

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

C. CHEVALLEY

Le théorème principal de Zariski, II

Séminaire Henri Cartan, tome 8 (1955-1956), exp. n° 12, p. 1-3

<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1955-1956__8__A12_0>

© Séminaire Henri Cartan

(Secrétariat mathématique, Paris), 1955-1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LE THÉOREME PRINCIPAL DE ZARISKI, II.

(Exposé de C. CHEVALLEY, le 13.2.1956)

3.- Nous sommes en mesure de démontrer le "Main theorem" de Zariski, dont nous rappelons l'énoncé :

Théorème 1.- Si une localité M' domine régulièrement une localité M , M' est de la forme $M_{\underline{m}}^{**}$, où M^* désigne la fermeture intégrale de M dans M' , et $\underline{m}^*$ un idéal maximal de M^* .

Soient F et F' les corps des fractions de M et M' . Les localités M , M' ont des algèbres de définition A , A' telles que $A \subset A'$. Si A^* est la fermeture intégrale de A dans M' , A^* est contenu dans la fermeture intégrale de A dans F' ; comme F' est de degré fini sur F , A^* est une algèbre affine; on sait que $M^* = M[A^*]$. Soit $\underline{m}^* = M^* \cap \underline{r}(M')$, $M_0 = M_{\underline{m}^*}^*$; M' domine donc M_0 . De plus, M_0 est intégralement fermé dans M' . En effet, si $x \in M'$ est entier sur M_0 , il y a un $a \in M^*$, $a \notin \underline{m}^*$ tel que ax soit entier sur M^* , d'où $ax \in M^*$ et $x \in M_0$. Le corps des fractions de M_0 est F' . Car, si $y \in F'$, il y a un $b \neq 0$ de M tel que by soit entier sur M , d'où $by \in M^*$, ce qui démontre notre assertion. Il y a des éléments $x_1, \dots, x_h$ de A' tels que $A^*[A'] = A^*[x_1, \dots, x_h]$; M' est donc anneau local d'un idéal premier de $M_0[x_1, \dots, x_h]$.

Définissons par récurrence des anneaux M_i , M_i^* comme suit: M_0 est déjà défini, et $M_0^* = M_0$; M_i^* est la fermeture intégrale de $M_{i-1}[x_i]$ dans M' , et M_i est l'anneau local de l'idéal premier $\underline{r}(M') \cap M_i^*$ de M_i^* . On a $M_0[x_1, \dots, x_r] \subset M_r$, d'où $M_r = M'$; pour tout i , M' domine M_i et M_i domine M_0 , qui domine M ; M' est donc régulière au-dessus de M_i (corollaire de la proposition 1). Si $i < r$, tout élément x de M_{i+1}^* entier sur M_i est dans M_i ; il y a en effet un $a \in M_i^*$ n'appartenant pas à $\underline{r}(M') \cap M_i^*$ tel que ax soit entier sur M_i^* , d'où $ax \in M_i^*$, $x \in M_i$. Il résulte du théorème préliminaire (Exposé 11) que, si $M_j = M'$ pour tout $j > i$, on a aussi $M_i = M'$. On a donc $M' = M_0$; comme $M'/\underline{r}(M')$ est algébrique sur $M/\underline{r}(M)$, $M^*/(M^* \cap \underline{r}(M))$ est un corps, et M' est bien anneau local d'un idéal premier maximal de M^* . Ceci achève la démonstration.

4.- Application aux correspondances birationnelles.

Soient S et S' des schémas sur un corps K , et soient F et F' leurs corps de fractions. Donnons-nous un isomorphisme j de F' sur F ; les images par j des localités de S' forment alors un schéma S'_1 dont le corps des fractions est F ; de plus, j définit un isomorphisme φ de S'_1 sur S' . Soient S'' le joint de S et S'_1 , f et f'_1 ses applications de domination sur S et S'_1 ; soit $f' = \varphi \circ f'_1$. Alors (S'', f, f') est une correspondance non dégénérée maximale entre S et S' ; toute correspondance qui peut se définir de la manière qu'on vient d'indiquer à partir d'un isomorphisme de F' sur F est appelée une correspondance birationnelle.

Théorème 2.- Soit Γ une correspondance birationnelle entre des schémas S et S' . Soit M une localité normale appartenant à S ; soit M' une localité de S' qui correspond à M mais qui n'est spécialisation d'aucune localité différente d'elle-même qui corresponde à M . S'il n'y a aucune spécialisation $\neq M'$ de M' qui corresponde à M , alors M' est la seule localité de S' qui corresponde à M ; si Γ est définie par un isomorphisme j du corps des fractions F' de S' sur celui, F , de S , on a $j(M') \subset M$.

On peut supposer sans restriction de généralité que S et S' ont le même corps de fractions et que $\Gamma = (S'', f, f')$ est définie par l'automorphisme identique de ce corps; S'' est alors le joint de S et S' . Soit $\mathcal{J}^{\sim}(M)$ (resp. $\mathcal{J}^{\sim}(M')$) l'ensemble des spécialisations de M (resp. M') dans S (resp. S'); parmi les correspondances entre $\mathcal{J}^{\sim}(M)$ et $\mathcal{J}^{\sim}(M')$ induites par Γ , nous pouvons en trouver qui n'est spécialisation d'aucune autre différente d'elle-même (exposé 9, proposition 4); cette correspondance induite est définie par une localité M'' de S'' qui domine M et M' et qui n'est spécialisation d'aucune localité différente d'elle-même ayant la même propriété. Si M'' est une spécialisation d'une localité M''_1 qui domine M , M''_1 domine une localité M'_1 de S' qui correspond à M et qui est par suite identique à M' ; il en résulte que $M''_1 = M''$. Soit δ'' la dimension de M'' ; il résulte du théorème 1, exposé 9, qu'il y a des localités de dimension $\dim M + \dim M' - \delta''$ de $\mathcal{J}^{\sim}(M')$ qui correspondent à M ; en vertu de l'hypothèse faite sur M' , on a donc $\delta'' \leq \dim M$; comme on a manifestement $\delta'' \geq \dim M$, on a $\delta'' = \dim M$, et M'' domine M régulièrement. Comme M est normale et comme M'' a même corps de fractions que M , il résulte du théorème 1 que $M'' = M$. Comme S'' domine S , M est évidemment la seule localité de S'' qui

domine M ; on en conclut que M' est la seule localité de S' qui correspond à M , et que $M' \subset M$.

Remarque : L'hypothèse " il n'y a aucune spécialisation de M' autre que M' qui correspond à M " peut être remplacée par " il n'y a qu'un nombre fini de spécialisations de M' qui correspondent à M " . Reprenons en effet la démonstration précédente. L'ensemble des localités de dimension $\dim M + \dim M' - \delta''$ de $\mathcal{I}^*(M')$ qui correspondent à M est dense dans $\mathcal{I}^*(M')$; si donc on avait $\delta'' < \dim M$, cet ensemble serait infini.
