1)} \delta_{x'},$$

m étant impair, les distributions $P_{\pm}^{1-\frac{m}{2}}$ sont régulières et :

$$(P \pm i0)^{1-\frac{m}{2}} = P_+^{1-\frac{m}{2}} + e^{\pm i\pi(1-\frac{m}{2})} P_-^{1-\frac{m}{2}}.$$

Le laplacien Δ admet donc au point x' , les solutions élémentaires complexes conjuguées :

$$\frac{e^{\pm i\pi \frac{q}{2}}}{4\pi \frac{m}{2}} \Gamma(\frac{m}{2}-1) (P_+^{1-\frac{m}{2}} + e^{\pm i\pi(1-\frac{m}{2})} P_-^{1-\frac{m}{2}}) U$$

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} U_n P^n ; \quad U_0 = |g|^{-1/4} ; \quad U_n = \frac{U_0}{4(-\frac{m}{2} + n + 1)s^n} \int_0^s \frac{t^{n-1} \Delta U_{n-1}(\xi)}{U_0(\xi)} dt$$

($n = 1, 2, \dots$)

Supposons que V_m soit hyperbolique-normale : $q = m-1$ est pair et la solution élémentaire précédente s'écrit :

$$E = \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} \Gamma(\frac{m}{2}-1)}{4\pi^{\frac{m}{2}}} (P_+^{1-\frac{m}{2}+} + P_+^{1-\frac{m}{2}-}) U.$$

Pour $\operatorname{Re} \lambda > 1$, on peut écrire

$$\Delta [(P_+^{\lambda+1+} - P_+^{\lambda+1-}) U] = -4(\lambda + \frac{m}{2})(P_+^{\lambda+} - P_+^{\lambda-}) U'.$$

En prolongeant jusqu'à $\lambda = -\frac{m}{2}$, le second membre s'annule, d'après (5) puisque m est impair :

$$\Delta [(P_+^{1-\frac{m}{2}+} - P_+^{1-\frac{m}{2}-}) U] = 0$$

D'après l'expression précédente de E , on obtient les deux solutions élémentaires

$$E_{\pm} = \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} \Gamma(\frac{m}{2}-1)}{2\pi^{\frac{m}{2}}} P_{\pm}^{1-\frac{m}{2}\pm} U$$

2. Cas où m est pair :

Quand m est pair, la méthode précédente ne s'applique plus à cause du terme $U_{\frac{m}{2}-1}$ dont l'expression contient $\lambda + \frac{m}{2}$ au dénominateur.

Suivant Hadamard, posons

$$U = \sum_{n=0}^{\frac{m}{2}-2} U_n P^n \quad \text{et} \quad U' = \sum_{n=0}^{\frac{m}{2}-2} (\lambda + n + 1) U_n P^n.$$

Avec les expressions (10) de ces U_n , il vient :

$$\Delta [U(P \pm io)^{\lambda+1}] = -4(\lambda + \frac{m}{2})(P \pm io)^{\lambda} U' + (P \pm io)^{\lambda + \frac{m}{2}-1} \Delta U_{\frac{m}{2}-2}.$$

Il faut alors introduire deux nouvelles séries V et W pour faire disparaître

$$\text{le terme } (P \pm io)^{\lambda + \frac{m}{2} - 1} \Delta U_{\frac{m}{2} - 2}.$$

a. Soit $V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(x) P^n(x)$. Compte tenu de l'expression de U' ,

on a d'après (8), pour $\text{Re } \lambda > -\frac{m}{2} + 2$

$$(13) \quad \Delta[(P \pm io)^{\lambda + \frac{m}{2}} V] = -(\lambda + \frac{m}{2})(P \pm io)^{\lambda + \frac{m}{2} - 1} [4s \partial_s V_0 + V_0 (\frac{2s}{\sqrt{|g|}} \partial_s \sqrt{|g|} + 4m + 4\lambda - 4)] -$$

$$-(P \pm io)^{\lambda + \frac{m}{2}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} P^{n-1} \left\{ (\lambda + \frac{m}{2} + n) [4s \partial_s V_n + V_n (4n + 4m + 4\lambda - 4 + \frac{2s}{\sqrt{|g|}} \partial_s \sqrt{|g|})] - \Delta V_{n-1} \right\} \right]$$

Pour $\text{Re } \mu > -\frac{m}{2}$, introduisons les distributions

$$(P \pm io)^{\mu} \text{Log}(P \pm io) = \frac{\partial}{\partial \mu} (P \pm io)^{\mu}$$

En dérivant (13) par rapport à λ :

$$\Delta[(P \pm io)^{\lambda + \frac{m}{2}} \text{Log}(P \pm io) V] = -(P \pm io)^{\lambda + \frac{m}{2} - 1} [4s \partial_s V_0 + V_0 (\frac{2s}{\sqrt{|g|}} \partial_s \sqrt{|g|} + 4m + 4\lambda - 4)]$$

$$-(\lambda + \frac{m}{2}) [(P \pm io)^{\lambda + \frac{m}{2} - 1} \text{Log}(P \pm io) \{ 4s \partial_s V_0 + V_0 (\frac{2s}{\sqrt{|g|}} \partial_s \sqrt{|g|} + 4m + 4\lambda - 4) + 4(P \pm io)^{\lambda + \frac{m}{2} - 1} V_0 \}]$$

$$-(P \pm io)^{\lambda + \frac{m}{2}} \text{Log}(P \pm io) \left[\sum_{n=1}^{\infty} P^{n-1} \left\{ (\lambda + \frac{m}{2} + n) (4s \partial_s V_n + V_n (4n + 4m + 4\lambda - 4 + \frac{2s}{\sqrt{|g|}} \partial_s \sqrt{|g|})) - \Delta V_{n-1} \right\} \right]$$

$$-(P \pm io)^{\lambda + \frac{m}{2}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} P^{n-1} \left\{ 4s \partial_s V_n + V_n (4n + 4m + 4\lambda - 4 + \frac{2s}{\sqrt{|g|}} \partial_s \sqrt{|g|}) + 4V_n (\lambda + \frac{m}{2} + n) \right\} \right].$$

Imposons aux V_n d'être solutions analytiques (en x) autour de x' des équations :

$$4s \partial_s V_0 + V_0 \left(\frac{2s}{\sqrt{|g|}} \partial_s \sqrt{|g|} + 4m + 4\lambda - 4 \right) = \Delta U_{\frac{m}{2}-2}$$

$$\left(\lambda + \frac{m}{2} + n \right) \left[4s \partial_s V_n + V_n (4n + 4m + 4\lambda - 4 + \frac{2s}{\sqrt{|g|}} \partial_s \sqrt{|g|}) \right] - \Delta V_{n-1} = 0$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \Delta [(P \pm io)^{\lambda+1} U + (P \pm io)^{\lambda + \frac{m}{2}} \text{Log}(P \pm io) V] &= -4 \left(\lambda + \frac{m}{2} \right) U' (P \pm io)^{\lambda} - \\ (14) \quad &-(\lambda + \frac{m}{2}) (P \pm io)^{\lambda + \frac{m}{2} - 1} [4V_0 + \text{Log}(P \pm io) \Delta U_{\frac{m}{2}-2}] - \\ &-(P \pm io)^{\lambda + \frac{m}{2}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} P^{n-1} \left\{ 4s \partial_s V_n + V_n (8n + 6m + 8\lambda - 4 + \frac{2s}{\sqrt{|g|}} \partial_s \sqrt{|g|}) \right\} \right], \end{aligned}$$

tandis que (13) s'écrit

$$\Delta [(P \pm io)^{\lambda + \frac{m}{2}} V] = -(\lambda + \frac{m}{2}) (P \pm io)^{\lambda + \frac{m}{2} - 1} \Delta U_{\frac{m}{2}-2}$$

que l'on peut prolonger jusqu'à $\lambda = -\frac{m}{2}$. La distribution $(P \pm io)^{-1}$ étant régulière :

$$\Delta V = 0$$

et, puisque $(P \pm io)^0 = 1 = P_+^0 + P_-^0$:

$$(15) \quad \Delta(P_+^0 V) = -\Delta(P_-^0 V)$$

b. Dans l'expression (14), on fait disparaître le dernier terme du second membre en introduisant la série

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(x) P^n(x) .$$

On peut écrire en effet :

$$\Delta[(P \pm io)^{\lambda + \frac{m}{2} + 1} W] = -(P \pm io)^{\lambda + \frac{m}{2}} [(\lambda + \frac{m}{2} + 1)(4s \partial_s W_0 + W_0 \left\{ \frac{2s}{\sqrt{|g|}} \partial_s \sqrt{|g|} + 4m + 4\lambda \right\}) + \sum_{n=1}^{\infty} P^n \left\{ (\lambda + 1 + \frac{m}{2} + n)(4s \partial_s W_n + W_n (4n + 4m + 4\lambda + \frac{2s}{\sqrt{|g|}} \partial_s \sqrt{|g|})) - \Delta W_{n-1} \right\}]]$$

Imposons aux W_n d'être solutions analytiques des équations :

$$(\lambda + \frac{m}{2} + 1)(4s \partial_s W_0 + W_0 \left\{ \frac{2s}{\sqrt{|g|}} \partial_s \sqrt{|g|} + 4m + 4\lambda \right\}) + 4s \partial_s V_1 + V_1 \left\{ \frac{2s}{\sqrt{|g|}} \partial_s \sqrt{|g|} + 6m + 8\lambda + 4 \right\} = 0$$

$$(\lambda + 1 + \frac{m}{2} + n)(4s \partial_s W_n + W_n \left\{ 4n + 4m + 4\lambda + \frac{2s}{\sqrt{|g|}} \partial_s \sqrt{|g|} \right\}) - \Delta W_{n-1} = -4s \partial_s V_{n+1} - V_{n+1} (8n + 6m + 8\lambda + 4 + \frac{2s}{\sqrt{|g|}} \partial_s \sqrt{|g|}) .$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Delta[(P \pm io)^{\lambda + 1} U + (P \pm io)^{\lambda + \frac{m}{2}} \text{Log}(P \pm io)V + (P \pm io)^{\lambda + \frac{m}{2} + 1} W] = \\ (16) \quad = -4(\lambda + \frac{m}{2})(P \pm io)^{\lambda} U' - (\lambda + \frac{m}{2})[(P \pm io)^{\lambda + \frac{m}{2} - 1} \text{Log}(P \pm io) \Delta U_{\frac{m}{2} - 2} + \\ + 4(P \pm io)^{\lambda + \frac{m}{2} - 1} V_0] . \end{aligned}$$

Les termes V_n et W_n s'expriment par des relations intégrales analogues à celles qui donnent U_n et les séries V et W convergent sur un voisinage suffisamment petit de x' .

Dans le second membre de (16), les distributions $(P \pm io)^{\lambda + \frac{m}{2} - 1}$ et $(P \pm io)^{\lambda + \frac{m}{2} - 1} \text{Log}(P \pm io)$ sont régulières pour $\lambda = -\frac{m}{2}$. En prolongeant

analytiquement (16) jusqu'à $\lambda = -\frac{m}{2}$, on obtient les solutions élémentaires complexes conjuguées :

$$E = \frac{e^{\frac{+i\pi}{2}} \Gamma(\frac{m}{2}-1)}{4\pi^{\frac{m}{2}}} [(P \pm io)^{1-\frac{m}{2}} U + \text{Log}(P \pm io)V + PW] .$$

c. En vue de séparer les parties réelle et complexe de E , remarquons que, pour $\text{Re } \lambda > -1$,

$$\begin{aligned} (P \pm io)^{\mu} \text{Log}(P \pm io) &= \frac{\partial}{\partial \mu} (P \pm io)^{\mu} = \\ &= \frac{\partial}{\partial \mu} [P_+^{\mu} + e^{\frac{+i\pi}{2}\mu} P_-^{\mu}] = P_+^{\mu} \text{Log } P_+ + e^{\frac{+i\pi}{2}\mu} P_-^{\mu} \text{Log } P_- + i\pi P_-^{\mu}, \end{aligned}$$

donc, pour $\mu = 0$:

$$\text{Log}(P \pm io) = \text{Log } P_+ + \text{Log } P_- + i\pi P_-^0 .$$

De plus, au voisinage de $\lambda = 1 - \frac{m}{2}$:

$$\begin{aligned} (P \pm io)^{\lambda} &= P_+^{\lambda} + e^{\frac{+i\pi}{2}(1-\frac{m}{2})} e^{\frac{+i\pi}{2}(\lambda+\frac{m}{2}-1)} P_-^{\lambda} = \\ &= \frac{(-1)^{\frac{m}{2}-2}}{(\frac{m}{2}-2)!} \frac{\delta_1^{(\frac{m}{2}-2)}(P)}{\lambda + \frac{m}{2} - 1} + \text{partie rég.}_1 + \\ &\quad + e^{\frac{+i\pi}{2}(1-\frac{m}{2})} [1 + \frac{+i\pi}{2}(\lambda + \frac{m}{2} - 1) + \dots] \left[\frac{1}{(\frac{m}{2}-2)!} \frac{\delta_1^{(\frac{m}{2}-2)}(P)}{\lambda + \frac{m}{2} - 1} + \text{partie rég.}_2 \right] \end{aligned}$$

d'où l'on déduit :

$$(P \pm io)^{1-\frac{m}{2}} = \frac{(-1)^{1-\frac{m}{2}}}{(\frac{m}{2}-2)!} \delta_1^{(\frac{m}{2}-2)}(P) + P_+^{1-\frac{m}{2}} + (-1)^{1-\frac{m}{2}} P_-^{1-\frac{m}{2}},$$

où $P_{\pm}^{1-\frac{m}{2}}$ sont les parties régulières du développement des $P_{\pm}^{\lambda}$ autour de $\lambda = 1 - \frac{m}{2}$, prises pour $\lambda = 1 - \frac{m}{2}$. Avec ces expressions, on obtient :

$$E = \frac{e^{-\frac{i\pi}{2}q} \Gamma(\frac{m}{2}-1)}{4\pi^{\frac{m}{2}}} \left[\frac{(-1)^{1-\frac{m}{2}}}{(\frac{m}{2}-2)!} U \delta_1^{(\frac{m}{2}-2)}(P) + VP_+^0 \right] + \\ + U \left\{ P_+^{1-\frac{m}{2}} + (-1)^{1-\frac{m}{2}} P_-^{1-\frac{m}{2}} \right\} + V \left\{ \text{Log } P_+ \text{Log } P_- \right\} + WP]$$

ou encore, d'après (15) :

$$E = \frac{e^{-\frac{i\pi}{2}q} \Gamma(\frac{m}{2}-1)}{4\pi^{\frac{m}{2}}} \left[\frac{(-1)^{1-\frac{m}{2}}}{(\frac{m}{2}-2)!} U \delta_1^{(\frac{m}{2}-2)}(P) - V P_+^0 \right] + \\ + U \left\{ P_+^{1-\frac{m}{2}} + (-1)^{1-\frac{m}{2}} P_-^{1-\frac{m}{2}} \right\} + V \left\{ \text{Log } P_+ + \text{Log } P_- \right\} + WP]$$

d. Supposons maintenant que V_m soit hyperbolique-normale : $q = m-1$ est impair et on obtient

$$E = \frac{(-1)^{\frac{m}{2}} \Gamma(\frac{m}{2}-1)}{4\pi^{\frac{m}{2}-1}} \left\{ \frac{(-1)^{1-\frac{m}{2}}}{(\frac{m}{2}-2)!} U \delta_1^{(\frac{m}{2}-2)}(P) - VP_+^0 \right\}$$

Ici aussi, on peut montrer (voir [2], ch.III) que

$$\Delta \left[\frac{(-1)^{1-\frac{m}{2}}}{(\frac{m}{2}-2)!} U(\delta_1^{(\frac{m}{2}-2)}(P)) - \delta_1^{(\frac{m}{2}-2)}(P) - V(P_+^{0+} - P_+^{0-}) \right] = 0$$

et l'on obtient les deux solutions élémentaires :

$$E^+ = \frac{(-1)^{\frac{m}{2}} \Gamma(\frac{m}{2} - 1)}{2\pi^{\frac{m}{2} - 1}} \left[\frac{(-1)^{1 - \frac{m}{2}}}{(\frac{m}{2} - 2)!} U \delta_1^{(\frac{m}{2} - 2)+} (P) - V P_+^{0+} \right]$$

avec :

$$V_0 = \frac{U_0}{4s^{\frac{m}{2} - 1}} \int_0^s \frac{t^{\frac{m}{2} - 2} \Delta U_{\frac{m}{2} - 2}}{U_0} dt \quad \text{et} \quad V_n = \frac{U_0}{4ns^{n + \frac{m}{2} - 1}} \int_0^s \frac{t^{n + \frac{m}{2} - 2} \Delta V_{n-1}}{U_0} dt.$$

3. Invariance dans les isométries :

Soit L une isométrie de V_m , laissant fixe le point x' , L' l'application linéaire tangente, L^* la transposée de L' . Pour le tenseur métrique g , on a :

$$(L^*g)(x) = g(x).$$

Sur les fonctions différentiables f , L agit par

$$(L^*f)(x) = f(Lx)$$

et f est dite invariante par L si

$$L^*f = f$$

Si une distribution T_λ est invariante par L^* lorsque λ décrit un certain domaine Λ de $\underline{\mathbb{C}}$, c'est-à-dire si $\langle T_\lambda, L^{*-1}\varphi \rangle = \langle T_\lambda, \varphi \rangle$ pour $\lambda \in \Lambda$, alors la prolongée analytique de T_λ reste invariante par L^* .

Sur les coordonnées normales x^α , l'isométrie L se traduit par la transformation orthogonale

$$x_x^\alpha = a_\beta^\alpha x_{Lx}^\beta$$

avec

$$g_{\alpha\beta}(Lx) = a_{\alpha}^{\gamma} a_{\beta}^{\delta} g_{\gamma\delta}(x) .$$

On en déduit immédiatement que les fonctions P et $U_0 = |g|^{-\frac{1}{4}}$ sont invariantes par L . Il en est de même des distributions $P_{\pm}^{\lambda}$, $(P \pm io)^{\lambda}$ et $\delta_{1,2}^{(k)}(P)$.
Considérons alors l'expression

$$U_n(x) = \frac{U_0(x)}{4(\lambda + n + 1)s^n} \int_0^s \frac{t^{n-1} \Delta U_{n-1}(\xi)}{U_0(\xi)} dt .$$

Si $\xi(t)$ décrit la géodésique $\widehat{x'x}$, $L\xi(t)$ décrit la géodésique $\widehat{x'Lx}$.

Supposons que $U_{n-1}(\xi)$ soit invariante par L , il en est de même de $\Delta U_{n-1}(\xi)$.

De plus, sur une géodésique non isotrope, t peut-être considéré comme longueur de l'arc de géodésique $\widehat{x'\xi}$, arc qui est conservé par isométrie. En procédant par continuité pour les géodésiques isotropes, on en déduit que $U_n(x)$ est invariante par L quel que soit x .

Finalement, les solutions élémentaires que nous avons construites sont invariantes par L .

4. Remarques :

La construction précédente s'étend sans difficulté à l'opérateur

$D = \Delta + B^{\rho} \partial_{\rho} + C$ où B^{ρ} est un champ de vecteurs $\mathcal{G}^{\omega}$ et C une fonction analytique : il convient de modifier les séries U , V et W .

Pour un espace harmonique $\mathcal{G}^{\omega}$ où

$$\Delta P = 2m + Pf(P)$$

on peut trouver des solutions élémentaires de la forme $\psi(P)(P \pm io)^{1 - \frac{m}{2}}$.

Enfin, ce procédé s'étend aux solutions élémentaires des Laplaciens tensoriels et spinoriels (sur V_4).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] GUELFAND et CHILOV. Les distributions, Dunod, Paris 1962.
- [2] E. COMBET. Solutions élémentaires des dalembertiens généralisés. Thèse de doctorat, Paris 1963, à paraître.
- [3] A. LICHNEROWICZ. Propagateurs et commutateurs en Relativité générale. Publ. de l'Inst. des Hautes Etudes scientifiques n°10, Paris 1961.
- [4] J. HADAMARD. Leçons sur le problème de Cauchy pour les équations aux dérivées partielles, Hermann, Paris 1932 ou Dover, New-York 1952.
- [5] Mme CHOQUET-BRUHAT. Solutions élémentaires d'équations du second ordre. Colloque CNRS sur les équations aux dérivées partielles, Nancy 1956.
