

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

JULIANE BOKOBZA

Opérateurs de Calderon-Sygmund sur les variétés

Séminaire Henri Cartan, tome 16, n° 1 (1963-1964), exp. n° 11, p. 1-10

[<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1963-1964__16_1_A11_0>](http://www.numdam.org/item?id=SHC_1963-1964__16_1_A11_0)

© Séminaire Henri Cartan

(Secrétariat mathématique, Paris), 1963-1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

OPÉRATEURS DE CALDERON-SYGMUND SUR LES VARIÉTÉS

par Mme Juliane BOKOBZA

Soit X une variété C^∞ , de dimension n , dénombrable à l'infini.

On désignera par $(\varphi_i)_{i \in I}$ une partition C^∞ de l'unité subordonnée à un recouvrement dénombrable, localement fini, par des ouverts relativement compacts U_i qui sont des domaines de cartes sur X et de trivialisations de tous les fibrés mis en cause dans la suite.

1. Définition de certains espaces de sections-distributions : $\overset{\circ}{\mathcal{D}}$, $\overset{\circ}{\mathcal{D}}'$, $\overset{\circ}{\mathcal{E}}$, $\overset{\circ}{\mathcal{E}}'$.

Soit E un espace fibré sur X à fibre vectorielle complexe de dimension finie constante, de fibre-type $\mathcal{E}$; soit E^* le fibré dual de E . On pose :

$$\overset{\circ}{\mathcal{D}}(X; E) = C^\infty_0(X; E)$$

espace des sections C^∞ à support compact de E ,

$$\overset{n}{\mathcal{D}}_t(X; E^*) = C^\infty_0(X; E^* \otimes_X \Omega_t^n) = \overset{\circ}{\mathcal{D}}(X; E^* \otimes_X \Omega_t^n)$$

(t est l'initiale de tordu; Ω_t^n est l'espace fibré (sur X) des n covecteurs tangents complexes tordus).

Soit K_j une suite exhaustive de compacts de X : on introduit sur $\overset{\circ}{\mathcal{D}}(X; E)$ la topologie limite inductive des topologies suivantes sur

$$\overset{\circ}{\mathcal{D}}_{K_j}(X; E) = C^\infty_{K_j}(X; E),$$

soit $(\varphi_i)_{i \in I_{K_j}}$ la famille finie des fonctions de la partition dont le support rencontre K_j ; φ variant dans $\overset{\circ}{\mathcal{D}}_{K_j}(X; E)$, la topologie sur $\overset{\circ}{\mathcal{D}}_{K_j}(X; E)$ est la topologie de la convergence uniforme des φ_i φ , ainsi que de toutes leurs dérivées, $i \in I_{K_j}$, les dérivées étant prises par rapport à un système de coordonnées sur un voisinage du support de φ_i .

Cette topologie sur $\overset{\circ}{\mathcal{D}}(X; E)$ ne dépend ni de la partition $(\varphi_i)_{i \in I}$, ni de la suite K_j , ni des coordonnées choisies, les $\overset{\circ}{\mathcal{D}}_{K_j}(X; E)$ sont des espaces de Fréchet fermés dans $\overset{\circ}{\mathcal{D}}(X; E)$.

Par définition $\overset{\circ}{\mathcal{O}}'(X; E)$ est le dual fort de

$$\overset{n}{\mathcal{O}}_t(X; E^*) = \overset{\circ}{\mathcal{O}}(X; E^* \otimes_X \Omega_t^n)$$

c'est l'espace des sections-distributions de E . On note $\overset{n}{\mathcal{O}}'_t(X; E^*)$ le dual fort de $\overset{\circ}{\mathcal{O}}(X; E)$.

$\overset{\circ}{\mathcal{O}}(X; E)$ se plonge naturellement dans $\overset{\circ}{\mathcal{O}}'(X; E)$ de la façon suivante : soit $\alpha \in \overset{\circ}{\mathcal{O}}(X; E)$; si $\beta \in \overset{n}{\mathcal{O}}_t(X; E^*) = \overset{\circ}{\mathcal{O}}(X; E^* \otimes_X \Omega_t^n)$, on peut associer naturellement à (α, β) une section C_0^∞ du produit tensoriel contracté de E par $E^* \otimes_X \Omega^n$, soit

$$\langle \alpha, \beta \rangle_{E, E^*} \in \overset{\circ}{\mathcal{O}}(X; \mathbb{C} \otimes_X \Omega_t^n) = \overset{\circ}{\mathcal{O}}(X; \Omega_t^n) = \overset{n}{\mathcal{O}}_t(X).$$

On définit alors $\langle \alpha, \beta \rangle = \int_X \langle \alpha, \beta \rangle_{E, E^*}$.

Par ailleurs $\overset{n}{\mathcal{O}}'_t(X; E^*)$ s'identifie canoniquement à $\overset{\circ}{\mathcal{O}}'(X; E^* \otimes_X \Omega_t^n)$.

$\overset{\circ}{\mathcal{O}}(X; E)$ et $\overset{\circ}{\mathcal{O}}'(X; E)$ sont réflexifs (ce sont des espaces de Montel).

On pose $\overset{\circ}{\mathcal{E}}(X; E) = C^\infty(X; E)$ espace de sections C^∞ de E

$$\overset{n}{\mathcal{E}}_t(X; E^*) = C^\infty(X; E^* \otimes_X \Omega_t^n).$$

On munit $\overset{\circ}{\mathcal{E}}(X; E)$ de la topologie de la convergence uniforme des φ_i φ , et leurs dérivées, $i \in I$, $\varphi \in \overset{\circ}{\mathcal{E}}(X; E)$: c'est une topologie de Fréchet. Par définition $\overset{\circ}{\mathcal{E}}'(X; E)$ est le dual fort de $\overset{n}{\mathcal{E}}_t(X; E^*)$, $\overset{n}{\mathcal{E}}'_t(X; E^*)$ est le dual fort de $\overset{\circ}{\mathcal{E}}(X; E)$.

2. Définition des espaces $H_{loc}^S(X; E)$ et $H_{comp}^S(X; E)$.

Soit $T \in \overset{\circ}{\mathcal{O}}'(X; E)$ et soit $\varphi \in C_0^\infty(X; \mathbb{R})$ à support compact contenu dans un domaine de coordonnées U ($U \xrightarrow{\alpha} \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$).

Alors $T\varphi$ définit par transport une forme linéaire continue $\tilde{T}\varphi$ sur l'espace des sections C à support compact du fibré trivial $\tilde{U} \times \mathbb{E}^*$, cet espace s'identifiant à $\mathcal{O}(\tilde{U}) \otimes \mathbb{E}^*$; $\tilde{T}\varphi$ est donc un élément de $\mathcal{O}'(\tilde{U}) \otimes \mathbb{E}$.

On dira que la section-distribution T appartient à $H_{loc}^S(X; E)$ si, pour toute $\varphi \in C_0^\infty(X; \mathbb{R})$ à support compact contenu dans un domaine de coordonnées U , l'image de $T\varphi$ dans $\mathcal{O}'(\tilde{U}) \otimes \mathbb{E}$ appartient en fait à $H^S(\tilde{U}) \otimes \mathbb{E}$.

On désignera par $\|\varphi T\|_S$ la norme de l'image $\tilde{\varphi T}$ de φT dans $H^S(\tilde{U}) \otimes \mathbb{E}$.

On met sur $H_{loc}^s(X; E)$ la topologie de Fréchet définie par les semi-normes $T \rightarrow \|\varphi T\|_s$ qui peut en fait être définie par le sous-ensemble des semi-normes $T \rightarrow \|\varphi_i T\|_s$.

Cette topologie ne dépend évidemment pas des coordonnées choisies, à cause de l'invariance locale des H^s par difféomorphismes (exposé n° 10).

$H_{comp}^s(X; E)$ désigne le sous-espace des distributions à support compact de $H_{loc}^s(X; E)$; cet espace sera muni de la topologie limite inductive des $H_{K_j}^s(X; E)$ munis de la topologie induite par $H_{loc}^s(X; E)$.

On a les inclusions topologiques strictes suivantes :

$$\mathring{\mathcal{O}}(X; E) \subset H_{comp}^s(X; E) \subset H_{loc}^s(X; E) \subset \mathring{\mathcal{O}}'(X; E) \quad .$$

En outre $\mathring{\mathcal{O}}(X; E)$ est dense dans $H_{comp}^s(X; E)$, $H_{loc}^s(X; E)$, $\mathring{\mathcal{O}}'(X; E)$ et $\mathring{\mathcal{E}}'(X; E)$. La dualité entre $\mathring{\mathcal{O}}_t^n(X; E^*)$ et $\mathring{\mathcal{O}}'(X; E)$ d'une part, $\mathring{\mathcal{O}}(X; E)$ et $\mathring{\mathcal{O}}'(X; E^*)$ d'autre part, définit naturellement une dualité entre les ensembles $H_{loc}^s(X; E)$ et $H_{comp}^{-s}(X; E^* \otimes \Omega_t^n)$; alors $H_{loc}^s(X; E)$ est le sous-espace de $\mathring{\mathcal{O}}'(X; E)$ constitué des éléments qui, en tant que formes linéaires sur $\mathring{\mathcal{O}}_t^n(X, E^*)$, se prolongent continuellement à $H_{comp}^{-s}(X; E^* \otimes \Omega_t^n)$.

3. Définition de $\mathcal{A}_{loc}(X; E, F; \rho)$ espace des opérateurs ρ -améliorants :

Soient E et F deux fibrés vectoriels complexes sur X , de dimension finie constante, de fibre-type $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$.

Les opérateurs ρ -améliorants de E dans F seront les opérateurs continus de $\mathring{\mathcal{O}}(X; E)$ dans $\mathring{\mathcal{O}}'(X; F)$ qui possèdent les propriétés suivantes :

(i). Ils se prolongent en opérateurs continus :

$$\mathring{\mathcal{O}}'(X; E) \rightarrow \mathring{\mathcal{O}}'(X; F)$$

$$\mathring{\mathcal{E}}'(X; E) \rightarrow \mathring{\mathcal{E}}'(X; F)$$

$$H_{loc}^s(X; E) \rightarrow H_{loc}^{s-\rho+1}(X, F) \quad \text{pour tout } s \text{ réel ;}$$

(ii). Ils n'augmentent pas le support singulier.

Conséquences. - Ils se prolongent :

$$\mathring{\mathcal{O}}(X; E) \rightarrow \mathring{\mathcal{O}}(X; F)$$

$$\mathring{\mathcal{E}}(X; E) \rightarrow \mathring{\mathcal{E}}(X; F)$$

$$H_{\text{comp}}^s(X; E) \rightarrow H_{\text{comp}}^{s-+1}(X; F) .$$

L'espace des "opérateurs de degré ρ " est

$$\mathcal{L}_{\text{loc}}(X; E, F; \rho) = \mathcal{A}_{\text{loc}}(X; E, F; \rho + 1) .$$

4. Définition de $\Gamma_{\text{loc}}(X; E, F; \rho)$ espace des opérateurs de Calderon-Zygmund d'ordre ρ de type local.

Soit A un opérateur continu de $\mathring{\mathcal{O}}(X; E)$ dans $\mathring{\mathcal{O}}'(X; F)$. On dira que $A \in \Gamma_{\text{loc}}(X; E, F, \rho)$ si :

a. $T \in \mathcal{L}_{\text{loc}}(X; E, F; \rho)$

b. $\forall \varphi$ et ψ fonctions C^∞ à supports compacts dans un même domaine de coordonnées u , l'opérateur $(\varphi) A(\psi)$ de $\mathring{\mathcal{O}}(\tilde{u}) \otimes \mathcal{E}$ dans $\mathring{\mathcal{O}}(\tilde{u}) \otimes \mathcal{F}$, défini par transport de $(\varphi) T(\psi)$, appartient à $\Gamma(\tilde{u}, \rho) \otimes \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ (condition locale).

D'après l'invariance par difféomorphisme (exposé 10), il suffit que ce soit vrai pour des u_i recouvrant X .

Remarques.

Si $\rho \geq \rho'$: $\mathcal{A}(X; E, F; \rho) \supset \mathcal{A}(X; E, F; \rho')$.

Si $\rho \geq \rho' + 1$: $\Gamma(X; E, F; \rho) \supset \mathcal{A}(X; E, F; \rho')$.

$\forall \rho$: $\mathcal{A}_{\text{loc}}(X; E, F; \rho) \subset \Gamma_{\text{loc}}(X; E, F; \rho) \subset \mathcal{A}_{\text{loc}}(X; E, F; \rho + 1)$.

5. Définition du ρ -symbole.

$T^*(X)$ désigne l'espace cotangent de X privé de l'image de la section nulle, $\mathcal{E}(X, T^*(X), \mathcal{L}(E, F), \rho)$ désignera l'espace des sections C^∞ de l'espace fibré sur $T^*(X)$, image réciproque de $\mathcal{L}_X(E; F)$ par la projection $T^*(X) \rightarrow X$, dont, pour tout $x \in X$, la restriction à $T^*(x)$ est une fonction positivement homogène de degré ρ , à valeurs dans $\mathcal{L}(E_x, F_x)$.

Soit $A \in \Gamma_{\text{loc}}(X; E, F; \rho)$ et soit $(x, \xi) \in T^*(X)$ soit φ une fonction C^∞ sur X telle que $\varphi(x) = 1$, à support compact dans un domaine de coordonnées u :

Soient α la carte choisie, $u \xrightarrow{\alpha} \tilde{u}$ et η et ζ les trivialisations choisies : $E|_u \xrightarrow{\eta} \mathcal{E}$, $F|_u \xrightarrow{\zeta} \mathcal{F}$. On note η_x et ζ_x les isomorphismes induits par η et ζ

sur E_x et F_x . Enfin ξ^α désignera le vecteur de $\mathbb{R}^n$ représentant ξ dans la carte α . Alors le ρ -symbole $\sigma_\rho(A)$ de A sera l'élément de $\mathcal{S}(X, T^*(X), \mathcal{L}(E, F), \rho)$ défini par :

$$\sigma_\rho(A)(x, \xi) = \zeta_x^{-1} \circ \sigma_\rho(\widetilde{\varphi A \varphi})(\alpha(x), \xi^\alpha) \circ \eta_x.$$

On sait que cette définition ne dépend pas des coordonnées choisies pour φ choisie (cela résulte du théorème fondamental d'invariance par difféomorphisme exposé n° 10). En outre elle ne dépend pas de φ , car on peut remplacer φ par $\varphi\psi$ dans la formule de définition, pour ψ fonction C^∞ à support compact dans un domaine de coordonnées $\mathcal{U}'$ avec $\psi(x) = 1$.

6. Opérateurs différentiels d'ordre ρ (ρ entier ≥ 0).

Ce sont les opérateurs de $\mathcal{O}(X; E)$ dans $\mathcal{O}'(X; F)$ de caractère local (exposé 1 et 2) qui sont en outre améliorants d'ordre ρ (c'est-à-dire $\in \mathcal{L}_{loc}(X; E, F; \rho)$). Il est évident qu'ils vérifient la condition locale (b) : ce sont des opérateurs de Calderon-Zygmund d'ordre ρ et leur ρ -symbole coïncide avec la restriction $\mathcal{S}^4 T^*(X)$ du ρ -symbole qui a été défini précédemment. On a donc défini une application

$$\sigma_\rho : \Gamma_{loc}(X; E, F; \rho) \rightarrow \mathcal{S}(X, T^*(X), \mathcal{L}(E, F), \rho).$$

Cette application est évidemment linéaire.

THÉORÈME. - σ_ρ est surjective et son noyau est $\mathcal{A}_{loc}(X; E, F; \rho)$:

$$0 \rightarrow \mathcal{A}_{loc}(X; E, F; \rho) \rightarrow \Gamma_{loc}(X; E, F; \rho) \xrightarrow{\sigma_\rho} \mathcal{S}(X, T^*(X), \mathcal{L}(E, F), \rho) \rightarrow 0.$$

Preuve.

1° Le noyau de σ_ρ est $\mathcal{A}_{loc}(X; E, F; \rho)$:

Tout opérateur ρ -améliorant a un ρ -symbole nul évidemment. Réciproquement soit $A \in \Gamma_{loc}(X; E, F; \rho)$ tel que $\sigma_\rho(A) = 0$; montrons qu'il opère algébriquement de $H_{loc}^s(X; E)$ dans $H_{loc}^{s-\rho+1}(X; F)$; soit $T \in H_{loc}^s(X; E)$, soit φ fonction C^∞ à support compact dans $\mathcal{U}$ domaine de coordonnées et soit χ fonction C^∞ à support compact dans $\mathcal{U}$ qui est égale à 1 sur le support de φ :

$$\varphi A T = \varphi A \chi T + \varphi A(1 - \chi) T ;$$

or $\varphi A(1 - \chi) T$ est C^∞ (car A n'augmente pas le support singulier) et $\varphi A \chi$ est ρ -améliorant parce que son transformé dans la carte a un ρ -symbole nul ; donc

$$\varphi AT \in H_{\text{loc}}^{s-\rho+1}(X; F) \quad \text{et} \quad AT \in H_{\text{loc}}^{s-\rho+1}(X; F) \quad .$$

Comme $H_{\text{loc}}^s(X; E)$ est un espace de Fréchet, on en déduit que A opère continûment de $H_{\text{loc}}^s(X; E)$ dans $H_{\text{loc}}^{s-\rho+1}(X; F)$ (graphe fermé). Donc $A \in \mathcal{A}_{\text{loc}}(X; E, F; \rho)$.

2° σ_ρ est surjectif :

Soit $f \in \mathcal{E}(X; T^*(X), \mathcal{E}(E, F), \rho)$. $\varphi_1 f$ est à support compact dans U_1 ; donc $\widetilde{\varphi_1 f}$ à support compact dans $\widetilde{U}_1$ se prolonge en le symbole d'un opérateur de $\Gamma(\mathbb{R}^n, \mathcal{E}, \mathcal{F}, \rho)$ qu'on peut choisir à bisupport compact dans $\widetilde{U}_1$ et définit donc un opérateur $\widetilde{A}_1$ de $\Gamma(\widetilde{U}_1, \mathcal{E}, \mathcal{F}, \rho)$ qu'on peut relever en un opérateur $A_1 \in \Gamma_{\text{loc}}(X, E, F, \rho)$ à bisupport compact dans U_1 .

De plus $\sigma_\rho(A_1) = \varphi_1 f$. Définissons alors A :

$$\overset{\circ}{\mathcal{O}}(X; E) \rightarrow \overset{\circ}{\mathcal{O}}'(X; F) \quad \text{par} \quad A = \sum_i A_i \quad .$$

Montrons que $A \in \Gamma_{\text{loc}}(X; E, F; \rho)$ et que $\sigma_\rho(A) = f$:

- (1) A se prolonge continûment de $\overset{\circ}{\mathcal{E}}'(X; E)$ dans $\overset{\circ}{\mathcal{E}}'(X; F)$.
- (2) A se prolonge continûment de $\overset{\circ}{\mathcal{O}}'(X; E)$ dans $\overset{\circ}{\mathcal{O}}'(X; F)$.
- (3) A se prolonge continûment de $H_{\text{loc}}^s(X; E)$ dans $H_{\text{loc}}^{s-\rho}(X; F)$.

En effet $\widetilde{A}_1$ envoie $H^s(\widetilde{U}_1) \otimes \mathcal{E}$ dans $H^{s-\rho}(\widetilde{U}_1) \otimes \mathcal{F}$, donc, par suite de l'invariance des H^s par difféomorphisme local, A_1 envoie $H_{\text{loc}}^s(X; E)$ dans $H_{\text{loc}}^{s-\rho}(X; F)$, donc aussi A .

(4) A n'augmente pas le support singulier.

(5) La condition locale (b) est évidemment vérifiée.

(6) Le symbole $\sigma_\rho(A)(x) = \sigma_\rho(\varphi A \varphi)(x)$ si $\varphi(x) = 1$ et si φ est C^∞ à support compact (dans un domaine de coordonnées).

Or

$$\varphi A \varphi = \overline{\sum_{\text{supp } \varphi \cap U_1 \neq \emptyset} \varphi A_1 \varphi}$$

d'où :

$$\sigma_\rho(A)(x) = \overline{\sum_{\text{supp } \varphi \cap U_1 \neq \emptyset} \sigma_\rho(\varphi A_1 \varphi)(x)} = \overline{\sum_{\varphi_1(x) \neq 0} \varphi_1(x) f(x)} = f(x) \quad .$$

7. Transposé.

Soit $A \in \Gamma_{\text{loc}}(X; E, F; \rho)$; alors tA opère de $\mathring{\mathcal{O}}(X; F^* \otimes_X \Omega_t^n)$ dans $\mathring{\mathcal{O}}(X; E^* \otimes_X \Omega_t^n)$. On va montrer que

$${}^tA \in \Gamma_{\text{loc}}(X; F^* \otimes \Omega_t^n, E^* \otimes \Omega_t^n; \rho)$$

et que

$$\sigma_\rho({}^tA) = {}^t\sigma_\rho^\vee(A)$$

le symbole $\vee$ est le changement de ξ en $-\xi$ dans l'espace des co-vecteurs tangents à X :

$${}^\vee f(x, \xi) = f(x, -\xi), \quad x \in X, \quad \xi \in T_x^*(X) \quad .$$

Il n'y a qu'à vérifier la condition locale ; or $\varphi {}^tA\psi = {}^t(\psi A\varphi)$ et l'image dans une carte conserve la transposition.

D'autre part $\sigma_\rho({}^tA)(x) = \sigma_\rho(\varphi {}^tA\varphi)(x)$ où $\varphi(x) = 1$ et où φ est C^∞ à support compact dans $\mathcal{U}$; on a aussi

$$\sigma_\rho({}^tA)(x) = \sigma_\rho({}^t(\varphi A\varphi))(x) = {}^t\sigma_\rho^\vee(A)(x) \quad ,$$

(où $\mathcal{U}$ est un domaine de coordonnées).

8. Composition des opérateurs.

Soient $A_1 \in \Gamma_{\text{loc}}(X; E, F; \rho_1)$ et $A_2 \in \Gamma_{\text{loc}}(X; F, G; \rho_2)$.

THÉOREME. - $A_2 A_1 \in \Gamma_{\text{loc}}(X; E, G; \rho_2 + \rho_1)$ et $\sigma_{\rho_2+\rho_1}(A_2 A_1) = \sigma_{\rho_2}(A_2) \circ \sigma_{\rho_1}(A_1)$.

Preuve. - Evidemment $A_2 A_1 \in \mathcal{L}_{\text{loc}}(X; E, G; \rho_1 + \rho_2)$.

Vérifions la condition locale : soient φ et ψ à supports compacts dans un même domaine $\mathcal{U}$:

$$\varphi A_2 A_1 \psi = \varphi A_2 \chi A_1 \psi + \varphi A_2 (1 - \chi^2) A_1 \psi$$

où χ est C^∞ à support compact dans $\mathcal{U}$ et $\chi = 1$ dans un voisinage du support de φ , or $A_2 (1 - \chi^2) A_1 \psi$ est C^∞ , donc

$$\varphi A_2 (1 - \chi^2) A_1 \psi \in \mathcal{L}_{\text{loc}}(X; E, G; \rho) \quad , \quad \forall \rho$$

d'autre part :

$$\widetilde{\varphi A_2 \chi \chi A_1 \psi} = \widetilde{\varphi A_2 \chi} \widetilde{\chi A_1 \psi} \in \Gamma(\tilde{U}, \rho_2 + \rho_1) \otimes \mathcal{L}(\xi, \eta) \quad .$$

Montrons que

$$\sigma_{\rho_2 + \rho_1}(A_2 A_1) = \sigma_{\rho_2}(A_2) \circ \sigma_{\rho_1}(A_1) \quad ;$$

soit $x \in U$ domaine de coordonnées et soit φ fonction C^∞ à support compact dans U avec $\varphi(x) = 1$:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho_2 + \rho_1}(A_2 A_1)(x, \xi) &= \zeta_x^{-1} \circ \sigma_{\rho_2 + \rho_1}(\widetilde{\varphi A_2 A_1 \varphi})(\alpha(x), \xi^\alpha) \circ \eta_x \\ &= \zeta_x^{-1} \circ \sigma_{\rho_2 + \rho_1}(\widetilde{\varphi A_2 \chi} \widetilde{\chi A_1 \varphi})(\alpha(x), \xi^\alpha) \circ \eta_x \\ &= \zeta_x^{-1} \circ \sigma_{\rho_2}(\widetilde{\varphi A_2 \varphi})(\alpha(x), \xi^\alpha) \circ \sigma_{\rho_1}(\widetilde{\varphi A_1 \varphi})(\alpha(x), \xi^\alpha) \circ \eta_x \\ &= \zeta_x^{-1} \circ \sigma_{\rho_2}(\widetilde{\varphi A_2 \varphi})(\alpha(x), \xi^\alpha) \circ \theta_x \circ \theta_x^{-1} \circ \sigma_{\rho_1}(\widetilde{\varphi A_1 \varphi})(\alpha(x), \xi^\alpha) \circ \eta_x \\ &= \sigma_{\rho_2}(A_2)(x, \xi) \circ \sigma_{\rho_1}(A_1)(x, \xi) \end{aligned}$$

(où η , θ et ζ sont les trivialisations choisies sur U des fibrés E , F , G).

9. Opérateurs elliptiques.

$A \in \Gamma_{\text{loc}}(X; E, F; \rho)$ est dit ρ -elliptique si son ρ -symbole est inversible.

THÉOREME.

$A \in \Gamma_{\text{loc}}(X; E, F; \rho)$ est ρ -elliptique $\iff \exists A' \in \Gamma_{\text{loc}}(X; F, E; -\rho)$

tel que

$$A'A = I_E + C \quad \text{où} \quad C \in \mathcal{A}_{\text{loc}}(X; E, E; 0)$$

et

$$AA' = I_F + D \quad \text{où} \quad D \in \mathcal{A}_{\text{loc}}(X; F, F; 0) \quad .$$

Preuve. - Soit I_E l'opérateur identique sur E : alors $\sigma_\bullet(I_E)$ est l'application de $T^*(X)$ dans $\mathcal{L}(E, E)$ qui, à tout $(x, \xi) \in T^*(X)$, fait correspondre l'identité de E_x .

$\sigma_\rho(A)$ est inversible signifie qu'il existe $f \in \mathcal{S}(X, T^*(X), \mathcal{L}(F, E), -\rho)$ tel que

$$f \circ \sigma_\rho(T) = \sigma_0(I_E) \quad .$$

Alors f est le symbole d'un opérateur $A' \in \Gamma_{\text{loc}}(X; F, E; -\rho)$,

$$\sigma_{-\rho}(A') = f \quad ,$$

d'où

$$\sigma_0(A'A) = \sigma_{-\rho}(A') \sigma_\rho(A) = \sigma_0(I_E) \quad ;$$

ceci exprime que

$$C = A'A - I_E \in \mathcal{O}_{\text{loc}}(X, E, E, 0) \quad .$$

(Même raisonnement pour D .)

10. Hypoellipticité.

Définition. - Soit $T \in \mathcal{O}'(X; E)$ et soit Ω ouvert dans X ; on dira que T est H^s dans Ω si, $\forall$ φ fonction C^∞ à support compact dans Ω , $\varphi T \in H_{\text{loc}}^s(X, E)$.

LEMME. - Soient $A \in \mathcal{E}_{\text{loc}}(X; E, F; \rho)$ et T qui est H^s dans Ω . Alors AT est $H^{s-\rho}$ dans Ω .

Preuve. - Soit φ fonction C^∞ à support compact dans Ω :

$$\varphi AT = \varphi A \chi T + \varphi A(1 - \chi) T$$

avec χ fonction C^∞ à support compact dans Ω et égale à 1 dans un voisinage du support de φ : $\varphi A(1 - \chi) T$ est C^∞ dans X , car A n'augmente pas le support singulier, d'autre part

$$\chi T \in H_{\text{loc}}^s(X; E), \text{ donc } \varphi A \chi T \in H_{\text{loc}}^{s-\rho}(X, F) \quad .$$

THÉORÈME. - Soit A , ρ -elliptique, $A \in \Gamma_{\text{loc}}(X; E, F; \rho)$; soit $T \in \mathcal{O}'(X; E)$ et soit Ω un ouvert où AT est $H^{s-\rho}$; alors T est H_{loc}^s dans Ω .

COROLLAIRE. - Tout opérateur A , ρ -elliptique, est hypo-elliptique:

$$AT \text{ est } C^\infty \text{ dans } \Omega \iff T \text{ est } C^\infty \text{ dans } \Omega \quad .$$

Preuve du théorème. - On peut supposer Ω relativement compact, alors T est d'ordre fini, soit $\in H^\lambda$ dans Ω . On peut supposer $\lambda - s$ entier.

Soit $A' \in \Gamma_{\text{loc}}(X ; F , E ; - \rho)$ et soit $C \in \mathcal{A}_{\text{loc}}(X ; E , E ; 0)$ tel que

$$A'A = I_E + C \quad .$$

Montrons par récurrence que T est H_{loc}^s dans Ω : si $\lambda \leq s - 1$: AT est $H_{\text{loc}}^{s-\rho}$ dans Ω , donc $A'AT$ est H_{loc}^s dans Ω et CT est $H_{\text{loc}}^{\lambda+1}$ dans Ω ; donc T est $H_{\text{loc}}^{\lambda+1}$ dans Ω . D'où T est H_{loc}^s dans Ω .

Remarque. - Il suffit, bien entendu, de supposer A elliptique dans Ω . Alors si A' est un symbole inverse de celui de A dans Ω , et si $\varphi \in \mathcal{D}^0(\Omega)$, $(\varphi) C$ a un symbole nul partout, donc appartient à

$$\mathcal{A}(X ; E , F ; 0) = \mathcal{L}(X ; E , F ; 1) \quad .$$

Alors si T est H_{loc}^λ dans Ω , le lemme montre quand même que φCT est $H_{\text{loc}}^{\lambda+1}$ dans Ω , donc aussi CT , d'où le résultat.
