SÉMINAIRE HENRI CARTAN

R. GODEMENT

Propriétés analytiques des localités

Séminaire Henri Cartan, tome 8 (1955-1956), exp. n° 19, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1955-1956__8__A19_0>

PROPRIÉTÉS ANALYTIQUES DES LOCALITÉS
(Exposés de R. GODEMENT, les 7 et 14.5.1956)

On se propose de démontrer un certain nombre de propriétés importantes des localités qui s'obtiennent en considérant les anneaux locaux complétés de celles-ci. Le texte qui suit diffère sensiblement, sur quelques points, des exposés oraux.

1.- Complété d'un anneau local régulier.

Etant donné un anneau local noethérien M on notera toujours $\hat{M}$ le complété de M pour la topologie $\underline{r}(M)$-adique.

Proposition 1.- *Soit M un anneau local noethérien de hauteur r ; alors $\hat{M}$ est un anneau local noethérien de hauteur r ; étant donnés un M-module E de type fini et un idéal primaire $\underline{q}$ de M, on a*

$$\chi_E(\underline{q} \ ; \ n) = \chi_{\hat{E}}(\hat{\underline{q}} \ ; \ n)$$

pour tout n.

On sait déjà (Exposé 18, Corollaire 2 du Théorème 4) que le couple $(\hat{M} \ , \ \widehat{\underline{r}(M)})$ est un anneau de Zariski ; comme $\hat{M}/\widehat{\underline{r}(M)} = M/\underline{r}(M)$ est un corps, $\widehat{\underline{r}(M)}$ est un idéal maximal de $\hat{M}$, et c'est donc le seul ; par suite $\hat{M}$ est un anneau local noethérien, d'idéal maximal $\widehat{\underline{r}(M)}$.

Si $\underline{q}$ est un idéal primaire de M, on a une relation $\underline{r}(M) \supset \underline{q} \supset \underline{r}(M)^k$; comme on a

$$\widehat{\underline{r}(M)}^k = \underline{r}(M)^k . \hat{M} = \underline{r}(\hat{M})^k$$

on en déduit que $\hat{\underline{q}}$ est un idéal primaire de $\hat{M}$. De plus, pour tout M-module E de type fini, le quotient $E/\underline{q}^n E$ est discret, de sorte que l'on a

$$E/\underline{q}^n E = \hat{E}/\hat{\underline{q}}^n \hat{E} \quad ,$$

d'où l'égalité des fonctions caractéristiques.

Il résulte évidemment des considérations précédentes que tout système de paramètres pour M est un système de paramètres pour $\hat{M}$, et que si M est régulier il en est de même de $\hat{M}$.

Théorème 1.- Soit M un anneau local régulier de hauteur r, ayant même caractéristique que son corps de restes $L = M/\underline{r}(M)$. Alors $\hat{M}$ est isomorphe (non canoniquement) à l'anneau de séries formelles $L[[X_1, \ldots, X_r]]$.

On peut supposer M complet ; le corps L se remonte alors en un sous-corps de M (Exposé 18, Théorème 5) que nous identifierons à L modulo l'application canonique $M \longrightarrow M/\underline{r}(M)$. Choisissons r générateurs $x_1, \ldots, x_r$ de $\underline{r}(M)$; il existe un homomorphisme

$$\varphi : L[X_1, \ldots, X_r] \longrightarrow M$$

qui envoie L sur L et X_i sur x_i ; par continuité, φ se prolonge en un homomorphisme $L[[X_1, \ldots, X_r]] \longrightarrow M$ qui, par passage aux anneaux gradués associés, devient bijectif ; on en déduit facilement que l'homomorphisme en question est lui-même bijectif, d'où le Théorème.

Le Théorème précédent s'applique notamment aux localités simples sur un corps.

2.- Une localité simple est un anneau factoriel.

Rappelons quelques propriétés des anneaux normaux.

Soit A un anneau noethérien intègre et intégralement clos, de corps des fractions K. Alors tout idéal premier-non-nul-minimal $\underline{p}$ de A définit une valuation discrète $v_{\underline{p}}$ de K, dont l'anneau est $A_{\underline{p}}$ et dont le groupe des valeurs est Z. Désignons par F l'ensemble des valuations de K ainsi obtenues (valuations "essentielles" du couple A, K) ; on a alors les propriétés suivantes :

(a) : pour tout $x \in K$, les $v \in F$ telles que $v(x) \neq 0$ sont en nombre fini ;

(b) : la relation $x \in A$ équivaut à la relation $v(x) \geqslant 0$ pour toute $v \in F$;

(c) : quels que soient $v_1, \ldots, v_k \in F$ et les entiers $n_1, \ldots, n_k$ il existe $x \in K$ vérifiant

$$v_i(x) = n_i \ (1 \leqslant i \leqslant k), \quad w(x) \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad w \in F, \ w \neq v_i .$$

Ces propriétés caractérisent du reste les anneaux noethériens considérés, et caractérisent la famille F des valuations définies par les idéaux premiers non nuls minimaux de A. Un anneau noethérien qui les possède sera dit normal.

. On dit qu'un anneau noethérien est factoriel s'il est normal et si ses idéaux premiers-non-nuls-minimaux sont principaux.

Lemme 1.- Pour qu'un anneau normal A soit factoriel il faut que toute intersection d'idéaux principaux de A soit un idéal principal, et il suffit que toute intersection finie d'idéaux principaux de A soit un idéal principal.

Soit $\underline{a}_i = Ax_i$ une famille quelconque d'idéaux principaux d'un anneau factoriel A, et supposons l'intersection $\underline{a}$ des $\underline{a}_i$ non nulle (faute de quoi il serait superflu de démontrer que $\underline{a}$ est principal...) ; choisissant un $x \in \underline{a}$ non nul on a évidemment

$$0 \leq v(x_i) \leq v(x)$$

pour tout i et pour toute valuation $v \in F$; les nombres

$$n_v = \sup_i v(x_i)$$

sont donc finis et presque tous nuls ; si l'on prouve l'existence d'un $x \in A$ tel que $v(x) = n_v$ pour toute $v \in F$ il est clair que l'on aura $\underline{a} = Ax$. Tout revient donc à démontrer que, dans la propriété (c) rappelée plus haut, on peut imposer $w(x) = 0$ pour $w \neq v_1, \ldots, v_k$. Pour ce faire il suffit évidemment d'établir que, pour chaque $v \in F$, il existe un $x \in A$ vérifiant

$$v(x) = 1 \quad , \quad w(x) = 0 \quad \text{pour toute} \quad w \in F \quad , \quad w \neq v \quad ;$$

il suffit pour cela de prendre pour x un générateur de l'idéal premier $\underline{p}$ qui définit v.

Réciproquement, prenons un anneau normal A, et supposons que toute intersection finie d'idéaux principaux soit un idéal principal. Soit $\underline{p}$ un idéal premier non nul minimal de A, définissant une valuation $v \in F$; nous allons montrer que $\underline{p}$ est intersection finie d'idéaux fractionnaires principaux de A, i.e. de sous-modules de K de la forme Ax ; cela démontrera évidemment que $\underline{p}$ est principal (faire subir à la situation une homothetie ramenant tout dans A).

Pour qu'un idéal fractionnaire Ax contiennent $\underline{p}$ il est nécessaire et suffisant que l'on ait

$$v(x) \leq 1 \quad , \quad w(x) \leq 0 \quad \text{pour toute} \quad w \neq v \quad ;$$

on en déduit immédiatement que $\underline{p}$ est intersection d'idéaux principaux (ainsi, plus généralement, que tout idéal défini par des "conditions valuatives") ; écrivons donc

$$\underline{p} = \bigcap_{Ax \supset \underline{p}} Ax \quad ,$$

et choisissons une fois pour toutes un x_o tel que $\underline{p} \subset Ax_o$; on aura aussi

$$\underline{p} = \bigcap_{Ax \supset \underline{p}} Ax \cap Ax_o \quad ;$$

mais par hypothèse $Ax \cap Ax_o$ est principal ; on a donc

$$\underline{p} = \bigcap_{\underline{p} \subset Ax \subset Ax_o} Ax \quad ;$$

reste à voir que les idéaux principaux Ax compris entre $\underline{p}$ et Ax_o sont en nombre fini.

Pour cela désignons par $v = v_o$, v_1 , ... , v_k les valuations essentielles telles que $v(x_o) \neq 0$, et posons $v_i(x) = n_i$; les x considérés sont assujettis uniquement à vérifier les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} &n_o \leqslant v_o(x) \leqslant 1 \quad ; \\ &n_i \leqslant v_i(x) \leqslant 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant k) \quad ; \\ &\quad w(x) = 0 \quad \text{pour les autres } w \in F \ ; \end{aligned}$$

les suites d'entiers $(v_o(x) , \ldots , v_k(x))$ correspondantes sont donc en nombre fini ; or l'idéal Ax est déterminé biunivoquement par les nombres $v(x)$, $v \in F$; cela démontre évidemment notre assertion, d'où le Lemme.

Bien entendu, les anneaux factoriels définis ici ne diffèrent en rien des anneaux factoriels au sens usuel (anneaux intègres dans lesquels tout élément se décompose de façon unique en produit de facteurs irréductibles), à ceci près qu'on leur a imposé d'être noethériens.

On sait qu'un anneau de séries formelles sur un corps est un anneau factoriel (conséquence élémentaire du Vorbereitungssatz).

Théorème 2.- Soit M un anneau local normal ; si $\hat{M}$ est factoriel, il en est de même de M .

Soient Mx_i des idéaux principaux de M en nombre fini, et $\underline{a}$ leur intersection ; en vertu des propriétés des anneaux de Zariski établies dans l'Exposé précédent, on a

$$\hat{M}\underline{a} = \bigcap \hat{M}x_i \quad ,$$

en sorte que l'on a

$$\hat{M}.\underline{a} = \hat{M}.x$$

pour un $x \in \hat{M}$, puisque $\hat{M}$ est factoriel.

Soient $u_1, \dots, u_h$ des générateurs de $\underline{a}$; on aura des relations de la forme

$$x = \sum u_i y_i \qquad (y_i \in \hat{M})$$
$$u_i = x z_i \qquad (z_i \in \hat{M}) \ ;$$

comme $\hat{M}$ est intègre il s'ensuit que $\sum y_i z_i = 1$ et par suite que l'un des $y_i z_i$, disons $y_1 z_1$, est inversible dans $\hat{M}$; mais alors z_1 est inversible a fortiori, et comme $u_1 = x z_1$ on voit que

$$\hat{M}.\underline{a} = \hat{M}.u_1$$

avec un $u_1 \in M$; attendu que l'on a

$$\underline{a} = M \cap \hat{M}.\underline{a}$$

pour tout idéal $\underline{a}$ de M, on en conclut que $\underline{a} = M.u_1$, ce qui achève la démonstration compte tenu du Lemme 1.

Corollaire : Soit M un anneau local régulier, ayant même caractéristique que son corps des restes ; alors M est un anneau factoriel.

En effet, M est normal, et son complété est un anneau de séries formelles sur un corps, donc est factoriel.

En particulier, une localité simple est un anneau factoriel, résultat dû à Zariski (la démonstration de Zariski repose sur le théorème de non-ramification analytique de Chevalley qu'on démontrera plus loin).

Les résultats de ce n° concernant les anneaux normaux sont à la base de la théorie des diviseurs d'une variété algébrique. On les trouvera dans P. Samuel, Commutative Algebra (Miméographié, Cornell University, 1953). Le Théorème 2 a été démontré récemment par Krull, et par Nagata. La démonstration donnée ici semble originale.

3.- Non-ramification analytique des localités.

Soient M une localité sur un corps et $\hat{M}$ le complété de M ; on se propose de démontrer (Chevalley) que $\hat{M}$ ne possède pas d'élément nilpotent, i.e. que l'idéal 0 de $\hat{M}$ est intersection d'idéaux premiers et de plus que pour tout idéal premier minimal $\underline{p}$ de $\hat{M}$, l'anneau local $\hat{M}/\underline{p}$ a même hauteur que M. En remplaçant M par une localité quotient, il résultera plus généralement de là que si $\underline{p}$ est un idéal premier d'une localité M, l'idéal $\hat{M}.\underline{p}$ est intersection d'idéaux premiers de $\hat{M}$.

Nous allons d'abord établir quelques propriétés des anneaux de fractions. Soit A un anneau commutatif avec unité ; on appelle anneau des fractions de A l'ensemble des fractions x/s, où x est un élément quelconque de A et s un élément non diviseur de zéro, avec les conventions et règles de calcul usuelles ; il est clair que A se plonge biunivoquement dans son anneau des fractions.

Lemme 2.- Soient A un anneau intègre, B une algèbre sur A, K et L les anneaux de fractions de A et B. On suppose que B est entier sur A, et qu'aucun élément non nul de A n'est diviseur de zéro dans B. Alors on a un isomorphisme canonique $L = K \underset{A}{\otimes} B$ d'algèbres sur K.

Etant données des fractions $x/s \in K$ et $y/t \in L$, la fraction xy/st est dans L puisque s n'est pas diviseur de zéro dans B ; L est donc bien une algèbre sur K, et l'on a un homomorphisme canonique

$$\varphi : K \underset{A}{\otimes} B \longrightarrow L$$

donné par

$$\varphi\left(\frac{x}{s} \otimes y\right) = \frac{xy}{s}$$

(on identifie bien entendu $s \in A$ à $s.1 \in B$, ce qui est légitime).

L'homomorphisme φ est injectif ; il est clair en effet que tout élément de $K \underset{A}{\otimes} B$ est de la forme $\frac{1}{s} \otimes y$, et comme $\frac{y}{s} = 0$ implique $y = 0$ notre assertion est démontrée.

L'homomorphisme φ est surjectif ; il suffit pour cela de montrer que tout $y/t \in L$ admet un dénominateur dans A, i.e. (puisque A est intègre) que tout $t \in B$ non diviseur de zéro admet un multiple dans A ; or comme B est entier sur A on a une relation

$$t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_o = 0$$

à coefficients dans A, et t n'étant pas diviseur de zéro on peut supposer $a_o \neq 0$ auquel cas $a_o \in A$ est le multiple cherché de t. (On notera que le lemme subsiste si l'on suppose seulement que tout élément de B est algébrique sur A, mais non nécessairement entier sur A).

Lemme 3.- Soient A un anneau local noethérien régulier, B un anneau semi-local contenant A et fini sur A, K, L, $\bar{K}$ et $\bar{L}$ les anneaux de fractions de A, B, $\hat{A}$ et $\hat{B}$. On suppose qu'aucun élément non nul de A ne soit diviseur de zéro dans B. Alors $\hat{B}$ est un $\hat{A}$-module de type fini, aucun élément non nul de $\hat{A}$ n'est diviseur de zéro dans $\hat{B}$, et $\bar{L}$ est une algèbre de dimension finie sur $\bar{K}$, isomorphe à $\bar{K} \underset{K}{\otimes} L$.

D'après l'exposé 18 , n° 3 , on sait que la topologie $\underline{r}(B)$-adique de B est identique à la topologie $\underline{r}(A)$-adique du A-module B ; d'après le Théorème 2, Exposé 18 , on a donc

$$\hat{B} = \hat{A} \underset{A}{\otimes} B \quad ,$$

ce qui prouve que $\hat{B}$ est un module de type fini sur $\hat{A}$; de plus, A étant régulier et donc intègre, le même Théorème montre qu'aucun élément non nul de $\hat{A}$ n'est diviseur de zéro dans $\hat{B}$.

Comme $\hat{A}$ est intègre puisque régulier, on peut donc appliquer le Lemme 2 au couple A , B et au couple $\hat{A}$, $\hat{B}$; il vient alors

$$\bar{L} = \bar{K} \underset{\hat{A}}{\otimes} \hat{B} = \bar{K} \underset{\hat{A}}{\otimes} (\hat{A} \underset{A}{\otimes} B) = \bar{K} \underset{A}{\otimes} B = \bar{K} \underset{K}{\otimes} (K \underset{A}{\otimes} B) = \bar{K} \underset{K}{\otimes} L \quad ,$$

d'où le Lemme.

Nous aurons d'autre part à utiliser le résultat suivant :

Lemme 4.- Soient K un corps et X_1 , ... , X_r des indéterminées ; le corps de séries formelles $K((X_1 , \dots , X_r))$ est extension séparable du corps de fonctions rationnelles $K(X_1 , \dots , X_r)$.

En considérant les inclusions

$$K(X_1 , \dots , X_{r-1})(X_r) \subset K((X_1 , \dots , X_{r-1}))(X_r) \subset K((X_1 , \dots , X_{r-1}))((X_r))$$

et en tenant compte du fait que, si L' est extension séparable de L , alors L'(X) est extension séparable de L(X) - résultat évident d'après le critère de prolongement des dérivations - on voit qu'il suffit de prouver le Lemme dans le cas d'une seule indéterminée X , ce qu'on va faire à l'aide du critère de MacLane ; il suffit évidemment d'établir que si des séries formelles

$$f_i(X) = \sum_{n \geq 0} a_{i,n} X^n \quad (1 \leq i \leq s)$$

sont linéairement indépendantes sur le corps K(X) il en est de même des séries

$$f_i(X)^p = \sum_{n \geq 0} a_{i,n}{}^p X^{np} \quad ,$$

p caractéristique de K . Or soit

$$\sum r_i(X) f_i(X)^p = 0$$

une relation linéaire entre les séries $f_i(X)^p$; on peut supposer que les r_i sont des polynomes, et comme $f_i(X)^p = g_i(X^p)$ on peut même supposer $r_i(X) = s_i(X^p)$; reste à prouver qu'on peut prendre pour s_i des polynomes à

coefficients dans K^p ; or soit (a_j) une base de K sur K^p ; on a donc $s_i(X^p) = \sum s_{ij}(X)^p a_j$, et comme $f_i(X)^p$ est à coefficients dans K^p on obtient les relations

$$\sum_i s_{ij}(X)^p f_i(X)^p = 0 \ ,$$

d'où le Lemme.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème de non-ramification analytique de Chevalley. Soit N une localité sur un corps de base $\mathcal{K}$; on peut supposer $N/\underline{r}(N)$ algébrique sur $\mathcal{K}$, et par suite écrire $N = B_{\underline{n}}$ où $B = \mathcal{K}[x_1 , \ldots , x_n]$ est une algèbre affine sur $\mathcal{K}$ et où $\underline{n}$ est un idéal maximal de B . En vertu du Lemme de normalisation (Exposé 4, Proposition 1), B est une extension finie d'une algèbre affine pure $A = \mathcal{K}[y_1 , \ldots , y_r]$, et l'on peut de plus supposer l'idéal $A \cap \underline{n}$ engendré par certains des y_i ; mais comme $A/A \cap \underline{n}$ est un anneau intermédiaire entre $\mathcal{K}$ et $N/\underline{r}(N)$, donc est un corps, $\underline{m} = A \cap \underline{n}$ est maximal, ce qui montre que l'on a

$$A \cap \underline{n} = \underline{m} = (y_1 , \ldots , y_r) \ .$$

Par suite, N contient la localité simple $M = A_{\underline{m}}$. Soit d'autre part I l'anneau engendré par M et B ; comme B est finie sur A , I est fini sur M , donc est un anneau semi-local. Posant $\underline{p} = I \cap \underline{r}(N)$, on a évidemment $B_{\underline{n}} \subset I_{\underline{p}} \subset N$ et donc $N = I_{\underline{p}}$; de plus $\underline{p}$ est un idéal maximal de I , puisque $I/\underline{p}$ est compris entre $\mathcal{K}$ et $N/\underline{r}(N)$.

Puisque $N = I_{\underline{p}}$ où $\underline{p}$ est un idéal maximal de l'anneau semi-local I , on voit que l'anneau $\hat{N}$ est un facteur direct de $\hat{I}$ (Exposé 18, Théorème 3) ; considérant les anneaux de fractions K , L , $\bar{K}$ et $\bar{L}$ de M , I , $\hat{M}$ et $\hat{I}$ on voit donc que $\hat{N}$ se plonge dans $\bar{L}$; or il est clair que le Lemme 3 s'applique au couple M , I ; par suite on a $\bar{L} = L \underset{K}{\otimes} \bar{K}$; or il est visible que

$$K = \mathcal{K}(y_1 , \ldots , y_r) \ , \quad \bar{K} = \mathcal{K}((y_1 , \ldots , y_r))$$

de sorte que l'extension $\bar{K}/K$ est séparable d'après le Lemme 4 ; donc (Exposé 13, Théorème 3) $\bar{L}$ ne comporte aucun élément nilpotent ; il en est donc de même de $\hat{N}$.

De plus soit $\underline{q}$ un idéal premier minimal de $\hat{N}$; tout élément de $\underline{q}$ est diviseur de zéro dans $\hat{N}$ (propriété générale des anneaux noethériens) de sorte que (Lemme 3) $\underline{q} \cap \hat{M} = 0$; comme $\hat{I}$ et a fortiori $\hat{N}$ est fini sur $\hat{M}$, on peut donc considérer l'anneau local $\hat{N}/\underline{q}$ comme une extension finie de $\hat{N}$, ce

qui prouve, comme on le voit facilement (à l'aide par exemple des théorèmes de Krull-Cohen-Seidenberg sur le relèvement des idéaux premiers) que $\hat{N}/q$ a même hauteur que $\hat{N}$, i.e. que N, i.e. que M ; cela termine la démonstration du théorème de Chevalley.

On trouvera dans P. Samuel (Thèse, ou bien Algèbre Locale, Chapitre III, n° 3) des renseignements plus précis qui montrent que le passage d'une localité à son complété ne modifie pas les multiplicités ; la démonstration donnée ici est du reste directement inspirée de celle de Samuel. Voir une démonstration tout à fait différente du théorème de Chevalley dans Nagata, Some remarks on local rings (Nagoya Math. Journal, Vol. 6 , pp. 53-58).

Un autre résultat important : si une localité est normale, il en est de même de son complété (Zariski, Ann. Inst. Fourier, vol. 2 , 1950, pp. 161-164 ; voir une démonstration complète et détaillée, mais assez compliquée, dans Nagata, Algebraic geometry over Dedekind domains I , Amer. J. of Math. 1956).