Bernard Malgrange

Le théorème de préparation en géométrie différentiable. III. Propriétés différentiables des ensembles analytiques

Séminaire Henri Cartan, tome 15 (1962-1963), exp. nº 13, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1962-1963__15__A6_0>

LE THÉORÈME DE PRÉPARATION EN GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIABLE

par Bernard MALGRANGE

III. Propriétés différentiables des ensembles analytiques.

Dans cet exposé, nous allons rappeler certaines propriétés des ensembles analytiques-réels, et des fonctions différentiables sur les dits ensembles. Ces résultats, qui nous serviront la prochaine fois à établir le théorème de préparation annoncé antérieurement, sont dues à ŁOJASIEWICZ ([2] ; voir aussi [3], exposés 22-24) ; nous en reproduisons les démonstrations pour la commodité du lecteur.

1. Fonctions quasi-höldériennes.

Définition. - Soient Ω un ouvert borné $\subset \mathbb{R}^k$, et f une fonction sur Ω, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et soit $\alpha \in \mathbb{R}$, avec $0 < \alpha \leqslant 1$. On dit que f est quasi-höldérienne d'ordre α s'il existe $c > 0$ tel que, pour tout segment de droite $[x , y] \subset \Omega$, on ait

$$|f(x) - f(y)| \leqslant c\|x - y\|^\alpha \quad .$$

On dira naturellement que f est quasi-höldérienne s'il existe un α $(0 < \alpha \leqslant 1)$ tel que f soit quasi-höldérienne d'ordre α. Il est clair que f est alors continue.

(Si Ω était un ouvert quelconque, il serait naturel d'étendre la définition précédente, en convenant que f est quasi-höldérienne si elle l'est dans tout ouvert borné $\mathcal{O} \subset \Omega$; nous n'aurons pas besoin de cette extension.)

PROPOSITION 1. - Soient Ω un ouvert borné $\subset \mathbb{R}^k$, et a_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ des fonctions sur Ω à valeurs réelles, bornées et quasi-höldériennes d'ordre α. Soit f une fonction continue sur Ω, à valeurs réelles, vérifiant l'équation

$$f^p + \sum_{i=1}^{p} a_i f^{p-i} = 0 \quad .$$

Alors f est bornée et quasi-höldérienne (d'ordre $\frac{\alpha}{p}$).

La démonstration repose sur les lemmes (très élémentaires!) suivants :

LEMME 1. – <u>Les racines complexes de l'équation</u>

$$z^p + \sum_1^p c_i \, z^{p-i} = 0 \qquad (c_i \in \mathbb{C})$$

<u>vérifient</u> $|z| \leq 2 \sup_i |c_i|^{1/i}$.

En effet, par homothétie, on peut se ramener au cas où $\sup |c_i|^{1/i} = 1$; on a alors :

$$|z|^p \leq 1 + |z| + \dots + |z|^{p-1}$$

a fortiori

$$\sum_1^{+\infty} \frac{1}{|z|^k} \geq 1$$

d'où le résultat.

LEMME 2. – <u>Soient</u> z_j, <u>resp.</u> z'_k $(1 \leq j \leq p\ ,\ 1 \leq k \leq p)$ <u>les racines complexes de l'équation</u>

$$z^p + \sum c_i \, z^{p-i} = 0\ , \quad \text{resp.} \quad z^p + \sum c'_i \, z^{p-i} = 0 \qquad (c_i\ ,\ c'_i \in \mathbb{C}) \quad .$$

<u>Supposons qu'on ait, pour tout</u> i,

$$|c_i| \leq K^i\ , \qquad |c_i - c'_i| \leq K^i \, \delta \quad .$$

<u>Alors, pour chaque</u> j, <u>il existe un</u> k <u>tel qu'on ait</u> $|z_j - z'_k| \leq 2K \, \delta^{1/p}$.

En effet, on a :

$$\prod_k |z_j - z'_k| = z_j^p + \sum c'_i \, z_j^{p-i} = \sum (c'_i - c_i) \, z_j^{p-i}$$

et comme $|z_j| \leq 2K$ (lemme 1) :

$$\prod_k (z_j - z'_k) \leq 2^p \, K^p \, \delta$$

d'où le résultat.

La proposition 1 va maintenant résulter du lemme suivant :

LEMME 3. – <u>Soient</u> $K > 0$, $\alpha \in \,]0\ ,\ 1]$ <u>et soient</u> $b_1, \dots, b_p$ <u>des fonctions définies sur</u> $[t_1\ ,\ t_2] \subset \mathbb{R}$, <u>à valeurs complexes, et vérifiant, pour tout</u> i, <u>et pour tous</u> t et $t' \in [t_1\ ,\ t_2]$,

$$|b_i(t)| \leq K^i$$

$$|b_i(t) - b_i(t')| \leq K^i \, |t - t'|^\alpha \quad .$$

Soit f une fonction continue sur $[t_1 , t_2]$, à valeurs complexes, vérifiant l'équation

$$f^p + \sum b_i f^{p-i} = 0 \quad .$$

Alors, on a :

$$|f(t_2) - f(t_1)| \leqslant 4pK|t_2 - t_1|^{\alpha/p} \quad .$$

Soient en effet $z_1 , \dots , z_p$ les racines de l'équation

$$z^p + \sum b_i(t_1) z^{p-i} = 0 \quad ,$$

et supposons par exemple $f(t_1) = z_1$. Soit D_j le disque fermé de centre z_j, et de rayon $2K|t_2 - t_1|^{\alpha/p}$. Pour chaque $t \in [t_1 , t_2]$, on a, d'après le lemme 2,

$$f(t) \in \bigcup D_j \quad .$$

Comme f est continue, il en résulte que la composante connexe de z_1 dans $\bigcup D_j$ contient $f(t_2)$. D'où le résultat.

2. Germes analytiques irréductibles (1).

Soit $\mathcal{O}_n$ l'anneau des germes de fonctions analytiques (à valeurs réelles) au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$, et soit X_o un germe analytique réel en 0 dans $\mathbb{R}^n$, irréductible, de dimension k. Notons $\mathfrak{I} \subset \mathcal{O}_n$ l'idéal de X_o ($\mathfrak{I}$ est alors premier), et $f \rightsquigarrow \overline{f}$ l'application canonique $\mathcal{O}_n \to \mathcal{O}_n/\mathfrak{I}$.

Désignons par $x_1 , \dots , x_n$, les fonctions coordonnées dans $\mathbb{R}^n$; on sait que, moyennant un changement de coordonnées, on peut supposer ceci :

a. Les x_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ sont analytiquement indépendants mod $\mathfrak{I}$ (i. e. l'application $\mathcal{O}_k \to \mathcal{O}_n/\mathfrak{I}$ composée de l'injection évidente et de la projection $\mathcal{O}_n \to \mathcal{O}_n/\mathfrak{I}$ est injective), et $\mathcal{O}_n/\mathfrak{I}$ est un $\mathcal{O}_k$-module de type fini.

Soient respectivement $F(\mathcal{O}_n/\mathfrak{I})$ et $F(\mathcal{O}_k)$ les corps des fractions de ces deux anneaux. L'injection précédente permet de considérer $F(\mathcal{O}_n/\mathfrak{I})$ comme un surcorps de $F(\mathcal{O}_k)$. Posons alors $\ell = n - k$, et soit, pour $1 \leqslant j \leqslant \ell$, P_j le polynôme minimal de $\overline{x}_{k+j}$ sur $F(\mathcal{O}_k)$. Les $\overline{x}_{k+j}$ étant entiers sur $\mathcal{O}_k$, et $\mathcal{O}_k$ étant factoriel, P_j a ses coefficients dans $\mathcal{O}_k$. De plus, on vérifie aisément que P_j est distingué (i. e. unitaire, et les coefficients non dominants sont nuls à l'origine).

---

(1) Ici et dans la suite, nous utilisons un certain nombre de faits bien connus relatifs aux germes analytiques. Pour leur démonstration, voir par exemple [1].

Pour $j = 1$, nous écrirons P au lieu de P_1, et nous poserons $p = \deg P$.

b. L'élément $\bar{x}_{k+1}$ engendre $F(\mathcal{O}_n/\mathfrak{I})$ sur $F(\mathcal{O}_k)$. Désignant par $\Delta \in \mathcal{O}_k$ le discriminant de P (qui n'est pas identiquement nul, puisque P est irréductible), on sait qu'alors tout $\bar{f} \in \mathcal{O}_n/\mathfrak{I}$ s'écrit, d'une manière unique, sous la forme

$$\bar{f} = \frac{1}{\Delta} R(\bar{x}_{k+1})$$

R étant un polynôme à coefficients dans $\mathcal{O}_k$, de degré $< p$. En particulier, on écrira, pour $2 \leqslant j \leqslant \ell$,

$$x_{k+j} = \frac{1}{\Delta} Q_j(\bar{x}_{k+1}) \quad .$$

Soit alors X un sous-ensemble analytique d'un voisinage ouvert $U \subset \underset{\sim}{R}^n$ de 0 (voisinage que nous supposerons borné, ce qui n'est certainement pas gênant!), et tel que le germe de X en 0 soit X_o. Prenons un voisinage ouvert V de 0 dans $\underset{\sim}{R}^k$, tel que les coefficients des P_j et des Q_j soient convergents au voisinage de $\bar{U}$, et soit W un voisinage ouvert de 0 dans $\underset{\sim}{R}^\ell$ tel qu'on ait $V \times W \subset U$ et possédant la propriété suivante : pour tout $(x_1, \dots, x_k) \in V$, tout système $(x_{k+1}, \dots, x_n)$ de solutions réelles des équations

$$P_j(x_{k+j} ; x_1, \dots, x_k) = 0$$

appartient à W.

(Les P_j étant distingués, toutes les racines de P_j tendent vers 0 si $(x_1, \dots, x_k) \to 0$; par suite un tel W existe, si l'on a choisi V assez petit, ce que nous supposerons.)

Soit $\delta \subset V$ l'ensemble des zéros de Δ dans V ; si V a été choisi assez petit, ce que nous supposerons encore, l'intersection de X avec $(V - \delta) \times W$ coïncide avec l'ensemble défini par les relations

$$(2.1) \quad \begin{cases} (x_1, \dots, x_k) \in V - \delta \\ P(x_{k+1} ; x_1, \dots, x_k) = 0 \\ \Delta(x_1, \dots, x_k)\, x_{k+j} - Q_j(x_{k+1} ; x_1, \dots, x_k) = 0 \qquad (2 \leqslant j \leqslant \ell) \end{cases} .$$

En tout point $(x_1, \dots, x_k) \in V - \delta$, les racines du polynôme $P(x_{k+1} ; x_1, \dots, x_k)$ sont distinctes ; désignons par V_s $(1 \leqslant s \leqslant p)$ le sous-ensemble, évidemment ouvert, de $V - \delta$ où ce polynôme a au moins s racines réelles, et désignons ces racines par $F^1(x_1, \dots, x_k), \dots, F^s(x_1, \dots, x_k)$, en les rangeant par exemple par ordre croissant. Il est clair que pour tout r, $1 \leqslant r \leqslant p$, F^r est défini, continu, et borné sur V_r. Posons encore, pour $(x_1, \dots, x_k) \in V_r$,

$$\begin{cases} F_1^r = F^r \\ F_j^r(x_1 , \dots , x_k) = \dfrac{Q_j(F^r(x_1 , \dots , x_k) ; x_1 , \dots , x_k)}{\Delta(x_1 , \dots , x_k)} \end{cases} .$$

Les F_j^r sont encore définis, continus, et bornés sur V_r (immédiat).

Soit X'_r le sous-ensemble de X défini par les relations

$$(2.2) \qquad \begin{cases} (x_1 , \dots , x_k) \in V_r \\ x_{k+j} = F_j^r(x_1 , \dots , x_k) \qquad (1 \leq j \leq \ell) \end{cases}$$

(il nous arrivera quelquefois d'appeler X'_r la "r-ième nappe de X au-dessus de $V - \delta$") ; posons enfin $D = X \cap (\delta \times W)$, et $X_r = X'_r \cup D$. Les X_r sont évidemment fermés dans $V \times W$, et l'on a, d'après (2.1)

$$\bigcup_r X_r = X \cap (V \times W) .$$

PROPOSITION 2. - <u>Pour</u> $1 \leq r \leq p$, <u>les</u> F_j^r <u>sont quasi-höldériennes sur</u> V_r .

En effet, F_j^r est continue sur V_r , et vérifie $P_j(F_j^r ; x_1 , \dots , x_k) = 0$; par hypothèse, V_r est borné, et les coefficients de P_j sont convergents au voisinage de $\overline{V}_r$. La proposition 2 est donc un cas particulier de la proposition 1.

PROPOSITION 3. - <u>Pour</u> $1 \leq r \leq p$, X_r <u>est régulièrement séparé de</u> $\delta \times W$ (cet énoncé a un sens, car ce sont deux fermés de $V \times W$).

Soit en effet K' un cube compact $\subset V$; si K' est assez petit, on peut trouver (cf. définition de W) un cube compact $K'' \subset W$ tel qu'on ait

$$X \cap (K' \times W) = X \cap (K' \times K'') ;$$

posons $K = K' \times K''$, et soit

$$x = (x_1 , \dots , x_n) \in X_r \cap K .$$

Soit $y \in (\delta \times W) \cap K$ tel qu'on ait $\|x - y\| = d(x , (\delta \times W) \cap K)$. Posons

$$x' = (x_1 , \dots , x_k) , \quad x'' = (x_{k+1} , \dots , x_n)$$

et définissons de même y' et y'' , on a évidemment $x'' = y''$ et le segment $]x' , y'[$ appartient à $V_r \cap K'$; par suite, lorsque $z' \in]x' , y'[$ tend vers y' , la fonction $(F_1(z') , \dots , F_\ell(z'))$ a une valeur d'adhérence $\eta'' \in K'' \cap X_r$, et on a, d'après la proposition 2

$$\|x'' - \eta''\| \leq C\|x' - y'\|^\alpha$$

avec $C > 0$, $\alpha > 0$, indépendants de x .

Désignant par η le point $(y' , \eta'') \in X_r \cap (\delta \times W) = D$, on a donc

$$\|x - \eta\| \leq \|x' - y'\| + C\|x' - y'\|^{\alpha} \quad .$$

La proposition résulte alors du théorème 2, exposé 12, (et du caractère local de la régulière séparation).

Logiquement, ces propositions devraient maintenant nous servir à établir l'inégalité de Łojasiewicz (et c'est pourquoi nous n'avons pas fait usage, dans leur démonstration, de la proposition 1, exposé 12!). Cependant, pour ne pas rompre le fil de l'exposé, nous supposerons, jusqu'à la fin du paragraphe 2, cette inégalité acquise, et nous reporterons sa démonstration au paragraphe 3.

PROPOSITION 4. - <u>Pour tout couple</u> (r , s) , X_r <u>et</u> X_s <u>sont régulièrement séparés.</u>

Si $r = s$, il n'y a rien à démontrer. Sinon, nous pouvons supposer $r < s$, donc $V_r \supset V_s$. Reprenons alors les notations de la démonstration précédente ; soient $x = (x' , x'')$ un point de $X_s \cap K$, et $y = (y' , y'')$ un point de $X_r \cap K$, avec $\|x - y\| = d(x , X_r \cap K)$; on peut supposer $x' \notin \delta$ (sinon $x = y$ et il n'y a rien à démontrer).

Nous voulons établir qu'il existe $A > 0$, $\alpha > 0$ (dépendant de K , mais non de x) tels qu'on ait $\|x - y\| \geq A\, d(x , D)^{\alpha}$ (puisque $X_r \cap X_s = D$) ; d'après la proposition 3, il suffit de prouver qu'on a, pour d'autres A et α

$$\|x - y\| \geq A\, d(x' , \delta)^{\alpha} \quad .$$

Si le segment de droite $[x' , y']$ n'est pas dans V_s , il rencontre δ et le résultat est évident. Supposons donc $[x' , y'] \subset V_s$, et soit $\eta = (\eta' , \eta'')$ le point de X_r vérifiant $\eta' = x'$. Comme η_{k+1} et x_{k+1} sont deux racines distinctes de l'équation $P(x_{k+1} ; x_1 , \ldots , x_k) = 0$, et que toutes les racines (complexes) de cette équation sont bornées lorsque $x' = (x_1 , \ldots , x_k)$ parcourt K' , on trouve, en appliquant l'inégalité de Łojasiewicz au discriminant Δ de P ,

$$\|\eta_{k+1} - x_{k+1}\| \geq B\, d(x' , \delta)^{\beta} \qquad (B > 0 , \ \beta > 0) \quad .$$

D'autre part comme F^r est quasi-höldérien

$$\|\eta_{k+1} - y_{k+1}\| \leq C\|x' - y'\|^{\gamma} \qquad (C > 0 , \ \gamma > 0) \quad .$$

Si maintenant, on a $C\|x' - y'\|^{\gamma} \geq \frac{1}{2} B\, d(x' , \delta)^{\beta}$, il n'y a rien à démontrer ; dans le cas contraire, on a

$$\|\eta_{k+1} - y_{k+1}\| \leqslant \frac{1}{2} \|x_{k+1} - \eta_{k+1}\|$$

d'où

$$2\|x - y\| \geqslant 2\|x_{k+1} - y_{k+1}\| \geqslant \|x_{k+1} - \eta_{k+1}\| \geqslant B\ d(x' , \delta)^{\beta} \quad ,$$

d'où la proposition.

PROPOSITION 5. - <u>Pour</u> $1 \leqslant r \leqslant p$, et $1 \leqslant j \leqslant \ell$, <u>les fonctions</u> F_j^r <u>appartiennent à</u> $\mathfrak{M}(V - V_r ; V)$. (Pour cette notation, cf. exposé 12, page 12-07.)

D'après l'inégalité de Łojasiewicz, la fonction $\frac{1}{\Delta}$ (dans V_r) appartient à $\mathfrak{M}(V - V_r ; V)$. D'après l'expression des F_j^r et le fait (formule de Leibniz) que le produit de deux multiplicateurs est un multiplicateur, il suffit d'établir le résultat pour $j = 1$, i. e. pour F^r .

Comme F^r est une solution continue de l'équation $P(F^r , x') = 0$, c'est une fonction indéfiniment dérivable de $x' \in V_r$, et toutes ses dérivées sont de la forme

$$D^q F^r = R_q(F^r , D^{q'} F^r , x')/[\frac{\partial P}{\partial x_{k+1}}(F^r , x')]^{\lambda_q}$$

λ_q étant un entier $\geqslant 0$, et R^q un polynôme par rapport à F^r et à ses dérivées d'ordre $<$ (ordre de D^q), à coefficients convergents dans V (théorème des fonctions implicites).

En raisonnant par récurrence sur l'ordre de D^q , il suffit donc d'établir que, pour tout compact $K' \subset V$, il existe $B > 0$, $\beta > 0$ tels qu'on ait, $\forall\ x' \in K' \cap V_r$

$$\left|\frac{\partial P}{\partial x_{k+1}}(F^r , x')\right| \geqslant B\ d(x' , \delta)^{\beta} \quad .$$

Or cela résulte encore de l'inégalité de Łojasiewicz, appliquée à δ . D'où la proposition.

Notre but est maintenant de donner une description de l'espace $\mathfrak{I}(D ; X_r)$ (rappelons que cette notation désigne l'espace des fonctions différentiables au sens de WHITNEY sur X_r , nulles sur D). Pour cela, prenons un élément

$$f = (f^p)_{p \in \underset{\sim}{N}^n} \quad \text{de} \quad \mathfrak{I}(D ; X_r) \quad ,$$

et remarquons que f est entièrement défini par la collection $g = (g^q)_{q \in \underset{\sim}{N}^{\ell}}$ définie par

$$g^{(q_1,\dots,q_\ell)} = f^{(0,\dots,q_1,\dots,q_\ell)} \quad ,$$

puisque la donnée des dérivées "transversales" d'une fonction différentiable sur une variété suffit à déterminer toutes les dérivées.

Pour simplifier les notations, posons $\Lambda = \underset{\sim}{N}^{\ell}$, et $\Phi^r = (F_1^r , \ldots , F_\ell^r)$. A g associons la collection $h = (h^q)_{q \in \Lambda}$ de fonctions sur V_r définie par

$$h^q(x') = g^q(x' , \Phi^r(x')) \quad .$$

Il est clair que h^q est une fonction indéfiniment dérivable (au sens ordinaire) dans V_r. Nous avons ainsi défini une application

$$\pi : \mathfrak{I}(D ; X^r) \to \mathcal{E}(V_r)^\Lambda \quad .$$

THÉORÈME 1. – <u>L'application</u> π <u>est une bijection de</u> $\mathfrak{I}(D ; X_r)$ <u>sur</u> $\mathfrak{I}(V - V_r ; V)^\Lambda$.

(Rappelons que $\mathfrak{I}(V - V_r , V)$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur V, nulles ainsi que toutes leurs dérivées sur $V - V_r$; il s'identifie de façon évidente à un sous-espace de $\mathcal{E}(V_r)$.)

Comme π est injective, il suffit de prouver

a. que son image est contenue dans $\mathfrak{I}(V - V_r ; V)^\Lambda$.

b. qu'on obtient ainsi tout élément de $\mathfrak{I}(V - V_r ; V)^\Lambda$.

<u>Démonstration de (a)</u>. – Soit K' un compact $\subset V$; nous allons prouver ceci : lorsque $x' \in V_r \cap K'$ tend vers δ, $h^q(x')$ tend vers 0 ainsi que toutes ses dérivées. Il en résultera bien, (raisonnement élémentaire) que la fonction prolongée par 0 dans $V - V_r$ est indéfiniment dérivable, et plate sur $V - V_r$.

Or, toute dérivée de h^q s'écrit sous la forme d'une somme finie

$$\sum_p f^p(x' , \Phi^r) \times (\text{polynôme par rapport aux dérivées des } F_\ell^r)$$

(pour le voir, il suffit par exemple de prolonger f en une fonction différentiable sur $V_r \times W_r$, et d'appliquer la formule de dérivation des fonctions composées) ; compte tenu de la proposition 5, il suffit donc d'établir ceci : lorsque $x' \in V_r \cap K'$ tend vers δ, $f^p(x' , \Phi^r)$ tend vers 0 plus vite que toute puissance de $d(x' , \delta)$.

Or, posons $x = (x' , \Phi^r(x'))$. Lorsque $x' \in V_r \cap K'$ tend vers δ, $f^p(x)$ tend vers 0 plus vite que toute puissance de $d(x , D)$, par définition de $\mathfrak{I}(D ; X_r)$. Le résultat découle alors de la proposition 3.

Démonstration de (b). - Donnons-nous un $h = (h^q)_{q\in\Lambda}$, $h^q \in \mathfrak{I}(V - V_r ; V)$. Il suffit de démontrer ceci ; $\forall\ m \in \underset{\sim}{N}$, il existe une fonction H m fois continuement dérivable sur $V \times W$, nulle ainsi que ses dérivées d'ordre $\leqslant m$ sur $(V - V_r) \times W$, et vérifiant, pour tout $q \in \Lambda$, $|q| \leqslant m$

$$D^q\, H(x', \Phi^r(x')) = h^q(x') \qquad (\, D^q \text{, une dérivée en } \frac{\partial}{\partial x_{k+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}) \quad .$$

Pour cela, il suffit de prendre H égal à 0 sur $(V - V_r) \times W$ et à

$$\sum_{|q|\leq m} h^q(x') \frac{(x'' - \Phi^r)^q}{q!} \quad \text{sur} \quad V_r \times W \quad .$$

H aura les propriétés voulues (et sera même indéfiniment dérivable) à ceux du théorème 4, exposé 12, et de la proposition 5. Nous laissons les détails au lecteur.

Remarque. - Dans [2] et [3], le théorème 1, qui ne figure pas explicitement, est en fait énoncé sous forme duale, comme un théorème de décomposition transversale des "distributions prolongeables" sur $X_r - D$. Pour passer d'un énoncé à l'autre, il suffit de remarquer que le dual de $\mathfrak{I}(D ; X_r)$ est l'espace des distributions dans $V_r \times W$, à support dans X_r, qui peuvent être prolongées en une distribution à support compact dans $V \times W$.

3. Démonstration de l'inégalité de Łojasiewicz.

Rappelons-en l'énoncé :

THÉORÈME 2. - *Soit f une fonction analytique dans un ouvert $\Omega \subset \underset{\sim}{R}^n$, et soit E l'ensemble de ses zéros. Pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $A > 0$, $\alpha > 0$ tels qu'on ait $\forall\ x \in K$: $|f(x)| \geq A\, d(x, E)^\alpha$.*

Nous démontrerons ce théorème par récurrence sur n, et nous procéderons pour cela en deux étapes :

a. *Si le théorème est vrai pour $0, \dots, n-1$, et si X est un sous-ensemble analytique de Ω, de dimension $< n$, il existe $A > 0$, $\alpha > 0$ tels qu'on ait, $\forall\ x \in K \cap X$,*

$$|f(x)| \geq A\, d(x, E)^\alpha \quad .$$

b. *Si (a) est vrai, le théorème est vrai pour n.*

<u>Démonstration de (a)</u>. - Par BOREL-LEBESGUE, il suffit d'établir ceci : si $a \in X \cap E$, il existe $A > 0$, $\alpha > 0$ tels qu'on ait, pour tout $x \in X$ suffisamment voisin de a,

$$|f(x)| \geq A\, d(x , E)^{\alpha} \quad .$$

Pour simplifier, nous supposerons $a = 0$. Nous pouvons évidemment nous contenter de traiter le cas où le germe X_0 de X en 0 est irréductible et où $X_0 \not\subset E_0$. Soit $k < n$ la dimension de X_0. Nous démontrerons alors (a) par récurrence sur k, en établissant ceci

a'. <u>Il existe au voisinage de</u> 0 <u>un sous-ensemble analytique</u> $Y \subset X$, <u>avec</u> $Y_0 \neq X_0$ <u>(donc, d'après un résultat connu,</u> $\dim Y_0 < k$) <u>et des constantes</u> $A > 0$, $\alpha > 0$ <u>tels qu'on ait, pour tout</u> $x \in X$ <u>assez voisin de</u> 0

$$(3.1) \qquad |f(x)| \geq A\, d(x , Y)^{\alpha} \quad .$$

Montrons d'abord que (a) résulte de (a'). Par hypothèse de récurrence, il existe $B > 0$, $\alpha > 0$ tels qu'on ait, pour tout $y \in Y$ assez voisin de 0

$$(3.2) \qquad B|f(y)|^{\beta} \geq d(y , E) \quad .$$

Soit alors $x \in X$, et désignons par y un point de Y tel qu'on ait

$$(3.3) \qquad \|x - y\| = d(x , Y)$$

(un tel y existe certainement si x est assez voisin de 0).

On a donc

$$d(x , E) \leq \|x - y\| + d(y , E) \leq \|x - y\| + B|f(y)|^{\beta}$$

et (accroissements finis)

$$|f(x) - f(y)| \leq C\|x - y\|$$

d'où

$$d(x , E) \leq \|x - y\| + C'\|x - y\|^{\beta} + C'|f(x)|^{\beta} \quad ,$$

avec C' ne dépendant que de B ; β , C. Ceci, joint à (3.1) et (3.3), donne le résultat cherché.

Etablissons maintenant (a'). Pour cela, nous utiliserons le "dévissage" de X employé au paragraphe 2, en en conservant les notations. D'autre part, comme $\mathfrak{I}$ est premier, il existe $f_1 \in \mathcal{O}_n$, avec $f_1 \neq 0$, f_1 ne dépendant que de $x_1 , \ldots , x_k$, et $h \in \mathcal{O}_n$ tels qu'on ait

$$hf - f_1 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{I}} \quad .$$

(Prendre par exemple pour g le produit des conjugués de $\overline{f} \in \mathcal{O}_n/\mathfrak{I}$ sur $F(\mathcal{O}_k)$.)

Il est clair qu'on peut alors remplacer f par f_1 et E par E_1 , l'ensemble des zéros de f_1 , ce que nous ferons dans la suite, en omettant l'indice 1 .

Cela étant, montrons que (a') est vérifié lorsqu'on prend $Y = D \cup (E \cap X)$. Pour cela, prenons un point $x \in X$, assez voisin de 0 , et supposons par exemple $x \in X_r$. Posons, comme au paragraphe 2,

$$x = (x' , x'') , \quad \text{avec} \quad x' = (x_1 , \dots , x_k) , \quad x'' = (x_{k+1} , \dots , x_n) \quad .$$

Si $x' \in \delta$, il n'y a rien à démontrer, puisque $x \in D$. Sinon, on a $x' \in V_r$. Soit y' un point de $\delta \cup E'$ (E' = ensemble des zéros de f dans $\underset{\sim}{R}^k$) tel qu'on ait

$$d(x' , \delta \cup E') = \|x' - y'\| \quad ;$$

un tel y' existe pour tout x assez voisin de 0 . Par hypothèse de récurrence (f ne dépend que de $x_1 , \dots , x_k$) , on a pour $A > 0$, $\alpha > 0$ ne dépendant pas de x

$$(3.4) \qquad |f(x)| \geqslant A\|x' - y'\|^{\alpha} \quad .$$

Si x est assez voisin de 0 , il est clair que le segment $]x' , y'[$ est contenu dans V_r ; lorsque $z \in]x' , y'[$ tend vers y' , $\Phi^r(z')$ a un point adhérent y'' , et l'on a $y = (y' , y'') \in D \cup (E \cap X) = Y$, puisque y appartient à D si $y' \in \delta$, et à $E \cap X$ si $y' \in E'$. Comme Φ^r est quasi-höldérienne (proposition 2), on a

$$(3.5) \quad \|x'' - y''\| \leqslant B\|x' - y'\|^{\beta} \qquad (B > 0 \ ; \ \beta > 0 \text{ , indépendants de } x \text{ et } y) \ .$$

D'après (3.4) et (3.5), il existe $C > 0$, $\gamma > 0$ indépendants de x , tels qu'on ait

$$|f(x)| \geqslant C\|x - y\|^{\gamma} \quad .$$

Puisque $y \in Y$, cela entraîne (a').

<u>Démonstration de (b)</u>. – En raisonnant comme en (a), il suffit de se placer au voisinage de l'origine, et de trouver un sous-ensemble analytique Y , de dimension $< n$, et des constantes $A > 0$, $\alpha > 0$ tels qu'on ait, pour tout x assez voisin de 0

$$|f(x)| \geqslant A \ d(x , Y)^{\alpha} \quad .$$

D'après le théorème de préparation de Weierstrass, on peut supposer que f est un polynôme distingué en x_n ; on peut aussi supposer que f est irréductible en 0 (raisonner par récurrence sur le nombre de facteurs irréductible de f), donc que son discriminant $\Delta(x_1 , \ldots , x_{n-1})$ ne s'annule pas identiquement. Soit D l'ensemble des zéros de Δ ; montrons que l'on peut prendre $Y = E \cup D$.

Pour cela écrivons, pour $x_1 , \ldots , x_{n-1}$ fixés, $f = f'f''$ avec

$$f' = \prod_{\xi_j \in \underset{\sim}{R}} (x_n - \xi_j) \qquad f'' = \prod_{\xi_j \notin \underset{\sim}{R}} (x_n - \xi_j) \quad .$$

Pour x assez voisin de 0 , on a évidemment

$$|f'(x)| \geq B \inf_j |x_n - \xi_j|^m \qquad (m = \deg_{x_n} f) \tag{3.6}$$

$$|f''(x)| \geq \prod_{\xi_j \notin \underset{\sim}{R}} \frac{1}{2} |\overline{\xi}_j - \xi_j| \geq C\ \Delta(x)^2 \tag{3.7}$$

(puisque $\overline{\xi}_j - \xi_j$ est un facteur de Δ , et que tous les facteurs de Δ sont bornés).

Par hypothèse de récurrence, le théorème 2 est vrai pour Δ ; de (3.7), on déduit donc

$$|f''(x)| \geq C'\ d(x , D)^{\gamma} \tag{3.8}$$

(3.6) et (3.8) entraînent le résultat.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HOUZEL (Christian). - Géométrie analytique locale, I-IV, Séminaire Cartan, t. 13, 1960/61 : Familles d'espaces complexes et fondements de la géométrie analytique, exposés n° 18 à 21, 74 p.

[2] ŁOJASIEWICZ (S.). - Sur le problème de la division, Studia Mathematica, t. 18, 1959, p. 87-136 ; Rozprawy Matematyczne, n° 22, 1961.

[3] MALGRANGE (Bernard). - Division des distributions, II-III, Séminaire Schwartz, t. 4, 1959/60 : Unicité du problème de Cauchy, Division des distributions, n° 22-24, 19 p.