

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

CLAUDE MORLET

Le lemme de Thom et les théorèmes de plongement de Whitney.

I. Les topologies des espaces d'applications

Séminaire Henri Cartan, tome 14 (1961-1962), exp. n° 4, p. 1-5

http://www.numdam.org/item?id=SHC_1961-1962__14__A4_0

© Séminaire Henri Cartan

(Secrétariat mathématique, Paris), 1961-1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LE LEMME DE THOM ET LES THÉORÈMES DE PLONGEMENT DE WHITNEY

par Claude MORLET

I. Les topologies des espaces d'applications.

1. Espaces d'applications.

Définition. - Étant données deux variétés V et M de classe C^r (au moins), on note $\text{Hom}^r(V, M)$ l'ensemble des applications de classe C^r de V dans M ($0 \leq r \leq +\infty$).

Dans la suite V et M seront toujours réunions dénombrables de compacts et M sera connexe. M sera une variété connexe, sans bord (cette hypothèse n'a rien d'essentiel, mais elle simplifiera les démonstrations) ; V pourra avoir un bord et même un bord anguleux.

Définition. - Un système de bonnes cartes locales sur une variété V est la donnée d'un recouvrement de V par des ouverts $(V_i)_{i \in I}$, et d'une famille localement finie de compacts $(V_i)_{i \in I}$ de V dont les intérieurs recouvrent V et tels que, pour tout i , $V_i \subset V_i$; avec, pour tout i , un homéomorphisme de V_i sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (resp. la partie $x_n \geq 0$, ou la partie $x_j \geq 0$ pour $j \geq j_0$ si la variété est à bord ou à coins).

Je laisse au lecteur le soin de vérifier qu'il existe sur toute variété un système de bonnes cartes locales, et même qu'il en existe d'aussi fins que l'on veut.

Définition. - Étant données deux variétés de classe C^r ($0 \leq r < +\infty$) V et M , et des systèmes de bonnes cartes locales $(V_i)_{i \in I}$ et $(M_j)_{j \in J}$ sur V et M , avec une application λ de l'ensemble d'indices I dans l'ensemble d'indices J , on notera $\text{Hom}^r(\lambda, V, M)$ l'ensemble des applications de classe C^r de V dans M qui, pour tout i , envoient V_i dans l'intérieur de $M_{\lambda(i)}$.

Je laisse au lecteur le soin de vérifier qu'étant donné un système de bonnes cartes locales sur M et une fonction f de classe C^r de V dans M , il existe un système de bonnes cartes locales sur V et une application λ , tels que f appartienne à $\text{Hom}^r(\lambda, V, M)$. En particulier, les $\text{Hom}^r(\lambda, V, M)$ recouvrent $\text{Hom}^r(V, M)$.

2. Les topologies $K-C^r$.

Définition. - Etant donné un $\text{Hom}^r(\lambda, V, M)$ ($0 \leq r \leq +\infty$) et un compact K de V , on appelle topologie $K-C^r$ sur cet espace de fonctions :

a. Si K est contenu dans l'un des compacts V_i du système de bonnes cartes locales de V , la topologie de la convergence uniforme des fonctions et de leurs r premières dérivées sur K . (C'est-à-dire la convergence uniforme des restrictions à K de ces fonctions, considérées comme des fonctions de K dans $M_{\lambda(i)}$.)

b. Si K n'est pas contenu dans un des V_i , il n'en rencontre qu'un nombre fini, la $(K-C^r)$ -topologie sera alors la moins fine de toutes les topologies qui sont plus fines que toutes les $((K \cap V_i)-C^r)$ -topologies correspondantes.

Remarquons que ces topologies ne sont pas, en général, séparées (sauf si $K = V$) et qu'elles peuvent être définies chacune par un écart (même si r est infini).

LEMME. - Soient deux espaces $\text{Hom}^r(\lambda, V, M)$ et $\text{Hom}^r(\lambda', V, M)$ et un compact K de V ; les topologies $K-C^r$ définies sur chacun de ces deux espaces induisent la même topologie sur leur intersection.

Remarquons que, quelle que soit la famille $(K_a)_{a \in A}$ de compacts recouvrant K , la $(K-C^r)$ -topologie est la moins fine de toutes les topologies plus fines que toutes les (K_a-C^r) -topologies. Il suffit donc de démontrer le lemme dans le cas où K est contenu dans l'un des V_i et dans l'un des V'_i . On a alors à comparer les dérivées de

$$R^n \supset U \xrightarrow{\varphi_i^{-1}} V_i \xrightarrow{f} M_{\lambda(i)} \xrightarrow{\psi_{\lambda(i)}} R^p$$

et de

$$R^n \supset U' \xrightarrow{\varphi_{i'}^{-1}} V'_{i'} \xrightarrow{f} M_{\lambda'(i')} \xrightarrow{\psi_{\lambda'(i')}} R^p \quad .$$

et l'on a des majorations évidentes en fonction des dérivées de φ_i , $\varphi_{i'}$, $\psi_{\lambda(i)}$, $\psi_{\lambda'(i')}$ qui sont bornées sur K .

Définition. - On appelle $(K-C^r)$ -topologie sur $\text{Hom}^r(V, M)$ la topologie qui induit sur chacun des $\text{Hom}^r(\lambda, V, M)$ la $(K-C^r)$ -topologie précédemment définie.

Cette définition est légitime à cause du lemme précédent.

Remarques. - Si K contient K' , la $(K-C^r)$ -topologie est plus fine que la $(K'-C^r)$ -topologie. Si r est plus grand que r' , la $(K-C^r)$ -topologie est plus fine que la $(K-C^{r'})$ -topologie.

3. Les topologies C^r et C^r .

Définition. - On appelle topologie C^r ($0 \leq r \leq +\infty$) (sur $\text{Hom}^r(V, M)$ ou sur $\text{Hom}^r(\lambda, V, M)$) la moins fine de toutes les topologies qui soient plus fines que toutes les topologies $K-C^r$.

Il en résulte que la topologie C^r sur $\text{Hom}^r(\lambda, V, M)$ est la restriction à ce sous-espace de la topologie C^r sur $\text{Hom}^r(V, M)$.

Définition. - On appelle topologie C^r (sur $\text{Hom}^r(V, M)$, ou sur $\text{Hom}^r(\lambda, V, M)$) la topologie la plus fine qui rende ouverte les bijections identiques

$$(\text{Hom}^r(\lambda, V, M) \text{ muni de } C^r) \rightarrow (\text{Hom}^r(\lambda, V, M) \text{ muni de } K-C^r)$$

$$[\text{resp. } (\text{Hom}^r(V, M) \text{ muni de } C^r) \rightarrow (\text{Hom}^r(V, M) \text{ muni de } K-C^r)]$$

pour tous les K de V .

Il en résulte que la topologie C^r sur $\text{Hom}^r(\lambda, V, M)$ est la restriction à ce sous-espace de la topologie C^r sur $\text{Hom}^r(V, M)$.

Remarque. - La topologie C^r est plus fine que la topologie C^r ; elles sont identiques si et seulement si V est compact. (Il existe alors une topologie $K-C^r$ plus fine que toutes les autres.)

On remarquera que la topologie définie par DOUADY au début de l'exposé 2 n'est autre que la topologie C^∞ .

On va prouver le théorème suivant.

THÉORÈME. - Tout fermé d'un $\text{Hom}^r(\lambda, V, M)$ pour la topologie C^r est un espace de Baire pour la topologie C^r .

Et comme les $\text{Hom}^r(\lambda, V, M)$ sont ouverts pour la topologie C^r , on peut

énoncer :

COROLLAIRE. - Tout fermé de $\text{Hom}^r(V, M)$ pour la topologie C^r est un espace de Baire pour la topologie C^r .

On a remarqué que les topologies $K-C^r$ sur $\text{Hom}^r(\lambda, V, M)$ étaient définies chacune par une famille d'écartes ; si l'on regarde alors les définitions des topologies C^r et C^r , on voit qu'il suffit de démontrer le lemme de topologie suivant pour avoir le théorème annoncé :

LEMME. - Soit X un espace topologique séparé, et sur cet espace une famille d'écartes $(d_i)_{i \in I}$ tels que, pour tout point x , si l'on se donne une famille $(a_i)_{i \in I}$ de nombres strictement positifs, les y qui vérifient $d_i(x, y) \leq a_i$ pour tout i forment un voisinage de x , et que les voisinages de cette forme constituent une base de voisinages de x . On suppose de plus que si une suite $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy pour chacun des d_i , il existe un x tel que, pour tout i , $d_i(x, x_n)$ tende vers zéro quand n tend vers l'infini. Autrement dit la structure uniforme engendrée par cette famille d'écartes est complète pour les suites. Alors X est un espace de Baire.

Démontrons ce lemme. Soient dans X une suite U_n d'ouverts partout denses, et V un ouvert non vide quelconque ; montrons que l'intersection des U_n et de V n'est pas vide. Pour cela on va définir une suite x_n par récurrence.

On prendra x_1 dans $U_1 \cap V$. On peut alors trouver un voisinage de x_1 contenu lui aussi dans $U_1 \cap V$ et qui se compose des y tels que $d_i(y, x_1) \leq a_i^1$ pour tout i . Soit V_1 l'ensemble des y tels que $d_i(y, x_1) \leq \frac{1}{2} a_i^1$ pour tout i .

On prend x_2 dans $U_2 \cap V_1$, et on définit de la même façon un voisinage de x_2 contenu dans $U_2 \cap V_1$, ainsi qu'un voisinage "moitié" V_2 . Et ainsi de suite.

Remarquons que l'on peut toujours s'arranger pour que l'on ait, pour tout i , et pour tout n , $a_i^{n+1} \leq \frac{1}{2} a_i^n$; alors la suite $\{x_n\}$ est de Cauchy pour chacun des d_i . Soit donc x un point tel que $d_i(x, x_n)$ tende vers zéro pour tout i ; on remarque que $d_i(x, x_n) \leq \lim d_i(x_{n+m}, x_n) \leq a_i^n$ pour tout i et tout n . Ce qui prouve que x appartient à V_n pour tous les n , donc à tous les U_n et à V .

Énonçons encore trois propriétés de ces topologies dont nous aurons besoin dans la suite.

LEMME a. - Pour $r > r'$ ($0 \leq r, r' \leq +\infty$), l'injection naturelle de

$\text{Hom}^r(V, M)$ dans $\text{Hom}^{r'}(V, M)$ est continue pour les topologies $K\text{-}C^r$ et $K\text{-}C^{r'}$ (resp. C^r et $C^{r'}$, resp. C^r et $C^{r'}$).

C'est trivial.

LEMME b. - ($0 \leq r, r' \leq +\infty$). Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $r > r'$; alors $\text{Hom}^r(U, \mathbb{R}^n)$ est partout dense dans $\text{Hom}^{r'}(U, \mathbb{R}^n)$ pour la topologie $C^{r'}$.

LEMME c. - ($0 \leq r' < r \leq +\infty$). Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, K un compact de U , V un voisinage quelconque de K dans U , f une fonction de classe $C^{r'}$ de U dans $\mathbb{R}^n$; alors il existe aussi près que l'on veut de f au sens $C^{r'}$, une fonction g qui coïncide avec f en dehors de V et qui soit de classe C^r sur K .

On remarque tout de suite qu'il suffit de démontrer les lemmes b et c dans le cas $n = 1$. On démontre d'abord le lemme c par convolution avec une cloche de classe C^r . Ensuite, on en déduit le lemme b en répétant l'opération pour toute une suite de compacts qui recouvrent U . Pour une démonstration détaillée, je renvoie au mémoire de WHITNEY [5] (*), où l'on verra d'ailleurs que l'on peut supposer que la classe C^r est la classe des fonctions analytiques.

Remarque. - Si $\text{Hom}^s(\lambda, V, M)$ ($0 \leq s \leq \infty$) contient une application propre f , toutes les applications de $\text{Hom}^s(\lambda, V, M)$ sont propres. Les applications propres forment donc un ouvert (et aussi un fermé) de $\text{Hom}^s(V, M)$ pour la topologie C^s .

(*) Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie commune aux exposés 4 à 7, placée à la fin de l'exposé n° 7.