J. C. Moore

# Homotopie des complexes monoïdaux, I

*Séminaire Henri Cartan*, tome 7, nº 2 (1954-1955), exp. nº 18, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1954-1955__7_2_A8_0>

Séminaire H. CARTAN, E.N.S., 1954/55.

# HOMOTOPIE DES COMPLEXES MONOÏDAUX, I.

(Exposé de J.C. MOORE, 18.4.1955)

## 1.- Notion de complexe monoïdal.

Définition 1 : un complexe monoïdal $\Gamma$ est une suite $(\Gamma_q)$ (où $q$ parcourt l'ensemble des entiers $\geq 0$ ) de monoïdes $\Gamma_q$ avec élément neutre $e_q$ , et, pour chaque $q$ , d'homomorphismes

$$d_i : \Gamma_{q+1} \longrightarrow \Gamma_q \qquad (0 \leq i \leq q+1)$$
$$s_i : \Gamma_q \longrightarrow \Gamma_{q+1} \qquad (0 \leq i \leq q)$$

satisfaisant aux identités usuelles (cf. Exposé 12, page 1 ; ou Exposé 14, formules (1.1) à (1.5)). Rappelons qu'un monoïde est un ensemble muni d'une loi de composition associative (qu'on notera multiplicativement) ; un "homomorphisme" de monoïdes avec élément neutre est une application qui respecte la loi de composition et transforme l'élément neutre dans l'élément neutre.

En d'autres termes : un complexe monoïdal est un "complexe semi-simplicial complet" (Eilenberg-Zilber [1]) dans lequel les simplexes de chaque dimension $q$ forment un monoïde avec élément neutre, et tel que les opérations de face et de dégénérescence soient compatibles avec la structure de monoïde à élément neutre.

Soit $\Gamma$ un complexe monoïdal. Pour chaque $q$ , soit $R_q(\Gamma)$ l'algèbre du monoïde $\Gamma_q$ à coefficients entiers ; alors $R(\Gamma) = \sum_{q \geq 0} R_q(\Gamma)$ est un complexe d'anneaux, au sens de l'Exposé 12 (page 2), les opérations $d_i$ et $s_i$ étant, bien entendu, déterminées par celles de $\Gamma$ . C'est même un complexe d'anneaux augmenté, si on définit, pour chaque $q$ , une augmentation $\varepsilon_q : R_q(\Gamma) \longrightarrow Z$ en posant

$$\varepsilon_q\left(\sum_i \lambda_i \gamma_i\right) = \sum_i \lambda_i , \quad \text{pour} \quad \lambda_i \in Z \quad \text{et} \quad \gamma_i \in \Gamma_q .$$

Définition 2 : on dit qu'un complexe monoïdal $\Gamma = (\Gamma_q)_{q \geq 0}$ est involutif si chaque monoïde $\Gamma_q$ est muni d'un automorphisme $x \longrightarrow \bar{x}$ (appelé involution) satisfaisant aux conditions suivantes :

(1.1) $\bar{\bar{x}} = x$

(1.2) $\bar{e}_q = e_q$ , $\overline{(xy)} = \bar{y}\,\bar{x}$

(1.3) $\overline{d_i x} = d_i \bar{x}$ , $\overline{s_i x} = s_i \bar{x}$ .

Alors l'involution $x \longrightarrow \bar{x}$ se prolonge au complexe $R(\Gamma)$ .

Exemple : supposons que les $\Gamma_q$ soient des groupes ; on pose $\bar{x} = x^{-1}$ , et on a alors un complexe involutif. Cette espèce de complexe a été considérée par A. Heller [2] .

Par exemple, soit $X$ un groupe topologique. Soit $\Gamma_q$ l'ensemble des q-simplexes singuliers de $X$ ; la multiplication dans l'espace $X$ définit dans chaque $\Gamma_q$ une loi de composition pour laquelle $\Gamma_q$ est un groupe. On obtient ainsi un complexe monoïdal involutif.

Définition 3 : on dit qu'un complexe monoïdal $\Gamma$ est un complexe monoïdal avec homotopie si :

(i) $\Gamma$ est involutif ;

(ii) ("condition de Kan") si $x_0, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_{q+1} \in \Gamma_q$ sont tels que $d_i x_j = d_{j-1} x_i$ pour $i < j$ , $i$ et $j$ étant $\neq k$ , alors il existe un $x \in \Gamma_{q+1}$ tel que $d_i x = x_i$ pour tout $i \neq k$ ;

(iii) ("axiome de remplacement") si $x \in \Gamma_{q+1}$ et $y$ , $y'$, $y'' \in \Gamma_q$ sont tels que

$d_k x = y' y \bar{y} y''$ et $d_j(y\bar{y}) = e_{q-1}$ pour tout $j$ $(0 \leq j \leq q)$ , alors il existe un $z \in \Gamma_{q+1}$ tel que

$d_j z = d_j x$ pour $j \neq k$ , et $d_k z = y'y''$ .

Remarque : la condition (ii) ne fait pas intervenir la structure multiplicative des $\Gamma_q$ . Elle est toujours vérifiée si, pour chaque $q$ , $\Gamma_q$ est l'ensemble des q-simplexes singuliers d'un espace topologique, parce que la réunion de toutes les faces d'un (q+1)-simplexe sauf une, est un rétracte de ce simplexe.

## 2.- Exemple de complexe monoïdal avec homotopie.

Un exemple important est fourni par le complexe singulier de l'"espace des lacets" d'un espace topologique $X$ . Nous allons d'abord définir l'espace des chemins et l'espace des lacets de $X$ , d'une manière un peu différente de la manière classique.

Soit $X$ un espace topologique. Un <u>chemin</u> de $X$ est, par définition, une paire $(r,f)$ , où $r$ désigne un nombre réel $\geq 0$ , et $f$ une application continue du segment $[0, r]$ dans $X$ . Soient $(r,f)$ et $(s,g)$ deux chemins de $X$ tels que $f(r) = g(0)$ ; on définit le chemin composé $(r,f).(s,g) = (r+s,h)$ , où

$$h(t) = \begin{cases} f(t) & \text{pour } 0 \leq t \leq r \\ g(t-r) & \text{pour } r \leq t \leq r+s . \end{cases}$$

Soit alors $X$ un espace topologique, connexe par arcs, et soit un point-base $x_0 \in X$ . Soit $E(X,x_0)$ l'ensemble de tous les chemins $(r,f)$ de $X$ tels que $f(0) = x_0$ . Définissons l'application

$$p : E(X , x_0) \longrightarrow X$$

par $p(r,f) = f(r)$. Soit $L(X,x_0) = p^{-1}(x_0)$ : ensemble des <u>lacets</u> d'origine $x_0$ . La loi de composition de $L(X,x_0)$ est <u>associative</u>, et possède pour <u>élément neutre</u> le lacet $(0,f)$ , où $f$ est définie par $f(0) = x_0$ .

Définissons sur l'ensemble $E(X,x_0)$ une topologie comme suit : pour chaque triplet $(C,V,U)$ formé d'un ouvert $V$ de la demi-droite $R^+$ (formée des nombres réels $\geq 0$ ) , d'un ouvert $U$ de $X$ , et d'un compact $C$ de $[0,1]$, considérons l'ensemble $W(C,V,U)$ des chemins $(r,f) \in E(X,x_0)$ tels que $r \in V$ et $f(rC) \subset U$ , en notant $rC$ l'ensemble des $rt$ où $t$ parcourt $C$ . Les ensembles $W(C,V,U)$ forment une base d'ouverts dans une topologie sur $E(X,x_0)$ , qui devient ainsi un espace topologique. L'espace des lacets $L(X,x_0)$ est muni de la topologie induite. La loi de composition de $L(X,x_0)$ est <u>continue</u>.

<u>Théorème 1</u> : <u>Soit</u> $X$ <u>un espace topologique, connexe par arcs, et soit</u> $x_0 \in X$ <u>un point-base. Alors</u> :

1) $E(X,x_0)$ <u>est un espace contractile</u> ;
2) <u>le triplet</u> $(E(X,x_0),p,X)$ <u>est un espace fibré</u> (au sens de Serre) ;
3) <u>si</u> $X$ <u>est séparé</u>, $E(X,x_0)$ <u>est aussi séparé</u>.

(La démonstration est semblable à celle de Serre [3]).

Soit maintenant $\Omega_q(X,x_0)$ l'ensemble des q-simplexes singuliers de $L(X,x_0)$ , et soit $\Omega(X,x_0)$ la collection des $\Omega_q(X,x_0)$ pour $q \geq 0$ ; il est évident que $\Omega(X,x_0)$ est un <u>complexe monoïdal</u>. Considérons dans $\Omega_q(X,x_0)$ l'involution définie par l'application

$$(r,f) \longrightarrow (r,\bar{f}) \qquad \text{de} \qquad L(X,x_0) ,$$

où $\bar{f}(t) = f(r-t)$ pour $0 \leq t \leq r$ . Alors $\Omega(X,x_0)$ <u>est un complexe monoïdal involutif</u>.

<u>Théorème 2</u> : <u>Si</u> $X$ <u>est un espace topologique, connexe par arcs, et</u> $x_0 \in X$ , <u>alors</u> $\Omega(X,x_0)$ <u>est un complexe monoïdal avec homotopie</u>.

<u>Démonstration</u> : la condition (i) est vérifiée ; la condition (ii) aussi, puisque $\Omega(X,x_0)$ est le complexe singulier d'un espace topologique. Il reste à prouver (iii). Notons $I$ le segment $[0,1]$ ; définissons une application $S : E(X,x_0) \times I \longrightarrow E(X,x_0)$ par $S(r,f,t) = (rt,h)$ , où $h$ désigne la restriction de $f$ au segment $[0,rt]$ . Soient alors $x \in \Omega_{q+1}(X,x_0)$ et $y,y',y'' \in \Omega_q(X,x_0)$ comme dans l'axiome (iii), c'est-à-dire $d_k x = y'y\bar{y}y''$ , $d_j(y\bar{y}) = e_{q-1}$ pour $0 \leq j \leq q$ . Notons $\Delta^i_{q+1}$ la i-ième face du simplexe $\Delta_{q+1}$ , et définissons une application continue

$$f : (\Delta_{q+1} \times \{0\}) \cup (\bigcup_{0 \leq i \leq q} \Delta^i_{q+1} \times I) \longrightarrow L(X,x_0)$$

comme suit : on pose

$$f(u,0) = x(u) \quad \text{pour} \quad u \in \Delta_{q+1} \quad ,$$

$$f(u,t) = x(u) \quad \text{pour} \quad u \in \Delta^i_{q+1} \quad , \quad i \neq k \; ,$$

$$f(u,t) = y'(u).S(y(u),1-t).\bar{S}(y(u),1-t).y''(u) \quad \text{pour} \quad u \in \Delta^k_{q+1} \quad ,$$

les produits du second membre s'entendant au sens de la multiplication dans l'espace $E(X,x_0)$ .

Alors $f$ se prolonge en une application continue $\hat{f}$ de $\Delta_{q+1} \times I$ dans $L(X,x_0)$ ; soit $z$ l'application de $\Delta_{q+1}$ dans $L(X,x_0)$ telle que

$$z(u) = \tilde{f}(u,1) \quad \text{pour} \quad u \in \Delta_{q+1} \quad . \text{ On a}$$

$$d_i z = d_i x \quad \text{pour} \quad i \neq k \; , \quad d_k z = y'y'' \; ,$$

ce qui achève la démonstration.

## 3.- <u>Autre exemple de complexe monoïdal avec homotopie</u>.

<u>Théorème 3</u> : <u>Si</u> $\Gamma$ <u>est un complexe de groupes</u>, $\Gamma$ <u>est un complexe avec homotopie</u> .

<u>Démonstration</u> : les conditions (i) et (iii) de la définition 4 sont trivialement vérifiées (rappelons que l'involution de $\Gamma$ est alors, par définition, donnée par $\bar{x} = x^{-1}$ ) . Il reste à prouver (ii). Etant donné $k$ entier tel que $0 \leq k \leq q+1$ , nous supposons donnés des $x_i \in \Gamma_q$ ($0 \leq i \leq q+1$ , $i \neq k$ ) tels que $d_i x_j = d_{j-1} x_i$ pour $i < j$ , $i \neq k$ , $j \neq k$ ; et nous cherchons un $x \in \Gamma_{q+1}$ tel que $d_i x = x_i$ pour tout $i \neq k$ .

Montrons d'abord l'existence d'un $u \in \Gamma_{q+1}$ tel que $d_i u = x_i$ pour $i < k$. C'est trivial si $k = 0$ ; si $k > 0$, on définit, par récurrence sur l'entier $r$ $(0 \leq r \leq k)$, un $u^r \in \Gamma_{q+1}$ tel que

(3.1) $\qquad d_i u^r = x_i$ pour $i \leq r$.

On prend d'abord $u^o = s_o x_o$ ; on a bien $d_o u^o = x_o$ ; puis, si $r < k-1$, posons

$$y^r = s_{r+1}((d_{r+1}\overline{u^r})x_{r+1}) \;, \quad u^{r+1} = u^r y^r \;;$$

un calcul facile, compte tenu de (3.1), montre que $d_i y^r = e_q$ pour $i \leq r$, et $d_{r+1}y^r = (d_{r+1}\overline{u^r})x_{r+1}$. On en déduit que $d_i u^{r+1} = x_i$ pour $i \leq r+1$. Finalement, si on prend pour $u$ l'élément $u^{k-1}$, on aura $d_i u = x_i$ pour $i < k$, comme annoncé.

On va maintenant prouver, par récurrence sur l'entier $r$ $(0 \leq r \leq q-k+1)$ ; l'existence d'un $x^r \in \Gamma_{q+1}$ tel que

(3.2) $\qquad d_i x^r = x_i$ pour $i < k$ et pour $i > q-r+1$.

Pour $r=0$, on prend $x^o = u$. Supposons défini $x^r$ pour $r \leq q-k$, et posons

$$z^r = s_{q-r}((d_{q-r+1}\overline{x^r})x_{q-r+1}) \;, \qquad x^{r+1} = x^r z^r \;;$$

un calcul facile, compte tenu de (3.2), montre que $d_i z^r = e_q$ (élément neutre) pour $i < k$ et $i > q-r+1$, et $d_{q-r+1}z^r = (d_{q-r+1}\overline{x^r})x_{q-r+1}$. Il s'ensuit que $d_i x^{r+1} = x_i$ pour $i < k$ et pour $i > q-r$. Finalement, si on prend pour $x$ l'élément $x^{q-k+1}$, on a $d_i x = x_i$ pour $i \neq k$, ce qui achève la démonstration du théorème.

## 4.- Groupes d'homotopie d'un complexe monoïdal.

Soit $\Gamma$ un complexe monoïdal. Définissons les monoïdes $\widetilde{\pi}_q(\Gamma)$ en posant

$$\widetilde{\pi}_o(\Gamma) = \Gamma_o \;, \text{ et, pour } q \geq 1 \;, \quad \widetilde{\pi}_q(\Gamma) = \bigcap_{0 \leq j < q} \operatorname{Ker} d_j : \Gamma_q \to \Gamma_{q-1} \;.$$

Proposition 1 : L'application $d_{q+1} : \Gamma_{q+1} \longrightarrow \Gamma_q$ applique $\widetilde{\pi}_{q+1}(\Gamma)$ dans $\widetilde{\pi}_q(\Gamma)$, et si on considère la suite d'homomorphismes

$$\cdots \longrightarrow \widetilde{\pi}_{q+1}(\Gamma) \xrightarrow{d_{q+1}} \widetilde{\pi}_q(\Gamma) \xrightarrow{d_q} \widetilde{\pi}_{q-1}(\Gamma) \longrightarrow \cdots \;,$$

le composé de deux homomorphismes consécutifs est trivial (i.e. : son image est l'élément neutre).

<u>Démonstration</u> : soit $x \in \widetilde{\Pi}_{q+1}(\Gamma)$ ; alors, pour $j \leq q$ , $d_j d_{q+1} x = d_q d_j x = e_{q-1}$ , ce qui prouve tout.

<u>Théorème 4 : Soit $\Gamma$ un complexe monoïdal avec homotopie. Dans le noyau $N_q$ de $d_q : \widetilde{\Pi}_q(\Gamma) \longrightarrow \widetilde{\Pi}_{q-1}(\Gamma)$ , il existe une relation d'équiva- et une seule, compatible avec la loi de composition de $N_q$ , et jouissant des propriétés suivantes : la classe d'équivalence de l'élément neutre $e_q$ est l'image de $d_{q+1} : \widetilde{\Pi}_{q+1}(\Gamma) \longrightarrow \widetilde{\Pi}_q(\Gamma)$ , le monoïde-quotient de $N_q$ est un groupe $\Pi_q(\Gamma)$ , et les classes d'équivalence de $x$ et $\bar{x}$ sont des éléments inverses de ce groupe.</u>

<u>Démonstration</u> : s'il existe une relation d'équivalence jouissant des propriétés de l'énoncé, c'est forcément la relation suivante (entre éléments $x$ et $y$ de $N_q$ ) :

$x\bar{y}$ est dans l'image de $d_{q+1} : \widetilde{\Pi}_{q+1}(\Gamma) \longrightarrow \widetilde{\Pi}_q(\Gamma)$ .

Montrons que cette relation est bien une relation d'équivalence, et qu'elle jouit des propriétés annoncées. On aura besoin de deux lemmes :

<u>Lemme 1</u> : <u>Soient</u> $x$ , $y$ , $z \in N_q$ <u>tels que</u> $x\bar{y}y\bar{z}$ <u>soit dans l'image de</u> $\widetilde{\Pi}_{q+1}(\Gamma)$ <u>par</u> $d_{q+1}$ ; <u>alors</u> $x\bar{z}$ <u>est aussi dans cette image</u>.

Cela résulte de l'axiome de remplacement (axiome (iii)) : soit $u \in \widetilde{\Pi}_{q+1}(\Gamma)$ tel que $d_{q+1}u = x\bar{y}y\bar{z}$ ; on a $d_j(\bar{y}y) = e_{q-1}$ pour $j \leq q$ puisque $y \in N_q$ , donc il existe $v \in \Gamma_{q+1}$ tel que

$d_j v = d_j u$ pour $j \leq q$ , et $d_{q+1}v = x\bar{z}$ ;

on a donc $d_j v = e_q$ pour $j \leq q$ , et par suite $v \in \widetilde{\Pi}_{q+1}(\Gamma)$ . D'où le lemme.

<u>Lemme 2</u> : <u>Soient</u> $u \in \widetilde{\Pi}_{q+1}(\Gamma)$ <u>et</u> $z \in N_q$ ; <u>alors</u> $z(d_{q+1}u)\bar{z}$ <u>est de la forme</u> $d_{q+1}v$ , avec $v \in \widetilde{\Pi}_{q+1}(\Gamma)$ .

En effet, on a $d_j((s_q z)u(s_q\bar{z})) = e_q$ pour $j < q$ ,

$d_q((s_q z)u(s_q\bar{z})) = z\bar{z}$ , et $d_{q+1}((s_q z)u(s_q\bar{z})) = z(d_{q+1}u)\bar{z}$ . D'après l'axiome de remplacement , il existe $v \in \Gamma_{q+1}$ tel que

$d_j v = d_j((s_q z)u(s_q\bar{z}))$ pour $j \neq q$ , et $d_q v = e_q$ . On a donc $v \in \widetilde{\Pi}_{q+1}(\Gamma)$ , et $d_{q+1}v = z(d_{q+1}u)\bar{z}$ , ce qui démontre le lemme.

Revenons maintenant à la démonstration du théorème 4 . Soit $R(x,y)$ la relation (entre éléments $x$ , $y \in N_q$) définie par :

$x\bar{y}$ est de la forme $d_{q+1}u$, avec $u \in \tilde{\Pi}_{q+1}(\Gamma)$.

On a $R(x,x)$, en vertu du lemme 2 ; la relation $R$ est symétrique, car si $x\bar{y} = d_{q+1}u$, on a $y\bar{x} = d_{q+1}\bar{u}$ ; enfin, $R$ est transitive, car si on a $R(x,y)$ et $R(y,z)$, on a $R(x,z)$ en vertu du lemme 1.

Montrons que la relation d'équivalence $R$ est compatible avec la loi de composition de $N_q$ : soient $x$, $x'$, $y \in N_q$, avec $R(x,x')$ ; alors $yx$ est équivalent à $yx'$, car $yx\bar{x}'\bar{y}$ est de la forme $d_{q+1}v$ (avec $v \in \tilde{\Pi}_{q+1}(\Gamma)$), en vertu du lemme 2. Montrons aussi que $xy$ est équivalent à $x'y$, autrement dit que $xy\bar{y}\bar{x}'$ est dans l'image de $\tilde{\Pi}_{q+1}(\Gamma)$ par $d_{q+1}$ : d'après le lemme 1, il suffit de montrer que $x\bar{x}'x'y\bar{y}\bar{x}'$ est dans l'image en question ; or c'est égal à $(x\bar{x}')(x'y\bar{y}\bar{x}')$, produit de deux éléments dont chacun est dans l'image de $\tilde{\Pi}_{q+1}(\Gamma)$ par $d_{q+1}$ (le premier, par hypothèse ; le second, par application répétée du lemme 2).

Soit alors $\Pi_q(\Gamma)$ le monoïde-quotient de $N_q$ par la relation d'équivalence $R$. Si $x \in N_q$, les classes d'équivalence de $x$ et $\bar{x}$ sont des éléments de $\Pi_q(\Gamma)$ inverses l'un de l'autre, en vertu du lemme 2. Ainsi $\Pi_q(\Gamma)$ est un groupe, et le théorème 4 est entièrement démontré.

Définition 4 : si $\Gamma$ est un complexe monoïdal avec homotopie, les groupes $\Pi_q(\Gamma)$ s'appellent les groupes d'homotopie du complexe $\Gamma$. (Cette définition est justifiée, car on voit facilement que, dans le cas où $\Gamma$ se compose des simplexes singuliers d'un espace de lacets, les groupes $\Pi_q(\Gamma)$ sont bien les groupes d'homotopie de cet espace).

Théorème 5 : Si $\Gamma$ est un complexe monoïdal avec homotopie, les groupes $\Pi_q(\Gamma)$ sont abéliens pour $q \geq 1$.

Démonstration : soient $x$, $y \in N_q$ ; on veut montrer que, si $q \geq 1$, l'élément $xy\bar{x}\bar{y}$ est dans l'image de $\tilde{\Pi}_{q+1}(\Gamma)$ par $d_{q+1}$. Or soit $z = s_q(xy\bar{x}\bar{y})$ ; on a $d_jz = e_q$ pour $j < q$, et $d_qz = d_{q+1}z = xy\bar{x}\bar{y}$. Puisque $q \geq 1$, on peut considérer $z' = (s_{q-1}x)(s_qy)(s_{q-1}\bar{x})(s_q\bar{y})$ ; on a

$d_jz' = e_q$ pour $j < q-1$, $d_{q-1}z' = x\bar{x}$, $d_qz' = xy\bar{x}\bar{y}$, $d_{q+1}z' = y\bar{y}$.

D'après l'axiome de remplacement, il existe $z'' \in \Gamma_{q+1}$ tel que

$d_jz'' = d_jz'$ pour $j \neq q-1$, $q+1$, et $d_{q-1}z'' = d_{q+1}z'' = e_q$. Soit $w = z\bar{z}''$ ; on a

$$d_j w = e_q \quad \text{pour} \quad j < q \ , \ d_q w = xy\bar{x}\bar{y}(\overline{xy\bar{x}\bar{y}}) \ , \ d_{q+1} w = xy\bar{x}\bar{y} \ .$$

D'après l'axiome de remplacement, il existe $w' \in \Gamma_{q+1}$ tel que

$$d_j w' = d_j w \quad \text{pour} \quad j \neq q \ , \ \text{et} \quad d_q w' = e_q \ .$$

On a donc $w' \in \tilde{\pi}_{q+1}(\Gamma)$ , et $d_{q+1} w' = xy\bar{x}\bar{y}$ . Ceci prouve le théorème.

Remarque : la démonstration précédente prouve à nouveau que les groupes d'homotopie $\pi_q(X)$ d'un espace topologique $X$ sont abéliens pour $q \geq 2$ : il suffit de considérer l'espace des lacets de $X$ .

BIBLIOGRAPHIE.

[1] S. EILENBERG et J. ZILBER, Semi-simplicial complexes and singular homology (Ann. of Math. 51, 1950, p.499-513).

[2] A. HELLER, Homotopy resolutions of semi-simplicial complexes (à paraître aux Trans. Amer. Math. Soc.).

[3] J.P. SERRE, Homologie singulière des espaces fibrés (Ann. of Math. 54, 1951, p.425-505).