SÉMINAIRE HENRI CARTAN

ADRIEN DOUADY

Arrondissement des arêtes

Séminaire Henri Cartan, tome 14 (1961-1962), exp. nº 3, p. 1-25
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1961-1962__14__A3_0>

Séminaire Henri CARTAN
(Topologie différentielle)
14e année, 1961/62, n° 3

13 novembre 1961

ARRONDISSEMENT DES ARÊTES

par Adrien DOUADY

I. Arrondissement des arêtes

1. Théorème d'arrondissement des arêtes.

DÉFINITION 1. - Soit V une variété à bord anguleux. On appelle arête de V toute sous-variété sans bord relatif X de V, de codimension 2 et de coïndice 2 (cf. Exposé 1, I, n° 7 et 8).

Soit θ un difféomorphisme croissant de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur $[0, \pi]$, tel que $\theta(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \pi - \theta(\alpha)$. On notera $\overline{\theta}$ l'homéomorphisme du quart de disque

$$B_o^{2,2} = \{(x, y), \ x \geqslant 0, \ y \geqslant 0, \ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$$

sur le demi-disque

$$B_o^{2,1} = \{(x, y), \ y \geqslant 0, \ x^2 + y^2 \leqslant 0\}$$

qui au point de coordonnées polaires (ρ, α) associe le point de coordonnées polaires $(\rho, \theta(\alpha))$. C'est un difféomorphisme en dehors de 0.

Pour tout $(2, 2)$-tube, i. e. pour tout fibré B, de fibre $B_o^{2,2}$ et de groupe structural $\mathbb{Z}_2$ opérant par symétrie $(x, y) \to (y, x)$, sur une variété à bord anguleux X, on notera encore $\overline{\theta}$ l'homéomorphisme de B sur le $(2, 1)$-tube associé B', de fibre $B_o^{2,1}$ où $\mathbb{Z}_2$ opère par symétrie $(x, y) \to (-x, y)$, obtenu en transportant $\overline{\theta}$ sur chaque fibre.

DÉFINITION 2. - Soient V une variété à bord anguleux, X une arête de V, θ une fonction satisfaisant aux conditions ci-dessus. On appellera variété obtenue à partir de V en arrondissant X à l'aide de la fonction θ et du voisinage tubulaire (N, μ, ψ) de X dans V (où ψ est un plongement dans V d'un $(2, 2)$-tube B sur X) la variété V' obtenue à partir de la somme disjointe $(V - X) \cup B'$, où B' est le $(2, 1)$-tube associé à B, en identifiant x à $\overline{\theta}(\psi^{-1}(x))$ pour tout $x \in N - X$.

Remarques.

(1) L'espace topologique sous-jacent à V' s'identifie à celui de V, et l'application identique $V \to V'$ est un difféomorphisme en dehors de X.

(2) X devient une sous-variété sans bord relatif de V', de codimension 2 et de coïndice 2, et l'application canonique $\psi' : B' \to V'$ définit un voisinage tubulaire de X dans V'.

(3) $\partial^1(V')$ est obtenu à partir de $\partial^1(V)$ par recollement suivant l'involution du revêtement à deux feuillets de X induit par $\partial^1 \partial^1 V \to \partial^2 V$ (Exposé 1, I, 6, p. 3).

(4) Pour toute variété W, $V' \times W$ est obtenue à partir de $V \times W$ en arrondissant l'arête $X \times W$.

THÉORÈME 1. – Soient V une variété à bord anguleux, X une arête compacte de V.

a. Deux variétés V'_1 et V'_2 obtenues à partir de V en arrondissant X sont difféomorphes.

b. Si G est un fermé de V, tel que $G \cap X = \emptyset$, il existe un difféomorphisme de V'_1 sur V'_2 qui coïncide, sur $G \cup X$, avec l'application identique de V.

Démonstration. – V'_1 et V'_2 sont obtenues grâce à des fonctions θ_1 et θ_2 et à des voisinages tubulaires (N_1, μ_1, ψ_1) et (N_2, μ_2, ψ_2) respectivement. On va étudier séparément les cas $\theta_1 = \theta_2$ et $(N_1, \mu_1, \psi_1) = (N_2, \mu_2, \psi_2)$. Le cas général s'en déduira en changeant d'abord le voisinage tubulaire, puis la fonction θ.

α. Changement de voisinage tubulaire, $\theta_1 = \theta_2$. – Pour $i = 1, 2$, ψ_i est un plongement de B_i dans V. D'après le théorème 2 de l'exposé 2 (p. 4), il existe un isomorphisme de fibrés $f : B_1 \to B_2$ et un difféomorphisme γ de V sur elle-même tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\psi_1"'] & B_2 \arrow[d, "\psi_2'"] \\ V \arrow[r, "\gamma"] & V \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

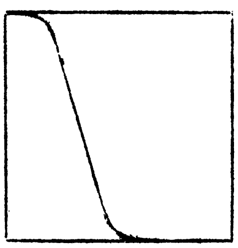
L'isomorphisme f donne naissance à un isomorphisme $f' : B'_1 \to B'_2$ des fibrés associés de fibre $B_o^{2,1}$, et le diagramme

$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\overline{\theta}"'] & B_2 \arrow[d, "\overline{\theta}"] \\ B'_1 \arrow[r, "f'"] & B'_2 \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Les difféomorphismes γ et f', qui forment un diagramme commutatif avec les $\overline{\theta} \circ \psi_i^{-1}$, se recollent en un difféomorphisme γ' de V'_1 sur V'_2 qui répond à la question. La partie (b) découle de la partie (b) du théorème 2 de l'exposé 2.

β. <u>Changement de</u> θ. – Soit η une application C^∞ de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$, telle que $\eta = 1$ au voisinage de 0 et 0 au voisinage de 1, et considérons l'application g du demi-disque $B_o^{2,1}$ dans lui-même qui au point de coordonnées polaires (ρ, α) fait correspondre le point de coordonnées polaires $(\rho, \eta\alpha + (1 - \eta) \quad \theta_2(\theta_1^{-1}(\alpha)))$. g coïncide avec l'identité au voisinage de 0 et avec $\theta_2 \circ \theta_1^{-1}$ au voisinage du demi-cercle $\rho = 1$; c'est un difféomorphisme du demi-disque sur lui-même. Soit $\overline{g}$ le difféomorphisme de B' sur lui-même obtenu en transportant g sur chaque fibre. L'homéomorphisme γ de $N = \psi(B)$ sur lui-même tel que le diagramme



η

$$\begin{tikzcd} B' \arrow[r, "\overline{g}"] & B' \\ B \arrow[u, "\theta_1"] \arrow[d, "\psi"'] & B \arrow[u, "\theta_2"'] \arrow[d, "\psi"] \\ N \arrow[r, "\gamma"] & N \end{tikzcd}$$

soit commutatif, coïncide avec l'identité sur le bord relatif de N dans V, et se prolonge donc par I sur $V - N$ en un homéomorphisme, encore noté γ, de

V sur elle-même, qui induit un automorphisme C^∞ sur $V - X$. Les automorphismes γ de $V - X$ et $\overline{g}$ de B' se recollent en un difféomorphisme γ' de V_1' sur V_2', qui répond à la question. Pour la partie (b), remarquons qu'on peut prendre η à support dans $[0, \varepsilon[$, ε arbitraire. Ceci achève la démonstration du théorème 1.

Remarque. – Dans le cas (α) : $(\theta_1 = \theta_2)$, l'homéomorphisme $\gamma : V \to V$ identique à γ' est un difféomorphisme. Il n'en n'est pas de même dans le cas (β).

2. Exemples.

PROPOSITION 1.

a. Une variété V, obtenue à partir de la demi-boule

$$D_+^n = \{(x_1, \dots, x_n), \ x_1^2 + \dots + x_n^2 \leqslant 1, \ x_n \geqslant 0\}$$

en arrondissant l'arête S^{n-2}, est difféomorphe à la boule D^n.

b. On peut trouver un difféomorphisme $\varphi : V \to D$ qui coïncide avec l'identité sur S_+^{n-1} et avec la projection stéréographique sur D^{n-1}.

Démonstration. – Repérons un point $z \in D^n$ par

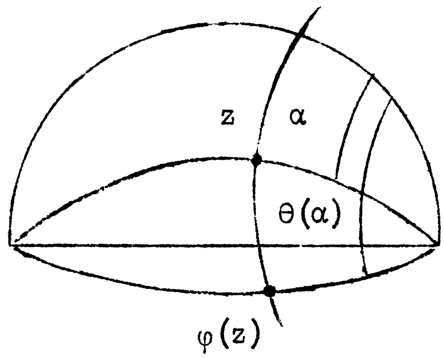
– l'angle α de la sphère Σ_α contenant S^{n-2} et passant par z déterminé par

$$0 \leqslant \alpha \leqslant \pi, \quad \alpha \leqslant \frac{\pi}{2} \text{ si et seulement si } z \in D_+^n .$$

– les coordonnées polaires (ρ, u), $\rho \in [0, 1]$, $u \in S^{n-2}$, du point x où le cercle Γ orthogonal aux Σ_α passant par z rencontre D^{n-1}.

L'application $\varphi : D_+^n \to D^n$ qui, au point repéré par (α, ρ, u) associe le point repéré par $(\theta(\alpha), \rho, u)$ est un difféomorphisme sauf sur S^{n-2}. L'application $\psi : S^{n-2} \times B_0^{2,1}$ qui, à (u, y), où $u \in S^{n-2}$, $y \in B_0^{2,1}$ a pour coordonnées polaires (r, α), associe le point z, repéré par $(\alpha, \rho = 1 - \frac{r}{2}, u)$, définit un voisinage tubulaire de S^{n-2} dans D^n, et induit un voisinage tubulaire de S^{n-2} dans D_+^n. Le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} S^{n-2} \times B_o^{2,2} & \xrightarrow{\bar{\theta}} & S^{n-2} \times B_o^{2,1} \\ \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\ D_+^n & \xrightarrow{\varphi} & D^n \end{array}$$



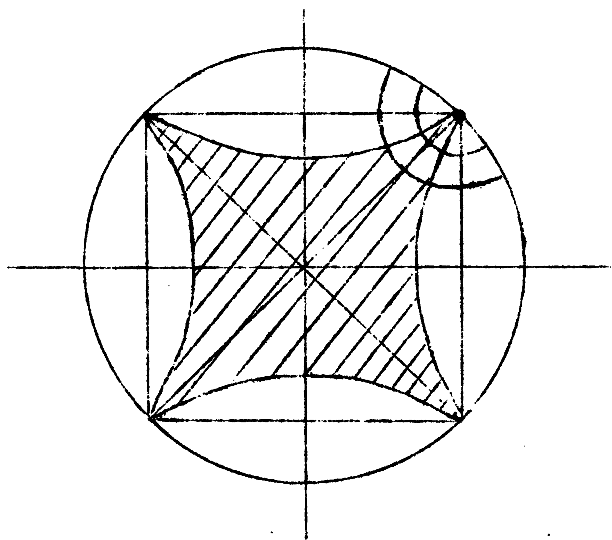
est commutatif, donc φ est un difféomorphisme de la variété V, obtenue en arrondissant S^{n-2} dans D_+^n à l'aide de ψ, sur D^n.

PROPOSITION 2. - Une variété obtenue à partir du produit $D^p \times D^q$ en arrondissant l'arête $S^{p-1} \times S^{q-1}$ est difféomorphe à D^{p+q}.

<u>Démonstration</u>. - Considérons dans $\underset{\sim}{R}^{p+q} = \underset{\sim}{R}^p \times \underset{\sim}{R}^q$ la surface Σ_α d'équation $\cos\alpha(\|x\|^2 - \|y\|^2) + \sin\alpha(\|x\|^2 + \|y\|^2 - 2) = 0$.

Par tout point $z \in D^{p+q}(\sqrt{2})$ passe une surface Σ_α et une seule, $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$, sauf si $z \in S^{p-1} \times S^{q-1}$, et $z \in D^p \times D^q$ si et seulement si $\alpha \in (-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4})$. Si θ vérifie $\theta(\alpha) = \alpha + \frac{\pi}{4}$ pour α voisin de $\frac{\pi}{4}$, ce qu'on peut toujours supposer grâce au théorème 1, considérons l'application φ de $D^p \times D^q$ sur $D^{p+q}(\sqrt{2})$ qui, à un point z de la surface Σ_α, fait correspondre le point z' qui se trouve sur la même trajectoire orthogonale aux Σ_α que z, et sur la surface $\Sigma_{\alpha'}$ avec $\alpha' = \theta(\alpha + \frac{\pi}{4}) - \frac{\pi}{2}$. L'application φ est un difféomorphisme de la variété obtenue en arrondissant $S^{p-1} \times S^{q-1}$ dans $D^p \times D^q$ sur $D^{p+q}(\sqrt{2})$.

Cette proposition pourra aussi se déduire du théorème 6.



PROPOSITION 3. - Soit $\mathfrak{M}$ l'ensemble des classes, à un difféomorphisme près, de variétés compactes à bord lisse. L'opération qui, à deux variétés V_1 et V_2, fait correspondre une variété V obtenue à partir de $V_1 \times V_2$ en arrondissant l'arête $\partial V_1 \times \partial V_2$, munit $\mathfrak{M}$ d'une loi de composition. Cette proposition est une conséquence immédiate du théorème 1. Cette loi est évidemment commutative. Le lecteur pourra montrer, à titre d'exercice, qu'elle est associative (cf. exercice 3 à la fin de l'exposé).

Commutation avec le recollement.

THÉORÈME 2. - Soient V une variété à bord anguleux, F une face de V, f un difféomorphisme involutif sans point fixe de F sur elle-même. Soient $W = (V/f , \sigma)$ une variété recollant V suivant f, et $\chi : V \to W$ l'application canonique. Si X est une arête compacte de V, non contenue dans F et telle que $f(X \cap F) = X \cap F$, alors $Y = \chi(X)$ est une arête de W. Soit alors W' une variété obtenue à partir de W en arrondissant Y.

a. Il existe une variété V' obtenue à partir de V en arrondissant X telle que, si F' désigne la face de V' identique à F, f soit encore un difféomorphisme de F' sur elle-même. Toute variété W'_o, recollant V' suivant $f : F' \to F'$, est difféomorphe à W'.

b. Si G est un fermé de W' ne rencontrant pas Y, on peut trouver un difféomorphisme $\gamma : W' \to W'_o$ qui coïncide, sur $G \cup Y$, avec l'application identique de V/f.

Démonstration. - La structure de variété σ de W est de la forme $\sigma(\psi)$ (notations de la démonstration du théorème 3 de l'exposé 2, page 9), où $\psi : F \times [0 , 1) \to V$ définit un voisinage tubulaire de F dans V. On en déduit un voisinage tubulaire (N_1 , μ_1 , ψ_1) de F/f dans W. Soit $(N'_1 , \mu'_1 , \psi'_1)$ un voisinage tubulaire de Y dans W, tel qu'il existe un voisinage tubulaire de $Y \cap F/f$ dans W adapté simultanément à (N_1 , μ_1 , ψ_1) et $(N'_1 , \mu'_1 , \psi'_1)$. Ce voisinage tubulaire se relève en un voisinage tubulaire (N' , μ' , ψ') de X dans V, tel qu'il existe un voisinage tubulaire de $X \cap F$ dans V adapté simultanément à (N , μ , ψ) et (N' , μ' , ψ'). On vérifie que la variété W'_o obtenue à partir de W en arrondissant Y à l'aide de $(N'_1 , \mu'_1 , \psi'_1)$ peut également être obtenue en recollant V' suivant f par un voisinage tubulaire de F' dans V' déduit de (N , μ , ψ), V' désignant la variété obtenue à partir de V en arrondissant X à l'aide de (N' , μ' , ψ'), et F' la face de V' correspondant à F.

D'après le théorème 1, toute variété W' , obtenue à partir de W en arrondissant Y , est difféomorphe à W'_0 , ce qui démontre le théorème 2, la partie (b) se déduisant de la partie (b) du théorème 1.

II. Introduction d'arêtes et recollement suivant une semi-face

1. Introduction d'arêtes.

DÉFINITION 3. - Soient V une variété à bord anguleux, X une sous-variété de V sans bord relatif, de codimension 2 et de coïndice 1 , et θ une fonction satisfaisant aux conditions du n° 1. On appellera variété obtenue à partir de V , en introduisant une arête en X à l'aide de la fonction θ et du voisinage tubulaire (N , μ , ψ) , où $\psi : B \to V$ est un plongement, la variété V' , obtenue à partir de la somme disjointe de $V - X$ et du $(2 , 2)$-tube B' associé à B , en identifiant x à $\bar{\theta}^{-1}(\psi^{-1}(x))$ pour tout $x \in N - X$.

Analogues aux théorèmes 1 et 2, on a les théorèmes suivants :

THÉORÈME 1'. - Soient V une variété à bord anguleux, X une sous-variété de V sans bord relatif, compacte, de codimension 2 et de coïndice 1 .

a. Deux variétés V'_1 et V'_2 obtenues à partir de V en introduisant une arête en X sont difféomorphes.

b. Si G est un fermé de V tel que $G \cap X = \emptyset$, il existe un difféomorphisme γ' de V'_1 et V'_2 qui coïncide avec l'identité de V sur $G \cup X$.

THÉORÈME 2'. - Soient V une variété à bord anguleux, F une face de V , f un difféomorphisme involutif sans point fixe de F sur elle-même. Soient $W = (V/f , \sigma)$ une variété recollant V suivant f , et $\chi : V \to W$ l'application canonique.

Si X est une sous-variété sans bord relatif de V , compacte, de codimension 2 et de coïndice 1 , $Y = \chi(X)$ est une sous-variété de W vérifiant encore ces propriétés. Soit alors W' une variété obtenue à partir de W en introduisant une arête en Y .

a. Il existe une variété V' obtenue à partir de V en introduisant une arête en X , telle que, si F' désigne la face de V' identique à F , f soit encore un difféomorphisme de F' sur elle-même. Toute variété W'_0 recollant V' suivant $f : F' \to F'$ est difféomorphe à W' ;

b. Si G est un fermé de W' ne rencontrant pas Y, on peut trouver un difféomorphisme $\gamma : W' \to W'_o$ qui coïncide, sur $G \cup Y$, avec l'application identique de V/f.

L'idée que les opérations d'arrondissement d'une arête et d'introduction d'un angle sont des opérations inverses l'une de l'autre est exprimée par le théorème suivant

THÉORÈME 3. - L'arrondissement des arêtes et l'introduction d'angles définissent des bijections inverses de l'ensemble $\mathcal{P}_{n;2,2}$ des classes à un difféomorphisme près de paires (V, X), où V est une variété de dimension n, compacte, à bord anguleux, et X une arête de V, sur l'ensemble $\mathcal{P}_{n;2,1}$ des classes à un difféomorphisme près de paires (V, X), où V est une variété de dimension n, compacte, à bord anguleux, et X une sous-variété de V sans bord relatif, de codimension 2 et de coïndice 1.

<u>Démonstration</u>. - Le théorème 1 montre que l'arrondissement des angles définit une application $\alpha : \mathcal{P}_{n;2,2} \to \mathcal{P}_{n;2,1}$ et le théorème 1' montre que l'introduction d'angles définit $\beta : \mathcal{P}_{n;2,1} \to \mathcal{P}_{n;2,2}$.

Si V' est obtenue à partir de V en arrondissant l'arête X à l'aide de la fonction θ et du voisinage tubulaire (N, μ, ψ) de X dans V, on récolte (Remarque 3) un voisinage tubulaire (N', μ', ψ') de X dans V', et la variété V'' obtenue à partir de V' en introduisant un angle en X à l'aide de la même fonction θ et du voisinage tubulaire (N', μ', ψ') s'identifie à V. Ceci montre que $\beta \circ \alpha = I$. On montre de même de $\alpha \circ \beta = I$.

2. <u>Recollement suivant une semi-face</u>.

<u>Définition</u>. - Soit V une variété à bord anguleux. On appellera <u>semi-face</u> de V toute sous-variété F de V, de codimension 1 et de coïndice 1, dont le bord relatif $X = b^1(F) - F \cap b^2(V)$ est une face de F. X est alors une sous-variété de V de codimension 2 et de coïndice 1, et F devient une face de toute variété V' obtenue à partir de V en introduisant un angle en X.

<u>Définition</u>. - Soient V une variété à bords anguleux, F une semi-face de V, f un difféomorphisme de F sur elle-même, sans point fixe et tel que $f \circ f = I$. Soit V' une variété obtenue à partir de V en arrondissant le bord relatif X de F, alors F est une face de V' et toute variété $W = (V'/f, \sigma)$ obtenue en recollant V' suivant $f : F \to F$ sera, par ellipse, dite obtenue en recollant V suivant $f : F \to F$.

THÉORÈME 4. - Soient V , F , $f : F \to F$ satisfaisant aux conditions de la définition ci-dessus.

a. Deux variétés W_1 et W_2 obtenues en recollant V suivant f sont difféomorphes.

b. Si G est un fermé de V tel que $G \cap F = \emptyset$, on peut trouver un difféomorphisme $\gamma : W_1 \to W_2$ qui coïncide avec l'identité sur $\chi(G \cup F)$.

LEMME 1. - Soient V_1' et V_2' deux variétés obtenues à partir de V en introduisant un angle en X , bord relatif d'une semi-face F de V . Alors, pour tout fermé G tel que $G \cap X = \emptyset$, on peut trouver un difféomorphisme γ_0 de V_1' sur V_2' induisant l'identité sur $F \cup G$.

<u>Démonstration du lemme</u>. - D'après le théorème 1', V_1' et V_2' sont difféomorphes, et on peut trouver un difféomorphisme γ' de V_1' sur V_2' induisant l'identité sur $G \cup X$. Mais la construction de γ' montre que $\gamma'(F) = F$ et que le difféomorphisme $\gamma : F \to F$ induit par γ' est $((G \cap F) \cup X)$-isotope à l'identité. Soit donc $\Gamma : [0 , 1] \times F \to F$ une isotopie, telle que $\Gamma_0 : I_F$, $\Gamma_1 = \gamma$, et soit (N , μ , ψ) un voisinage tubulaire de F dans V_1' . Soit enfin η une fonction C^∞ définie sur $[0 , 1]$ à valeurs dans $[0 , 1]$, égale à 0 au voisinage de 0 et à 1 au voisinage de 1 . Définissons

$$h : V_1' \to V_1'$$

par

$$h(x) = x \quad \text{si} \quad x \notin N$$

et

$$h(\psi(x , t)) = \psi(\gamma^{-1}(\Gamma(x , (\eta(t)) , t) \quad \text{pour} \quad x \in W , \quad t \in [0 , 1] .$$

h est un difféomorphisme de V sur elle-même, coïncidant avec l'identité sur

$$G_1 = V_1' - N \cup \psi((F \cap G \cup X) \times I) \qquad ,$$

et avec γ^{-1} sur F . Quitte à agrandir G , on peut toujours supposer $G_1 \supset G$. Alors

$$\gamma_o = \gamma' \circ h$$

répond à la question.

Remarque. - Si X est le bord relatif commun à deux semi-faces F_1 et F_2, γ_o coïncide avec γ' sur F_2. En appliquant le lemme deux fois, on trouvera un difféomorphisme γ induisant l'identité sur F_1 et sur F_2.

Démonstration du théorème. - W_1 et W_2 sont obtenues en recollant des variétés V'_1 et V'_2 respectivement, V'_1 et V'_2 étant obtenues à partir de V en introduisant un angle en X, bord relatif de la semi-face F. D'après le lemme 1 on peut trouver un difféomorphisme $\gamma_o : V'_1 \to V'_2$ induisant l'identité sur F, ainsi que sur G. On identifie V'_1 à V'_2 par γ_o, et le théorème 3 de l'exposé 2 dit que W_1 et W_2 sont difféomorphes. La partie (b) se déduit de la partie (c) du théorème invoqué.

3. Un théorème d'associativité.

THÉORÈME 5. - Soient V_1, V_2, V_3 trois variétés à bord anguleux de dimension n, et pour tout couple d'indices i, j, $i \neq j$, soit F_{ij} une semi-face compacte de V_i, et f_{ij} un difféomorphisme de F_{ji} sur F_{ij}. On suppose que, pour toute permutation (i, j, k) de $(1, 2, 3)$:

a. F_{ij} et F_{ik} ont même bord relatif $X_i = F_{ij} \cap F_{ik}$, de sorte que $F_i = F_{ij} \cup F_{ik}$ est une face de V_i ;

b. $f_{ij} \circ f_{ji} =$ identité de F_{ij} ;

c. Les difféomorphismes $f_{ij} \circ f_{jk}$ et f_{ik} de X_k sur X_i coïncident, ce qui permet d'identifier X_1, X_2, X_3 en un même espace X.

Alors :

a. On peut recoller V_j à V_k suivant f_{jk} de façon à obtenir une variété V_{jk} telle f_{ji} et f_{ki} se recollent en un difféomorphisme f_i de F_i sur la face $F_{ji} \cup F_{ki}$ de V_{jk}.

b. Soit, pour chaque i, W_i une variété obtenue en recollant V_i à V_{jk} suivant f_i. Les variétés W_1, W_2 et W_3 sont difféomorphes. De plus leur classe à un difféomorphisme près ne dépend pas du choix fait pour V_{jk}.

Démonstration.

a. Soient V'_j et V'_k deux variétés obtenues à partir de V_j et V_k respectivement en introduisant des angles en X_j et X_k. Soit $\psi_i : X \times [-1, +1] \to F_i$ un voisinage tubulaire de X_i dans F_i, et considérons les voisinages tubulaires ψ_{ji} et ψ_{ki} de X_j dans F_{ji} et X_k dans F_{ki} respectivement, transportés des voisinages induits par ψ_i dans F_{ij} et F_{ik} par les difféomorphismes f_{ji} et f_{ki}. On peut prolonger ces voisinages tubulaires en des voisinages tubulaires, que nous noterons $\overline{\psi}_{ji}$ et $\overline{\psi}_{ki}$, de F_{jk} dans V_j et F_{kj} dans V_k respectivement. En effet si par exemple $\overline{\psi}'$ est un voisinage tubulaire quelconque de F_{jk} dans V_j, il induit un voisinage tubulaire ψ' de X_j dans F_{ji}. Les voisinages tubulaires ψ' et ψ_{ji} ont des jets homotopes, donc, d'après le théorème de Cerf, il existe un difféomorphisme γ de V_j sur elle-même tel que $\psi_{ji} = \gamma \circ \psi'$. Alors $\overline{\psi}_{ji} = \gamma \circ \overline{\psi}'$ répond à la question. La variété V_{jk} recollant V'_j à V'_k à l'aide des voisinages tubulaires $\overline{\psi}_{ji}$ et $\overline{\psi}_{jk}$ satisfait à la condition (a). D'ailleurs toute variété satisfaisant à cette condition peut être obtenue de cette façon.

b. Montrons d'abord que si W_i et W'_i sont obtenues de la façon décrite dans l'énoncé, elles sont difféomorphes. Soient V_{jk} et V'_{jk} deux variétés obtenues en recollant V_j et V_k suivant f_{jk}. D'après le théorème 3, V_{jk} et V'_{jk} sont difféomorphes, mais un raisonnement analogue à la démonstration du lemme 1 montrerait qu'on peut trouver un difféomorphisme $\gamma : V_{jk} \to V'_{jk}$ induisant l'identité sur $F_{ji} \cup F_{ki}$. En identifiant V_{jk} à V'_{jk} suivant γ, W_i et W'_i sont obtenues à partir des mêmes variétés par recollement suivant le même difféomorphisme f_i. Elles sont donc difféomorphes d'après le théorème 3 de l'exposé 2.

Montrons maintenant que $W_1 = W_2$ par exemple. Grâce aux théorèmes d'invariances démontrés, on peut supposer W_1 et W_2 construites de façon particulière. Pour $i = 1$ ou 2, soient ψ_i un voisinage tubulaire de X_i dans V_i, V'_i la variété obtenue à partir de V_i en introduisant un angle en X_i à l'aide de ψ_i et d'une fonction θ telle que $\theta(\alpha) = \alpha$ pour α voisin de 0 ; soit enfin ψ'_i le voisinage tubulaire de X_i dans V'_i déduit de la construction de celle-ci. Soit $\overline{\psi}_i$ un voisinage tubulaire de F_i dans V_i adapté à ψ_i, et pour $j = 1, 2, 3$ et $j \neq i$, soit ψ'_{ij} un voisinage tubulaire de F_{ij} dans V'_i, adapté à ψ'_i, coïncidant avec $\overline{\psi}_i$ au voisinage de $(F_{ij} - X_i) \times \{0\}$: ceci est possible grâce à l'hypothèse faite sur θ. Soit V'_3 une variété obtenue à partir de V_3 en introduisant un angle en X_3, et soit ψ'_3 un voisinage tubulaire de

X_3 dans V'_3 tel que, pour $i = 1, 2$, le voisinage tubulaire de X_3 dans F_{3i} induit par ψ'_3 corresponde au voisinage tubulaire de X_i dans F_{i3} induit par ψ'_i. Ceci est possible grâce au lemme suivant.

LEMME 2. — Soient V une variété à bord anguleux, F_1 et F_2 deux faces de V telles que $X = F_1 \cap F_2$ soit une arête de V. Étant donnés deux voisinages tubulaires ψ_1, ψ_2 de X dans F_1, F_2 respectivement, il existe un voisinage tubulaire ψ de X dans V qui induise ψ_1 et ψ_2.

Démonstration du lemme. — Soit ψ^* un voisinage tubulaire quelconque de X dans V. ψ_1 et le voisinage tubulaire de X dans F_1 induit par ψ^* ayant des jets homotopes, on peut, d'après le théorème de Cerf, trouver un difféomorphisme γ_1 de V sur elle-même tel que le voisinage tubulaire $\psi_1^* = \gamma_1 \circ \psi^*$ de X dans V induise ψ_1 comme voisinage tubulaire de X dans F_1. Soit ψ_2^* le voisinage tubulaire de X dans F_2 induit par ψ_1^*. Il existe un difféomorphisme γ_2 de F_2 sur elle-même tel que $\psi_2 = \gamma_2 \circ \psi_2^*$, et γ_2 peut être pris X-isotope à l'identité. Au moyen d'une X-isotopie de γ_2 à l'identité et d'un voisinage de F_2 dans V, on construit un difféomorphisme Γ de V sur elle-même, coïncidant avec l'identité sur F_1, et avec γ_2 sur F_2. Alors

$$\psi = \Gamma \circ \psi_1^*$$

répond à la question.

Fin de la démonstration du théorème. — Pour $i = 1, 2$, soit $\psi_{3,i}$ un voisinage tubulaire de F_{3i} dans V'_3 adapté à ψ'_3. Pour (i, j) permutations de $(1, 2)$, soit $V_{j,3}$ la variété obtenue en recollant V'_j à V'_3 suivant f_{j3} à l'aide des voisinages tubulaires $\psi'_{j,3}$ et $\psi'_{3,j}$; et soit W_i la variété obtenue en recollant V_i à $V_{j,3}$ suivant f_i à l'aide des voisinages tubulaires $\overline{\psi}_i$ et $\overline{\psi}_{j,3}$, ce dernier étant obtenu en réunissant ψ'_{ji} et ψ'_{3i}. Les voisinages tubulaires ψ_i, ψ'_j et ψ'_3 se réunissent en un voisinage tubulaire $\widetilde{\psi}_i$ de X dans W_i.

L'application identique $W_1 \to W_2$ est un difféomorphisme sur le complémentaire de X, et on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X \times D^2 & \xrightarrow{\ I \times \overline{\Theta}\ } & X \times D^2 \\ \Big\downarrow \tilde{\psi}_1 & & \Big\downarrow \tilde{\psi}_2 \\ W_1 & \xrightarrow{\ I\ } & W_2 \end{array}$$

où $\overline{\Theta}$ fait correspondre au point de coordonnées polaires (ρ , α) le point de coordonnées polaires $(\rho , \Theta(\alpha))$, avec

$$\begin{cases} \Theta(\alpha) = \theta^{-1}(\alpha) & \text{pour } 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi \\ \Theta(\alpha) = \frac{\pi}{2} + \theta(\alpha - \pi) & \text{pour } \pi \leqslant \alpha \leqslant \frac{3\pi}{2} \\ \Theta(\alpha) = \alpha & \text{pour } \frac{3\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant 2\pi \end{cases} .$$

Soit η une fonction C^∞ définie sur $[0 , 1]$, à valeurs dans $[0 , 1]$, égale à 0 au voisinage de 0 et à 1 au voisinage de 1 , et soit H le difféomorphisme de D^2 sur lui-même qui associe au point de coordonnées polaires (ρ , α) le point de coordonnés polaires $(\rho , (1 - \eta(\rho))\alpha + \eta(\rho)\ \Theta(\alpha))$.

H coïncide avec Θ au voisinage du bord S^1 de D^2 , et on définit un difféomorphisme Γ de W_1 sur W_2 par $\Gamma = I$ sur le complémentaire de

$$\tilde{N} = \tilde{\psi}_i(X \times D^2) \quad ,$$

et

$$\Gamma = \psi_2 \circ (I \times H) \circ \psi_1^{-1} \quad \text{sur} \quad \tilde{N} \quad ,$$

ce qui achève la démonstration du théorème 5.

III. Destruction mutuelle d'anses

1. Introduction d'angle à la petite cuillère.

THÉORÈME 6. - Soient V une variété à bord anguleux, F une semi-face de V, de bord relatif X, ψ un plongement de $F \times [0\,,\,1]$ dans V tel $\psi(x\,,\,0) = x$. Soit η une fonction C^∞, définie sur F, à valeurs dans $[0\,,\,\frac{1}{2}]$, telle que $\eta^{-1}(0) = X$, $d\eta \neq 0$ en tout point de X. Alors

a. $V' = V - \{\psi(x\,,\,t)\}_{x \in F,\, t < \eta(x)}$ est difféomorphe à une variété V_1 obtenue à partir de V en introduisant une arête en X ;

b. Si G est un fermé de V ne rencontrant pas l'image de ψ, on peut trouver un difféomorphisme

$$\gamma : V_1 \to V'$$

coïncidant avec l'identité de V sur $G \cup X$ et tel que

$$\gamma(x) = \psi(x\,,\,\eta(x)) \quad \text{pour} \quad x \in F \quad .$$

Démonstration. - Soit $\psi' : X \times [0\,,\,1] \to F$ un voisinage tubulaire de X dans F. Pour tout $x \in X$, la fonction

$$\eta_x : [0\,,\,1] \to [0\,,\,\tfrac{1}{2}]$$

définie par

$$\eta_x(t) = \eta(\psi'(x\,,\,t))$$

a une dérivée > 0 en 0, et, X étant compacte, $\exists\ \varepsilon > 0$, $\forall\ x \in X$, $\exists\ \varepsilon'_x > 0$ tel que η_x soit un difféomorphisme de $[0\,,\,\varepsilon'_x]$ sur $[0\,,\,\varepsilon]$.

Posons alors

$$\psi''(x , t) = \psi'(x , \eta_x^{-1}(\varepsilon t)) \quad .$$

$\psi'' : X \times [0 , 1) \to F$ est un voisinage tubulaire de X dans F, et on peut le prolonger en un voisinage tubulaire de X dans $\partial^1 V$ que nous noterons encore

$$\psi'' : X \times (-1 , +1) \to \partial^1 V \quad .$$

Ceci résulte du théorème de Cerf : en effet, si

$$\psi_1 : X \times (-1 , +1) \to \partial^1 V$$

est un voisinage tubulaire de X dans $\partial^1 V$ qui applique $X \times [0 , 1)$ dans F, $\psi_1 \mid X \times [0 , 1)$ peut être amené sur ψ'' par un difféomorphisme de $\partial^1 V$, car ils ont des jets homotopes. On pourra supposer

$$\psi''(X \times (-1 , +1)) \cap G = \emptyset \quad .$$

De même ψ se prolonge en un plongement, qu'on notera encore

$$\psi : F_1 \times [0 , 1) \to V \quad ,$$

où

$$F_1 = F \cup \psi''(X \times (-1 , 0]) \quad .$$

Alors

$$\overline{\psi} : X \times (-1 , +1) \times [0 , 1) \to V$$

défini par

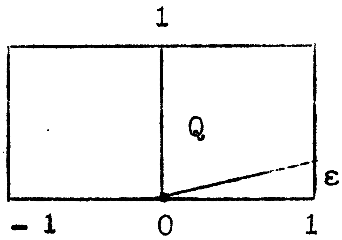
$$\overline{\psi}(x , t , u) = \psi(\psi''(x , t) , u)$$

est un plongement coïncidant avec l'identité de X sur $X \times \{(0 , 0)\}$, et

$$\overline{\psi}^{-1}(V') = X \times Q \quad ,$$

où

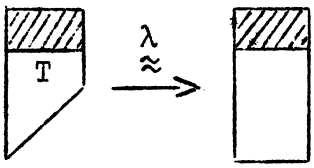
$$Q = \{(t\,,\,u)\,,\ -1 \leq t \leq +1\,,\ \ 0 \leq u \leq 1\,,\ \ u \geq \varepsilon t\} \quad .$$



Posons

$$T = \{(t\,,\,u) \div 0 \leq t \leq \tfrac{1}{2}\,,\ \ t \leq u \leq 1\} \quad ,$$

et soit λ un difféomorphisme de T sur $[0\,,\,\frac{1}{2}] \times [0\,,\,1]$ de la forme



$$\lambda(t\,,\,u) = (t\,,\,\lambda_t(u))$$

et qui coïncide avec l'identité sur

$$\{0\} \times [0\,,\,1] \cup [0\,,\,\tfrac{1}{2}] \times [\tfrac{3}{4}\,,\,1] \quad .$$

Soit ζ une fonction C^∞ : $[-1\,,\,+1] \to [0\,,\,\varepsilon]$ telle que :

$$\begin{cases} \zeta(t) = 0 & \text{si } t \leq -\varepsilon \\ \zeta(t) = \varepsilon t & \text{si } t \geq \varepsilon \\ \dfrac{d^2\,\zeta}{dt^2} \geq 0 & \text{pour tout } t \quad . \end{cases}$$

Soient $\overline{\zeta}$: $F_1 \to [0\,,\,\frac{1}{2}]$ définie par

$$\overline{\zeta}(x) = \eta(x) \quad \text{si} \quad x \in F - \psi''(X \times [0\,,\,\varepsilon])$$

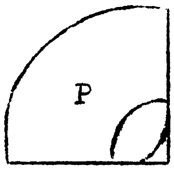
et

$$\overline{\zeta}(\psi''(x\,,\,t)) = \zeta(t) \quad \text{pour} \quad x \in X\,,\ \ t \in [-1\,,\,+1] \quad ,$$

et posons

$$V'' = V - \{\psi(x\,,\,t)\} \qquad x \in F_1 \quad ,$$

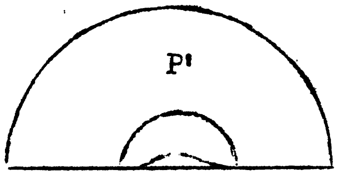
$$t < \overline{\zeta}(x) = V' - \{\overline{\psi}(x\,,\,t\,,\,u)\} \qquad x \in X\,, \quad -\varepsilon \leqslant t \leqslant +\varepsilon\,, \quad u < \zeta(t) \quad .$$



L'application $\lambda_* : V'' \to V$ définie par

$$\begin{cases} \lambda_*(x) = x \quad \text{si} \quad x \notin \psi(F_1 \times [0\,,\,1]) \\ \lambda_*(\psi(x\,,\,t) = \psi(x\,,\,\lambda_{\overline{\zeta}(x)}(t)) \end{cases}$$

et qui vérifie



$$\lambda_*(\psi(x\,,\,\eta(x)) = \psi(x\,,\,0) \quad \text{si} \quad x \in F - \psi'(X \times [0,\varepsilon]),$$

est un difféomorphisme de V'' sur V, qui coïncide avec l'identité sur $G \cup X$. Reste à trouver un difféomorphisme γ_1 d'une variété V_1' obtenue à partir de V' en arrondissant X sur V''. Soit φ le plongement du quart de disque $B_0^{2,2}$ dans Q défini par

$$\varphi(t\,,\,u) = (-t + u\,,\,\varepsilon u) \qquad .$$

$P = \varphi^{-1}(\{t\,,\,u\}\,,\ u \geqslant \zeta(t))$ est une partie convexe de $B_0^{2,2}$, et l'application $\overline{\theta}$ qui associe au point de coordonnées polaires $(\rho\,,\,\alpha)$ le point de coordonnées polaires $(\rho\,,\,\theta(\alpha - \frac{\pi}{2}))$ induit un difféomorphisme de P sur une partie P' de $B_0^{2,1}$, définie dans $B_0^{2,1}$ par une condition de la forme

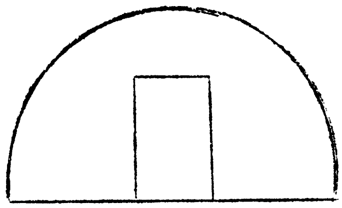
$$P' = \{(t\,,\,u)\,,\ u \geqslant \zeta'(t)\} \qquad ,$$

où $\zeta' : [-1\,,\,+1] \to [0\,,\,\varepsilon]$ est une application C^∞, nulle en dehors de $[-\varepsilon\,,\,+\varepsilon]$.

L'application λ' définie par

$$\lambda'(t\,,\,u) = (t\,,\,\lambda_{\zeta'(t)}(u))$$

est un difféomorphisme de P' sur $B_0^{2,1}$ coïncidant avec l'identité en dehors de $[-\varepsilon\,,\,+\varepsilon] \times [0\,,\,\frac{3}{4}]$, donc au voisinage du bord relatif de $B_0^{2,1}$, car



$\varepsilon < \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{7}}{4}$. $\lambda' \circ \overline{\theta}$ est un difféomorphisme de P sur $B_0^{2,1}$, qui coïncide avec $\overline{\theta}$ au voisinage du quart de cercle, et le difféomorphisme μ de $[-1 , +1]$ dans lui-même défini par

$$\mu(t) = \pi_1 \circ \overline{\theta} \circ \varphi^{-1}(t , \zeta(t))$$

coïncide avec l'identité en dehors de $[-\varepsilon , +\varepsilon]$. Il existe un difféomorphisme ν du demi-disque $B_0^{2,1}$ sur lui-même qui coïncide avec l'identité au voisinage du demi-cercle, et tel que

$$\nu(\mu(t) , 0) = (t , 0) \quad .$$

Alors

$$\sigma = \nu \circ \lambda' \circ \overline{\theta}$$

est un difféomorphisme de P sur $B_0^{2,1}$ qui coïncide avec $\pi_1 \circ \varphi$ sur $[-1 , +1] \times \{0\}$, et avec $\overline{\theta}$ au voisinage du quart de cercle, et

$$\gamma_1 = \varphi \circ \overline{\theta}^{-1} \circ \sigma \circ \varphi^{-1}$$

est un homéomorphisme de $\varphi(P)$ sur $\varphi(B_0^{2,2})$ qui coïncide avec l'identité au voisinage du quart d'ellipse image par φ du quart de cercle, et vérifie

$$\gamma_1(t , \zeta(t)) = (t , 0) \text{ si } t \leqslant 0 \text{ et } (t , \varepsilon t) \text{ si } t \geqslant 0 \quad .$$

Si $(N , \overline{\varphi})$ est le voisinage tubulaire de X dans V' défini par

$$\overline{\varphi}(x , t , u) = \overline{\psi}(x , \varphi(t , u)) \text{ et } N = \overline{\varphi}(X \times B_0^{2,2}) \quad ,$$

le difféomorphisme γ de $N \cap V''$ sur le $(2 , 1)$-tube trivial $X \times B_0^{2,1}$, défini en transportant γ_1 sur chaque fibre, se prolonge par l'identité en un difféomorphisme, encore noté γ_1 , de V'' sur la variété obtenue à partir de V' en arrondissant X à l'aide du voisinage tubulaire $\overline{\varphi}$ et de la fonction θ . On a

$$\gamma_1(\lambda^{-1}(x)) = \psi(x , \eta(x)) \quad \text{si} \quad x \in F , \quad \text{et} \quad x \quad \text{si} \quad x \in F_1 - F \quad .$$

Ceci achève la démonstration du théorème 6.

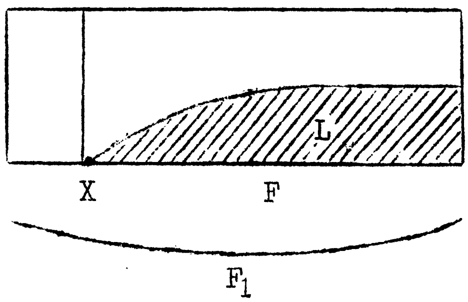
2. Lentilles.

Définition. — Étant données une variété à bord anguleux compacte F et une face X de F, on appelle lentille sur F d'arête X toute variété de la forme

$$L = \{ (x , t) , \quad x \in F , \quad 0 \leqslant t \leqslant \eta(x) \}$$

où $\eta : F \to [0 , \frac{1}{2})$ est une fonction C^∞ telle que $\eta^{-1}(0) = X$, $d\eta \neq 0$ en tout point de X.

Avec les définitions que nous avons adoptées, L n'est pas une sous-variété de $F \times [0 , 1]$. Cependant, si F est une sous-variété de codimension 0 de F_1 et si X est le bord relatif de F dans F_1, L est une sous-variété de $F_1 \times [0 , 1]$.



THÉORÈME 7. — Soient V une variété à bord anguleux, F une semi-face de V de bord relatif X, L une lentille sur F d'arête X.

a. Une variété V' obtenue en recollant la somme disjointe $V \cup L$ suivant le difféomorphisme $x \to (x , 0)$ de la semi-face F de V sur la face $(F \times \{0\})$ de L est difféomorphe à V.

b. Si G est un fermé de V ne rencontrant pas F, on peut trouver un difféomorphisme $\gamma : V \to V'$ coïncidant avec l'identité sur G et tel que

$$\gamma(x) = (x , \eta(x)) \quad \text{pour} \quad x \in F \quad .$$

Démonstration. — La lentille L est définie à partir d'une fonction $\eta : F \to [0 , \frac{1}{2})$. D'après le théorème 6, il existe un difféomorphisme γ_1 d'une variété V_1 obtenue à partir de V en introduisant une arête en X sur la sous-variété

$$V_1' = V - \{\psi(x , t)\}, \quad x \in F , \quad t < \eta(x)$$

de V , tel que

$$\gamma_1(x) = \psi(x , \eta(x)) \quad \text{pour} \quad x \in F \qquad .$$

Soit φ le plongement de L dans V défini par

$$\varphi(x , t) = \psi(x , \eta(x) - t) \qquad .$$

Les plongements γ_1 et φ sont liés par la relation

$$\gamma_1(x) = \varphi(x , 0) \qquad ;$$

il résulte de la définition 10 de l'exposé 2 que V est difféomorphe à une variété V' recollant V_1 à L suivant $x \to (x , 0)$, ce qui démontre le théorème.

PROPOSITION 4.

a. Une lentille L sur F d'arête X est difféomorphe à une variété obtenue à partir de $F \times [0 , 1]$ en arrondissant $X \times \{1\}$.

b. On peut trouver un difféomorphisme coïncidant avec l'identité sur $F \times \{0\}$.

Démonstration. - Comme dans la démonstration du théorème 6, on peut trouver un voisinage tubulaire (N , ψ) de X dans F ,

$$\psi : X \times [0 , 1] \to F$$

tel que la fonction η qui définit L vérifie $\eta(\psi(x , t)) = \varepsilon t$, et $\eta(x) \geqslant \varepsilon$ pour $x \in F - N$. Posons

$$F' = \eta^{-1}([\tfrac{\varepsilon}{2} , \tfrac{1}{2}]) \quad \text{et} \quad L' = \{(x , u) , \quad (x , u + \tfrac{\varepsilon}{2}) \in L\} \qquad .$$

L' est une lentille sur L , d'arête $X' = \psi(X \times \{\frac{1}{2}\})$, et, d'après le théorème 6,

$$V = L - L^{\alpha} = L \cap F \times [0 , \frac{\varepsilon}{2})$$

est difféomorphe à une variété obtenue à partir de L en introduisant une arête en X'. D'autre part, l'application

$$\varphi : V \to F \times [0 , 1)$$

définie par

$$\varphi(x , u) = (x , \frac{2u}{\varepsilon}) \quad \text{si} \quad x \in F - N$$

et

$$\varphi(\psi(x , t) , u) = (\psi(x , \lambda_{u/\varepsilon}(t)) , \frac{2u}{\varepsilon})$$

est un difféomorphisme de V sur $F \times [0 , 1)$ ce qui démontre la proposition.

3. Le premier théorème de destruction d'anses.

Pour tout p, on appelle projection stéréographique le difféomorphisme

$$c_p : S^p_+ = \{(x_1 , \dots , x_{p+1}) , \ x_1^2 + \dots + x_{p+1}^2 = 1 , \ x_{p+1} \geq 0\}$$

sur D^p défini par

$$\sigma(x_1 , \dots , x_{p+1}) = \frac{x_1}{1 + x_{p+1}} , \dots , \frac{x_p}{1 + x_{p+1}} .$$

THÉORÈME 8. – Soit V une variété à bord anguleux de dimension $n = p + q + 1$. Soit V_1 une variété obtenue en recollant la somme disjointe $V \cup (D^p \times D^{q+1})$ suivant un plongement φ_1 de $S^{p-1} \times D^{q+1}$ dans $\mathring{\partial}^1 V$. Soit φ_2 un plongement de $S^p \times D^q$ dans $\mathring{\partial}^1 V_1$, qui applique

$$S^p_+ \times D^q \quad \text{sur} \quad D^p \times S^q_+ \subset \partial^1(D^p \times D^{q+1}) \quad \text{par} \quad (\sigma_p \times \sigma_q^{-1})$$

et

$$S^p_- \times D^q \quad \text{dans} \quad \mathring{\partial}^1 V - \varphi_1(S^{p-1} \times \mathring{D}^{q+1}) .$$

Alors :

a. Une variété V_2, obtenue en recollant la somme disjointe $V_1 \cup (D^{p+1} \times D^q)$ suivant le difféomorphisme φ_2 de la face $S^p \times D^q$ sur une semi-face de V_1, est difféomorphe à V.

b. Si G est un fermé de V qui ne rencontre pas $\varphi_1(S^{p-1} \times D^{q+1})$ ni $\varphi_2(S^p_- \times D^q)$, on peut trouver un difféomorphisme $\gamma : V \to V_2$ qui coïncide avec l'identité sur G.

Démonstration. – En vertu du théorème 5, V_2 est difféomorphe à une variété V' obtenue de la façon suivante : H est une variété obtenue en recollant la somme disjointe $(D^p \times D^{q+1}) \cup (D^{p+1} \times D^q)$ suivant

$$(\sigma_p \times \sigma_q^{-1}) : D^p \times S^q_+ \to S^p_+ \times D^q \qquad ;$$

et V' est une variété obtenue en recollant la somme disjointe $V \cup H$ suivant un difféomorphisme φ' de

$$(S^{p-1} \times D^{q+1}) \cup (S^p_- \times D^q)$$

sur une semi-face de V contenue dans $\overset{\circ}{\partial}{}^1 V$. Nous allons montrer que H est difféomorphe à une lentille sur D^{n-1} d'arête S^{n-2}, et le théorème 8 résultera alors du théorème 7.

D'après la proposition 2 et la remarque 4 qui suit la définition 2, une variété H_1 (resp. H_2) obtenue à partir de $D^p \times D^{q+1}$ (resp. $D^{p+1} \times D^q$), en introduisant une arête en $D^p \times S^{q-1}$ (resp. $S^{p-1} \times D^q$), bord relatif de la semi-face $D^p \times S^q_+$ (resp. $S^p_+ \times D^q$), est difféomorphe à $D^p \times D^{q+1}_-$ (resp. $D^{p+1}_- \times D^q$), et il existe un difféomorphisme γ_i de H_i sur $D^p \times D^{q+1}_-$ (resp. $D^{p+1}_- \times D^q$), qui induit $I \times \sigma_q$ (resp. $\sigma_p \times I$) sur $D^p \times S^q_+$ (resp. $S^p_+ \times D^p$).

Par suite H, recollant $H_1 \cup H_2$ suivant $(\sigma_p \times \sigma_q^{-1})$, est difféomorphe à une variété recollant la somme disjointe $(D^p \times D^{q+1}_-) \cup (D^{p+1}_- \times D^q)$ suivant l'application identique de leur face $D^p \times D^q$.

Les applications φ_i définies par

$$\varphi_1(x_1 , \dots , x_p ; y_1 , \dots , y_q , z)$$
$$= (x_1 \sqrt{1-z} , \dots , x_p \sqrt{1-z} , \frac{y_1}{\sqrt{1-z}} , \dots , \frac{y_p}{\sqrt{1-z}} , z)$$

$$\varphi_2(x_1 , \dots , x_p , z ; y_1 , \dots , y_q)$$
$$= \left(\frac{x_1}{\sqrt{1-z}} , \dots , \frac{x_p}{\sqrt{1-z}} , y_1 \sqrt{1-z} , \dots , y_p \sqrt{1-z} , -z\right)$$

sont des difféomorphismes

$$\varphi_1 : D^p \times D_-^{q+1} \to H_1' , \qquad \varphi_2 : D_-^{p+1} \times D^q \to H_2' \qquad ,$$

où

$$H_1' = \{ (x_1 , \dots , x_p ; y_1 , \dots , y_q ; z) ,$$
$$y_1^2 + \dots + y_q^2 - 1 \leqslant z \leqslant 1 - (x_1^2 + \dots + x_p^2) , \quad z \leqslant 0\}$$

$$H_2' = \{ (x_1 , \dots , x_p ; y_1 , \dots , y_q ; z) ,$$
$$y_1^2 + \dots + y_q^2 - 1 \leqslant z \leqslant 1 - (x_1^2 + \dots + x_p^2) , \quad z \geqslant 0\}$$

et H est difféomorphe à

$$H' = H_1' \cup H_2' = \{ (x_1 , \dots , x_p ; y_1 , \dots , y_q ; z) ,$$
$$y_1^2 + \dots + y_q^2 - 1 \leqslant z \leqslant 1 - (x_1^2 + \dots + x_p^2) \} \quad .$$

Enfin on a un difféomorphisme f de H' sur la lentille

$$L = \{ (x_1 , \dots , x_p , y_1 , \dots , y_q , z) ,$$
$$0 \leqslant z \leqslant \frac{1 - (x_1^2 + \dots + x_p^2 + y_1^2 + \dots + y_q^2)}{2}$$

défini par

$$f(x_1 , \dots , x_p , y_1 , \dots , y_q , z)$$
$$= \left(\frac{x_1}{\sqrt{2}} , \dots , \frac{x_p}{\sqrt{2}} , \frac{y_1}{\sqrt{2}} , \dots , \frac{y_q}{\sqrt{2}} , \frac{z + 1 - (y_1^2 + \dots + y_q^2)}{4} \right) \quad .$$

Ceci montre que H est difféomorphe à une lentille, ce qui achève la démonstration du théorème 8.

EXERCICE 1. Espaces lenticulaires. – Soient V une variété à bord anguleux, F une réunion de composantes connexes de $\partial^1 V$, $f : F \to F$ un difféomorphisme involutif sans point fixe. On suppose que l'ensemble X des $x \in \partial^2 V$ dont les deux images réciproques x' x'' dans $\partial^1 \partial^1 V$ sont dans F est une arête de V. X est donc revêtue à deux feuillets par une face $\widetilde{X}$ de F, et $\sigma : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ désigne l'involution du revêtement. On suppose que $f(\widetilde{X}) = \widetilde{X}$, que $(f \circ \sigma)^k = I_{\widetilde{X}}$, et que $(f \circ \sigma)^i (x)$ est différent de x et de σx pour tout i, $0 < i < k$ et tout $x \in \widetilde{X}$.

Définir un procédé pour obtenir une structure de variété sur l'"espace lenticulaire d'ordre k" V/f à l'aide de certains voisinages tubulaires. Montrer que la classe, à un difféomorphisme près, des variétés ainsi obtenue ne dépend pas des voisinages tubulaires choisis. Pour $k = 3$, montrer qu'on trouve dans un cas particulier des structures difféomorphes à celles obtenues dans le théorème 5.

EXERCICE 2. Soudure. – Soient V_0, V_1, V_2 trois variétés à bord anguleux disjointes, F_1 et F_2 des faces de V_1 et V_2 respectivement, F'_1 et F'_2 des faces de V_0, n'ayant aucun point interne commun, φ_i un difféomorphisme de F_i sur F'_i, $i = 1, 2$. Pour (i, j) permutation de $(1, 2)$, soit V'_i une variété obtenue en recollant $V_0 \cup V_i$ suivant φ_i, et V''_i une variété obtenue en recollant V'_i à V_j suivant le difféomorphisme φ_j de F_j sur la semi-face F'_j de V'_i. Montrer que les deux variétés V''_1 et V''_2 sont difféomorphes. Ces variétés sont dites obtenues par soudure (plumbing) de V'_1 à V'_2 suivant le difféomorphisme identique f de $V_0 \subset V'_1$ sur $V_0 \subset V'_2$.

Énoncer des généralisations de cette situation.

EXERCICE 3. Fonctions tapissantes et arrondissement des angles. – On dira qu'une fonction $f : V \to \mathbb{R}_+$ tapisse la variété à bord anguleux V en un point x s'il existe une carte $\varphi : U \to W$, où U est un ouvert du secteur A de $\mathbb{R}^n$,

$$A = \{(t_1, \dots, t_n),\ t_1 \geq 0, \dots, t_k \geq 0\} \quad ,$$

W un ouvert de V, $0 \in U$, $\varphi(0) = x$, telle que

$$f(\varphi(t_1, \dots, t_n)) = \lambda(t_1, \dots, t_n)\, t_1 \dots t_k \quad ,$$

λ étant une fonction $\mathcal{C}^\infty$ strictement positive sur U. Si l'indice k de V en x est nul, ceci signifie $f(x) > 0$. Toute variété à bord anguleux V peut être tapissée partout par une fonction f. On dira que $u \in \underset{\sim}{R}_+$ est une <u>valeur critique</u> de f si

$$\exists \ x \in V , \quad f(x) = u , \quad df(x) = 0 \quad .$$

1° Supposons V compacte, tapissée partout par f. Montrer que les sous-variétés V_ε de V,

$$V_\varepsilon = \{x , \quad f(x) \geqslant \varepsilon\} \quad ,$$

sont difféomorphes entre elles pour $0 < \varepsilon < u_0$, u_0 étant la plus petite valeur critique > 0 de f. (On pourra munir V d'une métrique riemannienne et considérer le champ de vecteurs $Z = \dfrac{\text{grad } f}{\|\text{grad } f\|^2}$.)

Montrer que leur classe, à un difféomorphisme près, ne dépend pas du choix de f.

2° Soit V' une variété, obtenue à partir de V en arrondissant une arête X, tapissée partout par f'. Montrer que

$$V'_\varepsilon = \{x \in V' , \quad f'(x) \geqslant \varepsilon\}$$

est difféomorphe à V_ε pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit.