Bernard Morin

La classe fondamentale d'un espace fibré

Séminaire Henri Cartan, tome 12, nº 1 (1959-1960), exp. nº 8, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1959-1960__12_1_A8_0>

4 janvier 1960

LA CLASSE FONDAMENTALE D'UN ESPACE FIBRÉ

par Bernard MORIN

I. Sous-fibrés et fibrés partiels.

Dans tout cet exposé, A désigne un anneau commutatif avec élément unité, B un espace topologique, les lettres en italique, des systèmes locaux sur B de A-modules unitaires.

Rappelons qu'un système local $\underset{\sim}{G}$ de A-modules unitaires sur un espace topologique B peut être considéré comme la donnée, sur chaque composante connexe par arcs B_i de B, d'un A-module unitaire G_i et d'une représentation linéaire du groupe de Poincaré

$$\pi_1(B\ ,\ b_i)\qquad ,\qquad (b_i \in B_i)\quad \text{dans}\ G_i \quad .$$

Chacun des G_i se trouve ainsi muni d'une structure de $A(\pi_1(B\ ,\ b_i))$-module à gauche.

Soient $\underset{\sim}{G}$, $\underset{\sim}{G}'$ deux systèmes locaux : les A-modules $\mathrm{Hom}_A(G_i\ ,\ G_i')$ et $G_i \otimes_A G_i'$ sont munis de structures de $\pi_1(B\ ,\ b_i)$-modules par les formules :

$$\left.\begin{array}{l} \pi . x = \pi \circ x \circ \pi^{-1} \\ \\ \text{et} \\ \\ \pi(g \otimes g') = (\pi g) \otimes (\pi g') \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \pi \in \pi_1(B\ ,\ b_i) \\ x \in \mathrm{Hom}_A(G_i\ ,\ G_i') \\ g \in G_i \\ g' \in G_i' \end{array}\right.$$

On définit ainsi des systèmes locaux notés

$$\mathrm{Hom}_A(\underset{\sim}{G}\ ,\ \underset{\sim}{G}') \qquad \text{et} \qquad \underset{\sim}{G} \otimes_A \underset{\sim}{G}'$$

respectivement.

Si, en particulier, $\underset{\sim}{G}$ est un système local libre à un générateur (c'est-à-dire si chacun des G_i est un A-module libre à un générateur), le système local $\mathrm{Hom}_A(\underset{\sim}{G}\ ,\ \underset{\sim}{G})$ est isomorphe au système local trivial A. Sur chaque composante connexe, cet isomorphisme s'obtient en faisant correspondre l'unité de A à l'application identique de G_i. Plus généralement, si $\underset{\sim}{G}$ est libre à un générateur et $\underset{\sim}{G}'$ quelconque, on a :

$$\mathrm{Hom}_A(\underset{\sim}{G}\ ,\ \underset{\sim}{G}) \otimes_A \underset{\sim}{G}' \approx \underset{\sim}{G}' \quad .$$

<u>Homologie et cohomologie de</u> B <u>à valeurs dans</u> $\underset{\sim}{G}$. - Lorsque B est connexe, soit $\Sigma(B) = \bigcup_n \Sigma_n(B)$ l'ensemble des simplexes singuliers de B dont tous les sommets sont en $b \in B$, munis des opérateurs de face ∂_i et des opérateurs de dégénérescence s_i.

$\Sigma_1(B)$ est l'espace des lacets $\Omega(B, b)$.

Soit $h : \Sigma_1(B) \to \pi_1(B, b)$ l'application qui associe à chaque simplexe de dimension 1 l'élément du groupe de Poincaré qu'il définit.

$$\bar{\bar{\Sigma}}(B) = \pi_1(B, b) \times \Sigma(B)$$

est un ensemble simplicial muni des opérateurs de face

$$\begin{aligned} \partial_i(\pi, \sigma) &= (\pi, \partial_i \sigma) \qquad 0 < i \leq n \\ \partial_0(\pi, \sigma) &= (\pi . h(\partial_2 \partial_3 \dots \partial_n \sigma), \partial_0 \sigma) \\ s_i(\pi, \sigma) &= (\pi, s_i \sigma) \qquad 0 \leq i \leq n \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \pi \in \pi_1(B, b) \\ \sigma \in \Sigma_n \end{cases}.$$

L'application $(\pi, \sigma) \to \sigma$ identifie la réalisation topologique du complexe $\bar{\bar{\Sigma}}$ au revêtement universel de la réalisation topologique de Σ.

Le module libre $\bar{C}_*(B, A)$, de base $\bar{\bar{\Sigma}}(B)$, se trouve ainsi muni d'une structure de $\pi_1(B, b)$-module à gauche pour laquelle les opérateurs ∂_i et s_i sont linéaires. On pose

$$C_*(B, \underset{\sim}{G}) = \underset{\sim}{G}' \otimes_{\pi_1(B, b)} \bar{C}_*(B, A)$$

et

$$C^*(B, \underset{\sim}{G}) = \mathrm{Hom}_{\pi_1(B, b)}(\bar{C}_*(B, A), \underset{\sim}{G}) ,$$

où $\underset{\sim}{G}'$ désigne le $\pi_1(B, b)$-module à droite déduit de $\underset{\sim}{G}$ en posant :

$$g\pi = \pi^{-1} g \qquad \begin{cases} \pi \in \pi_1(B, b) \\ g \in \underset{\sim}{G} \end{cases}.$$

L'homologie du complexe $C_*(B, \underset{\sim}{G})$, (resp. $C^*(B, \underset{\sim}{G})$), s'appelle l'homologie (resp. la cohomologie) de B à coefficients dans le système local $\underset{\sim}{G}$.

Si B n'est pas connexe, son homologie (resp. sa cohomologie) à coefficients dans $\underset{\sim}{G}$ est, en chaque dimension, la somme directe (resp. le produit direct) des homologies (resp. des cohomologies) à coefficients dans $\underset{\sim}{G}$ de chacune des composantes connexes de B .

DÉFINITION 1. - Soit $F \xrightarrow{i} X \xrightarrow{\pi} B$ un fibré au sens de SERRE, de base B , et de fibre F au-dessus d'un point $b \in B$:

a. On dira qu'un sous-espace $X' \subset X$ définit un <u>sous-fibré</u> de X si l'application $\pi|X'$ est une application fibrée au sens de SERRE <u>sur</u> B . Alors, $F' = F \cap X'$ sera appelé la <u>sous-fibre</u> au-dessus de b . La paire (F , F') sera appelée la <u>fibre relative</u> du fibré relatif (X , X') .

b. On dira qu'un sous-espace $X'' \subset X$ définit un <u>fibré partiel</u> de X s'il existe un sous-espace $B'' \subset B$ tel que $\pi^{-1}(B'') = X''$.

Dans ces conditions, l'application $\pi|X''$ est évidemment une application fibrée au sens de SERRE. B'' sera appelée la base du fibré partiel X'' , la paire (B , B'') sera appelée la <u>base relative</u> du fibré relatif (X , X'') .

Nous donnerons sans démonstration le résultat suivant qui complète les remarques de DOUADY ([1], paragraphe 6, B et C).

PROPOSITION 1. - Soit $F \to X \to B$ un fibré au sens de SERRE, $F' \to X' \to B$ un sous-fibré de X , $F \to X'' \to B''$ un fibré partiel de X . Soit $\underset{\sim}{G}$ un système local de A-modules unitaires sur B . On notera encore $\underset{\sim}{G}$ les systèmes locaux induits par $\underset{\sim}{G}$ sur X , X' , X'' , F' et B'' .

a. <u>Dans ces conditions, il existe une suite spectrale notée</u>

$$(E_r^{p,q}(X , (X' , X'') ; \underset{\sim}{G}))$$

<u>telle que</u>

$$E_2^{p,q}(X , (X' , X'') ; \underset{\sim}{G}) = H^p(B , B'' ; \underset{\sim}{H}^q(F , F' ; \underset{\sim}{G}))$$

<u>et dont le terme</u> E_∞ <u>est isomorphe à un gradué associé à</u> $H^*(X , X' \cup X'' ; \underset{\sim}{G})$.

b. <u>Si de plus,</u> $\underset{\sim}{G}'$ <u>et</u> $\underset{\sim}{G}''$ <u>sont deux autres systèmes locaux de</u> A<u>-modules unitaires sur</u> B , <u>et</u> h <u>un homomorphisme de systèmes locaux</u> $\underset{\sim}{G}' \otimes_A \underset{\sim}{G} \to \underset{\sim}{G}''$, <u>il existe un accouplement naturel de modules différentiels gradués :</u>

$$E_r^{p',q'}((X , \underset{\sim}{G}') \otimes_A E_r^{p,q}(X , (X' , X'') , \underset{\sim}{G}) \to E_r^{p+p',q+q'}(X , (X' , X'') ; \underset{\sim}{G}'')$$

<u>qui satisfait aux trois conditions suivantes</u> :

1° Sur $E_2(X , \underset{\sim}{G}') \otimes_A E_2(X , (X' , X'') ; \underset{\sim}{G})$ cet accouplement est donné par le cup-produit gauche :

$$H^{p'}(B , \underset{\sim}{H}^{q'}(F , \underset{\sim}{G})) \otimes_A H^p(B , B'' ; \underset{\sim}{H}^q(F , F' ; \underset{\sim}{G}))$$

$$\to H^{p+p'}(B , B'' ; \underset{\sim}{H}^{q+q'}(F , F' ; \underset{\sim}{G}'')) .$$

(Lorsqu'on a des systèmes locaux $\underset{\sim}{H}$, $\underset{\sim}{H}'$, $\underset{\sim}{H}''$ de A-modules unitaires gradués sur B , et un homomorphisme $\underset{\sim}{H}' \otimes_A \underset{\sim}{H} \longrightarrow \underset{\sim}{H}''$, on définit le cup-produit gauche en appliquant la règle de Koszul au cup-produit usuel au sens des systèmes locaux $\underset{\sim}{H}$, $\underset{\sim}{H}'$, $\underset{\sim}{H}''$ de A-modules).

2° $d_r(a.b) = (d_r\, a).b + (-1)^{p'+q'}\, a.(d_r\, b)$ $\begin{cases} a \in E_r^{p',q'}(X\ ;\ \underset{\sim}{G}') \\ b \in E_r^{p,q}(X\ ,\ (X'\ ,\ X'')\ ;\ \underset{\sim}{G}) \end{cases}$,

et l'accouplement entre les E_{r+1} s'identifie à l'accouplement entre les d_r-homologies des E_r .

3° Sur les gradués associés $\begin{cases} GH^*(X\ ,\ \underset{\sim}{G}') \\ GH^*(X\ ,\ X' \cup X''\ ;\ \underset{\sim}{G}) \end{cases}$

cet accouplement coïncide avec l'accouplement induit par le cup-produit :

$$H^*(X\ ,\ \underset{\sim}{G}') \otimes_A H^*(X\ ,\ X' \cup X''\ ;\ \underset{\sim}{G}) \longrightarrow H^*(X\ ,\ X' \cup X''\ ;\ \underset{\sim}{G}'') \quad .$$

Remarquons que, si $X_1 \supset X'$ définit un sous-fibré, et $X_2 \supset X''$ définit un fibré partiel de X , il existe de même un accouplement :

$$E_r(X\ ;\ (X_1\ ,\ X_2)\ ;\ \underset{\sim}{G}') \otimes_A E_r(X\ ,\ (X'\ ,\ X'')\ ;\ \underset{\sim}{G}) \longrightarrow E_r(X\ ,\ (X'\ ,\ X'')\ ;\ \underset{\sim}{G}'')$$

satisfaisant à des conditions analogues à celles énoncées dans la proposition 1.

Lorsque X' (resp. X'') est vide, on note $(E_r(X\ ,\ X''\ ;\ \underset{\sim}{G}))$ (resp. $(E_r(X\ ,\ X'\ ;\ \underset{\sim}{G})))$ la suite spectrale définie dans la proposition 1.

II. L'obstruction dans un espace fibré.

A. NOTATIONS. - Dans la suite, $\tilde{H}^*(F)$ (resp. $\tilde{H}_*(F)$) désigne la cohomologie réduite (resp. l'homologie réduite) de l'espace F .

Soit $F \xrightarrow{i} X \xrightarrow{\pi} B$ un fibré au sens de SERRE. On note $M(X)$ le mapping-cylindre de l'application π . C'est encore un fibré au sens de SERRE, de base B et de fibre le cône $C(F)$ sur F . On note $\bar{\pi}$ la projection $M(X) \longrightarrow B$, et $\bar{i}$ l'injection de la fibre $C(F) \longrightarrow M(X)$,

j et s désignent les injections canoniques de X et de B dans $M(X)$.

Puisque $\tilde{H}(C(F)\ ,\ \underset{\sim}{G})$ est nul,

$\bar{\pi}^*$: $H^*(B\ ,\ \underset{\sim}{G}) \longrightarrow H^*(M(X)\ ,\ \underset{\sim}{G})$ est un isomorphisme ;

s : $B \longrightarrow M(X)$ est une section du fibré $M(X)$, et $s^* = \bar{\pi}^{*-1}$. Toute autre section s' étant homotope à s, on a $s'^{*} = s^{*}$.

B. <u>L'homomorphisme de Thom-Gysin.</u> - Désignons par n le plus grand entier tel que $\tilde{H}_i(F, A) = 0$ pour tout $i < n$. On a alors :

$\tilde{H}^i(F, \underset{\sim}{G}) = 0$ pour $i < n$,

$\underset{\sim}{H}^n(F, \underset{\sim}{G}) \approx \mathrm{Hom}_A(\underset{\sim}{H}_n(F, A), \underset{\sim}{G})$.

Comme on a un isomorphisme $\tilde{H}^i(F, \underset{\sim}{G}) \xrightarrow{\delta_0} H^{i+1}(C(F), F; \underset{\sim}{G})$, on a $E_2^{p,q}(M(X), X; \underset{\sim}{G}) = 0$ pour $q \leqslant n$.

On a donc un edge-homomorphisme, permettant de définir l'application :

$$\varphi : H^p(B, \underset{\sim}{\tilde{H}}^n(F, \underset{\sim}{G})) \approx E_2^{p,n+1}(M(X), X; \underset{\sim}{G}) \longrightarrow H^{p+n+1}(M(X), X; \underset{\sim}{G}) .$$

<u>φ s'appelle l'homomorphisme de Thom-Gysin.</u>

Si toutes les différentielles de la suite spectrale aboutissant à $E_r^{p,n+1}(M(X), X; \underset{\sim}{G})$ sont nulles, alors l'application φ est un monomorphisme. Si en outre, $\tilde{H}^i(F, \underset{\sim}{G}) = 0$ pour tout $i \neq n$, φ est un isomorphisme.

C. <u>La suite exacte de Gysin.</u> - Soit

$$\cdots \longrightarrow H^i(M(X), X; \underset{\sim}{G}) \xrightarrow{\psi} H^i(M(X), \underset{\sim}{G}) \xrightarrow{j^*} H^i(X, \underset{\sim}{G}) \xrightarrow{\delta} H^{i+1}(M(X), X; \underset{\sim}{G}) \longrightarrow \cdots$$

la suite exacte de cohomologie de la paire $(M(X), X)$.

On pose $\theta = s^* \circ \psi \circ \varphi$. Avec ces notations, on a la proposition suivante:

PROPOSITION 2. - <u>Si φ est un isomorphisme, la suite suivante est une suite exacte</u>

$$(1) \cdots \longrightarrow H^i(B, \underset{\sim}{\tilde{H}}^n(F, \underset{\sim}{G})) \xrightarrow{\theta} H^{i+n+1}(B, \underset{\sim}{G}) \xrightarrow{\pi^*} H^{i+n+1}(X, \underset{\sim}{G}) \xrightarrow{\varphi^{-1} \circ \delta} H^{i+1}(B, \underset{\sim}{\tilde{H}}^n(F, \underset{\sim}{G})) \longrightarrow \cdots$$

<u>lorsque</u> $i \geqslant -n-1$, <u>à condition de poser</u>

$$H^i(B, \underset{\sim}{\tilde{H}}^n(F, \underset{\sim}{G})) = 0 \qquad \text{pour } i < 0 .$$

DÉMONSTRATION. - (1) s'obtient en remplaçant dans le diagramme suivant les termes de la première ligne par les termes de la deuxième ligne qui leur sont isomorphes.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^{i+n+1}(M(X),X;\underset{\sim}{G}) \arrow[r, "\psi"] & H^{i+n+1}(M(X),\underset{\sim}{G}) \arrow[r, "j^*"] & H^{i+n+1}(X,\underset{\sim}{G}) \arrow[r, "\delta"] & H^{i+n+2}(M(X),X;\underset{\sim}{G}) \arrow[r] & \cdots \\
& H^i(B,\underset{\sim}{\tilde{H}}^n(F,\underset{\sim}{G})) \arrow[u, "\varphi"', "\approx"] & H^{i+n+1}(B,\underset{\sim}{G}) \arrow[u, "\bar{\pi}^*"', "\approx"] & & H^{i+1}(B,\underset{\sim}{\tilde{H}}^n(F,\underset{\sim}{G})) \arrow[u, "\varphi"', "\approx"] &
\end{tikzcd}$$

(1) <u>s'appelle la suite exacte de Gysin.</u>

REMARQUE. - Lorsque $n \geqslant 1$, on peut écrire une suite (1') analogue à (1) en étudiant les propriétés de la suite spectrale : $(E_r(M(X), \underset{\sim}{G})$ (cf. [3], paragraphe 5C). Mais alors, le premier et le troisième homomorphisme de (1') diffèrent par leurs signes des homomorphismes correspondants de (1). Ce fait résulte de la proposition 5 ci-dessous (cf. paragraphe 3).

D. Cas ou $\underset{\sim}{G} = \underset{\sim}{\tilde{H}}_n(F, A)$. - L'élément de $\tilde{H}^n(F, \tilde{H}_n(F, A)) \approx \mathrm{Hom}_A(\tilde{H}_n(F, A), \tilde{H}_n(F, A))$ correspondant à l'application identique de $\tilde{H}_n(F, A)$ s'appelle la classe fondamentale de la fibre et se note ε.

Sur chaque composante connexe B_i de B, cet élément définit dans :

$$\mathrm{Hom}_A(\underset{\sim}{\tilde{H}}_n(F, A), \underset{\sim}{\tilde{H}}_n(F, A))$$

un élément ε_i invariant par les opérations de $\pi_1(B, b_i)$.

A l'élément ε_i correspond, par augmentation, un élément η_i :

$$\eta_i \in H^0(B_i, \mathrm{Hom}_A(\underset{\sim}{\tilde{H}}_n(F, A), \underset{\sim}{\tilde{H}}_n(F, A))) \approx A \otimes_{\pi_1(B, b_i)} \mathrm{Hom}_A(\underset{\sim}{\tilde{H}}_n(F, A), \underset{\sim}{\tilde{H}}_n(F, A)))$$

La famille $(\eta_i) \in \prod_i H^0(B_i, \underset{\sim}{\tilde{H}}^n(F, \underset{\sim}{\tilde{H}}_n(F, A)))$ s'identifie à un élément de

$$H^0(B, \underset{\sim}{\tilde{H}}^n(F, \underset{\sim}{\tilde{H}}_n(F, A))), \quad \text{noté } \eta \quad .$$

On pose

$$u = \varphi(\eta) \in H^{n+1}(M(X), X ; \tilde{H}_n(F, A)) \quad .$$

DÉFINITION 2. - La classe $\chi = s^* \circ \psi(u) = \theta(\eta) \in H^{n+1}(B, \underset{\sim}{\tilde{H}}_n(F, A))$ s'appelle la classe fondamentale du fibré X.

REMARQUE. - Les classes u et χ sont définies de façon naturelle. En particulier, u induit $\delta_0(\varepsilon) \in H^*(C(F), F ; A)$ sur la fibre relative $(C(F), F)$.

E. Cas où $\underset{\sim}{\tilde{H}}_n(F, A)$ est un système local libre à un générateur. - Lorsque $\tilde{H}_n(F, A)$ est un système local $\underset{\sim}{A}$, libre à un générateur, l'isomorphisme

$$\underset{\sim}{\tilde{H}}^n(F, A) = \mathrm{Hom}_A(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{A}) \approx A$$

permet d'identifier

$$\eta \in H^0(B, \mathrm{Hom}_A(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{A}))$$

à l'élément unité de $H^*(B, A)$.

L'application φ, relative au système local $\underset{\sim}{A}$, s'écrit alors

$$\varphi : H^p(B, A) \longrightarrow H^{p+n+1}(M(X), X ; \underset{\sim}{A})$$

et

$$\theta : H^p(B , A) \longrightarrow H^{p+n+1}(B , \underset{\sim}{A}) .$$

On a $u = \varphi(1)$ et $\gamma = \theta(1)$.

Enfin l'isomorphisme :

(2) $$\underset{\sim}{\tilde{H}}^n(F , \underset{\sim}{G}) \otimes_A \underset{\sim}{A} \approx \mathrm{Hom}_A(\underset{\sim}{A} , \underset{\sim}{G}) \otimes_A \underset{\sim}{A} \approx \underset{\sim}{G}$$

permet de définir le cup-produit :

$$H^*(M(X) , \mathrm{Hom}_A(\underset{\sim}{A} , \underset{\sim}{G})) \otimes_A H^*(M(X) , X ; \underset{\sim}{A}) \longrightarrow H^*(M(X) , X ; \underset{\sim}{G}) .$$

PROPOSITION 3. - <u>Si</u> $\underset{\sim}{\tilde{H}}_n(F , A)$ <u>est un système local</u> $\underset{\sim}{A}$ <u>libre à un générateur les homomorphismes</u> φ <u>et</u> θ <u>vérifient les propriétés multiplicatives suivantes</u> :

(3) $$\varphi(x \cup y) = \bar{\pi}^*(x) \cup \varphi(y)$$

(4) $$\theta(x \cup y) = x \cup \theta(y) \qquad \begin{cases} x \in H^p(B , \mathrm{Hom}_A(\underset{\sim}{A} , \underset{\sim}{G})) \\ y \in H^q(B , A) \end{cases} .$$

DÉMONSTRATION. - On peut factoriser $\bar{\pi}^*$ et φ de la façon suivante :

$$\bar{\pi}^* : H^p(B , \mathrm{Hom}_A(\underset{\sim}{A} , \underset{\sim}{G})) \xrightarrow{\bar{\pi}_1^*} E_2^{p,0}(M(X) , \mathrm{Hom}_A(\underset{\sim}{A} , \underset{\sim}{G}))$$
$$\xrightarrow{\bar{\pi}_2^*} E_\infty^{p,0}(M(X) , \mathrm{Hom}_A(\underset{\sim}{A} , \underset{\sim}{G})) \xrightarrow{\bar{\pi}_3^*} H^p(M(X) , \mathrm{Hom}_A(\underset{\sim}{A} , \underset{\sim}{G})) .$$

$$\varphi : H^q(B , \mathrm{Hom}_A(\underset{\sim}{A} , \underset{\sim}{G})) \xrightarrow{\varphi_1} E_2^{p,n+1}(M(X) , X ; \underset{\sim}{G}) \xrightarrow{\varphi_2} E_\infty^{p,n+1}(M(X) , X ; \underset{\sim}{G})$$
$$\xrightarrow{\varphi_3} H^{p+n+1}(M(X) , X ; \underset{\sim}{G}) .$$

On écrit l'accouplement des suites spectrales associées à $M(X)$ et $(M(X) , X)$, relatif à l'accouplement de coefficients (2) :

$$E_r(M(X) ; \mathrm{Hom}_A(\underset{\sim}{A} , \underset{\sim}{G})) \otimes_A E_r(M(X) , X ; \underset{\sim}{A}) \longrightarrow E_r(M(X) , X ; \underset{\sim}{G}) .$$

D'après la proposition 1b, 1°, on a :

$$\varphi_1(x \cup y) = \bar{\pi}^*(x) . \varphi_1(y) \qquad \begin{cases} x \in H^p(B , \mathrm{Hom}_A(\underset{\sim}{A} , \underset{\sim}{G}) \\ y \in H^q(B , A) \\ x \cup y \in H^{p+q}(B , \mathrm{Hom}_A(\underset{\sim}{A} , \underset{\sim}{G})) \end{cases} .$$

Par application répétée de la proposition 1b, 2°, il vient, puisque

$$E_r^{*,0}(M(X) , \mathrm{Hom}_A(\underset{\sim}{A} , \underset{\sim}{G})) \approx E_{r+1}^{*,0}(M(X) ; \mathrm{Hom}_A(\underset{\sim}{A} , \underset{\sim}{G}))$$

et que

$$E_r^{*,n+1}(M(X) , X ; \underset{\sim}{G}) \longrightarrow E_{r+1}^{*,n+1}(M(X) , X ; \underset{\sim}{G})) \quad \text{(edge-homomorphismes)}$$

$$\psi_2(x'.y') = \bar{\pi}_2^*(x').\psi_2(y') \quad \begin{cases} x' \in E_2^{p,0}(M(X) , \mathrm{Hom}_A(\underset{\sim}{A} , \underset{\sim}{G})) \\ y' \in E^{q,n+1}(M(X) , X ; \underset{\sim}{A}) \\ x'.y' \in E^{p+q,n+1}(M(X) , X ; \underset{\sim}{G}) \end{cases}$$

La proposition 1b, 3° donne enfin

$$\psi_3(x''.y'') = \bar{\pi}_3^*(x'') \cup \psi_3(y'') \quad \begin{cases} x'' \in E_\infty^{p,0}(M(X) , \mathrm{Hom}_A(\underset{\sim}{A} , \underset{\sim}{G})) \\ y'' \in E_\infty^{q,n+1}(M(X) , X ; \underset{\sim}{A}) \\ x''.y'' \in E_\infty^{p+q,n+1}(M(X) , X ; \underset{\sim}{G}) \end{cases}$$

En combinant ces trois résultats, on voit que

$$\begin{aligned} \psi(x \cup y) &= (\psi_3 \circ \psi_2) \circ (\bar{\pi}_1^*(x).\psi_1(y)) \\ &= \psi_3((\bar{\pi}_2^* \circ \bar{\pi}_1^*)(x).(\psi_2 \circ \psi_1)(y)) \\ &= \bar{\pi}^*(x) \cup \psi(y) \end{aligned}$$

ce qui démontre (3).

Pour obtenir (4), il suffit d'appliquer aux deux membres de (3) l'homomorphisme $s^* \circ \psi$ en utilisant les propriétés multiplicatives **usuelles de ψ :**

$$\psi(x \cup y) = x \cup \psi(y) \quad \begin{cases} x \in H^p(M(X) , \mathrm{Hom}_A(\underset{\sim}{A} , \underset{\sim}{G})) \\ y \in H^q(M(X) , X ; \underset{\sim}{A}) \\ x \cup y \in H^{p+q}(M(X) , X ; \underset{\sim}{G}) \end{cases} .$$

En posant $y = 1$ il vient le corollaire suivant:

COROLLAIRE. - Si $\underset{\sim}{\tilde{H}}_n(F , A)$ est un système local $\underset{\sim}{A}$ libre à un générateur, on a

(5) $$\psi(x) = \bar{\pi}^*(x) \cup \psi(1) = \bar{\pi}^*(x) \cup u$$

(6) $$\theta(x) = x \cup \theta(1) = x \cup \gamma$$

$x \in H^*(B , \mathrm{Hom}_A(\underset{\sim}{A} , \underset{\sim}{G}))$.

<u>Cas où</u> B <u>est triangulable.</u>

PROPOSITION 4. - <u>Soit</u> X <u>un espace fibré localement trivial, dont la base</u> B <u>est triangulable. On suppose de plus que</u>

$A \approx \pi_n(F)$ (comme groupe abélien)

et que

$A = Z_2 \approx \pi_0(F)$ (comme ensemble) lorsque $n = 0$, de façon que

$$\underset{\sim}{\tilde{H}}^n(F\ ,\ A) = \underset{\sim}{\pi}_n(F) \quad .$$

Dans ces conditions, la classe fondamentale γ du fibré X (cf. définition 2), coïncide avec la classe fondamentale de X au sens de la théorie des obstructions. (C'est la première obstruction à l'existence d'une section $B \longrightarrow X$; pour la définition de cette classe, cf. [1] et [4].

Pour s'en convaincre, on déformera la section $B \xrightarrow{s} M(X)$ en une application, $B \xrightarrow{\sigma} M(X)$ appliquant le n-squelette de B dans le sous-espace $X \subset M(X)$.

X étant localement trivial, la restriction de σ à un $(n + 1)$-simplexe de B définit un élément de $\pi_{n+1}(C(F)\ ,\ F)$. On construit par ce moyen une $(n + 1)$-cochaîne de B à valeurs dans

$$\underset{\sim}{\pi}_{n+1}(C(F)\ ,\ F) \approx \underset{\sim}{\tilde{H}}_n(F\ ,\ A) = \underset{\sim}{A} \quad .$$

On montrera sans peine que cette cochaîne est un cocycle dont la classe de cohomologie est γ. Par l'isomorphisme

$$\pi_{n+1}(C(F)\ ,\ F) \longrightarrow \pi_n(F)$$

ce cocycle s'identifie d'autre part au cocycle de la première obstruction à l'existence d'une section de B dans X.

REMARQUE. - Si l'on donne un fibré partiel $X'' \longrightarrow B''(X)$, on peut généraliser les constructions qui précèdent au fibré relatif

$$(X\ ,\ X'') \longrightarrow (B\ ,\ B'')$$

et étendre par ce moyen aux fibrés de SERRE la théorie des classes d'obstruction relatives.

III. La transgression dans un espace fibré.

Dans ce paragraphe, on suppose que B est connexe et que

$$\underset{\sim}{G} = \underset{\sim}{\tilde{H}}_n(F\ ,\ A) \quad .$$

Toutes les cohomologies et les suites spectrales sont prises à coefficients dans

$$\underset{\sim}{\tilde{H}}_n(F\ ,\ A) \quad .$$

Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{H}^n(F) & \xrightarrow{\delta_1} & H^{n+1}(X , F) & \xrightarrow{\lambda} & H^{n+1}(X) \\ & & \uparrow \tilde{\pi}^* & & \uparrow \pi^* \\ & & H^{n+1}(B , b) & \xrightarrow[\approx]{h} & H^{n+1}(B) \end{array} .$$

En écrivant la suite spectrale associée à la paire (X , F) on constate que $\tilde{\pi}^*$ est injective dans la dimension $n + 1$. Comme

$$\mathrm{Im}(\delta_1) = \mathrm{Im}(\tilde{\pi}^*) ,$$

$\tilde{\pi}^{*-1}$ est définie sur l'image de δ_1.

DÉFINITION 3. - On appelle <u>transgression</u> et on note τ l'application composée

$$h \circ \tilde{\pi}^{*-1} \circ \delta_1 .$$

Lorsque $n > 0$, τ se calcule à l'aide de la différentielle d_{n+1} de la suite spectrale $(E_r^{p,q}(X))$ de la manière suivante :

$$\tau : \ H^n(F) \approx E_{n+1}^{0,n}(X) \xrightarrow{d_{n+1}} E_{n+1}^{n+1,0}(X) \approx H^{n+1}(B) .$$

Il suffit pour le voir, de remonter à la définition des différentielles d_r d'une suite spectrale.

PROPOSITION 5. - <u>Soit</u> $F \longrightarrow X \longrightarrow B$ <u>un fibré au sens de SERRE dont la base</u> B <u>est connexe. L'image par transgression de la classe fondamentale de la fibre</u> F <u>est l'opposé de la classe fondamentale du fibré</u> X.

Avec les notations de la définition 3 et du paragraphe 2D, on a donc :

(7) $$\tau(\varepsilon) = - \chi .$$

DÉMONSTRATION. - Considérons le système d'espaces

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{i} & X \\ \downarrow j_0 & & \downarrow j \\ C(F) & \xrightarrow{\bar{i}} & M(X) \end{array}$$

A l'aide de la suite spectrale attachée à la paire

$$(M(X) , (X , C(F)))$$

on voit que

$$H^i(M(X) , X \cup C(F)) = 0 \qquad \text{pour tout } i \leqslant n + 1 .$$

En tenant compte du fait que

$$\tilde{H}^*(C(F)) = 0$$

le diagramme de cohomologie du système d'espaces précédent où tous les carrés sont commutatifs, sauf celui marqué d'une étoile qui est anticommutatif, s'écrit :

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[r] \arrow[d] & H^{n+1}(M(X), X) \arrow[d, "\psi"] & \\
 & & 0 \arrow[r] \arrow[d] & H^{n+1}(M(X), C(F)) \arrow[r, "\bar{\chi}"] \arrow[d, "\tilde{j}^*"] & H^{n+1}(M(X)) \arrow[r] \arrow[d, "j^*"] & 0 \\
 & \tilde{H}^n(X) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "\delta"] & \tilde{H}^n(F) \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, "\delta_0"] \arrow[dr, phantom, "*"] & H^{n+1}(X, F) \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\tilde{\delta}"] & H^{n+1}(X) & \\
0 \arrow[r] & H^{n+1}(M(X), X) \arrow[r, "\tilde{i}^*"] \arrow[d, "\psi"] & H^{n+1}(C(F), F) \arrow[r, "\tilde{\delta}_1"] \arrow[d] & H^{n+2}(M(X), X \cup C(F)) & & \\
 & H^{n+1}(M(X)) \arrow[r] & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

En combinant ce diagramme avec la suite exacte de cohomologie de la paire

$$(M(X), F) \quad ,$$

on obtient le diagramme suivant, où toutes les lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
 & & \tilde{H}^n(F) \arrow[dll, "\delta_0"'] \arrow[drr, "\delta_1"] \arrow[dd, "\delta"] & & \\
H^{n+1}(C(F), F) & & & & H^{n+1}(X, F) \\
 & & H^{n+1}(M(X), F) \arrow[ull, "i_0"'] \arrow[urr, "i_1"] \arrow[dd, "\chi'"] & & \\
H^{n+1}(M(X), X) \arrow[uu, "\tilde{i}^*"] \arrow[urr, "\chi_1"] \arrow[drr, "\psi"'] & & & & H^{n+1}(M(X), C(F)) \arrow[uu, "\tilde{j}^*"'] \arrow[ull] \arrow[dll, "\bar{\chi}"] \\
 & & H^{n+1}(M(X)) & & \\
0 \arrow[uu] & & & & 0 \arrow[uu]
\end{tikzcd}$$

Si on identifie $H^*(P)$, $H^*(P , b)$ et k , à $H^*(M(X))$, $H^*(M(X) , C(F))$ et $\bar{\chi}$ respectivement, on a :

$$\tau = \bar{\chi} \circ \tilde{j}^{*-1} \circ \delta_1$$

et $\psi(u) = \chi$.

En vertu de la remarque du paragraphe 2D

$$\tilde{i}^*(u) - \delta_0(\varepsilon) = i_0(\chi_1(u) - \delta'(\varepsilon)) = 0$$

et par suite :

$$\chi_1(u) - \delta'(\varepsilon) \in \operatorname{Im}(\chi_0) \quad .$$

Soit donc $x \in H^{n+1}(M(X) , G(F))$ vérifiant :

$$\chi_0(x) = \chi_1(u) - \delta'(\varepsilon) \quad .$$

Comme $i_1(\chi_1(u) - \delta'(\varepsilon)) = - i_1 \delta'(\varepsilon) = - \delta_1(\varepsilon)$

$$j^*(x) = - \delta_1(\varepsilon)$$

et en vertu de la définition 3

$$\chi(x) = - \tau(\varepsilon) \quad .$$

On voit ainsi que :

$$\psi(u) = \chi'(\chi_1(u) - \delta'(\varepsilon)) = - \tau(\varepsilon) \quad ,$$

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARTAN (Henri). - Problèmes d'homotopie et de prolongement : théorie des obstructions, Séminaire Cartan, t. 2, 1949/50 : Espaces fibrés et homotopie, n° 3.

[2] DOUADY (Adrien). - La suite spectrale des espaces fibrés, Séminaire Cartan, t. 11, 1958/59 : Invariant de Hopf et opérations cohomologiques secondaires, n° 2.

[3] DOUADY (Adrien). - Applications de la suite spectrale des espaces fibrés, Séminaire Cartan, t. 11, 1958/59 : Invariant de Hopf et opérations cohomologiques secondaires, n° 3.

[4] WU WEN TSUN. - Les classes caractéristiques d'un espace fibré, Séminaire Cartan, t. 2, 1949/50 : Espaces fibrés et homotopie, n° 18.