

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

H. CARTAN

Un théorème d'immersion

Séminaire Henri Cartan, tome 6 (1953-1954), exp. n° 15, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1953-1954__6__A15_0>

© Séminaire Henri Cartan

(Secrétariat mathématique, Paris), 1953-1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UN THÉORÈME D'IMMERSION

(Exposé de H. Cartan, 5-4-1954)

§1. Position du problème

X désigne, comme dans l'exposé 1, un domaine borné de l'espace numérique complexe $\mathbb{C}^s$, et G un groupe discret d'automorphismes analytiques de X . Alors les conditions (I) et (II) de l'exposé 12 sont satisfaites (cf. Exp. 1, §2). Soit Y l'espace-quotient X/G . D'après 12, l'espace Y porte une structure d'espace analytique normal (de dimension s), définie par le faisceau $\mathfrak{F}$ que voici: si $y \in Y$, et si $x \in X$ a pour image y , l'application canonique $p: X \rightarrow Y$ définit un isomorphisme de l'anneau $\mathfrak{A}_y$ sur l'anneau des germes holomorphes au point x et invariants par le groupe d'isotropie $G(x)$, groupe qui est fini.

D'une façon plus précise, voici ce qu'on a démontré au théorème 5 de l'Exposé 12: soit $x_0 \in X$, et $y_0 = p(x_0) \in Y$. Choisissons, au point x_0 , des coordonnées locales de manière que le groupe $G(x_0)$ soit linéaire. Soit (Q_i) $1 \leq i \leq p$ un système fini de polynômes homogènes (par rapport à ces coordonnées locales) qui soient invariants par $G(x_0)$ et engendrent l'anneau de tous les polynômes $G(x_0)$ -invariants. Soit (f_i) un système de fonctions holomorphes au point x_0 , invariantes par $G(x_0)$, tel que $f_i - Q_i$ soit d'ordre $> d_i$ au point x_0 (on note d_i le degré de Q_i). Alors, dans un voisinage ouvert U assez petit de x_0 (stable pour $G(x_0)$), l'application

$$(1) \quad x \rightarrow (f_i(x)) \quad (1 \leq i \leq p)$$

définit, par passage au quotient, un isomorphisme de $V = p(U)$ sur un sous-ensemble analytique normal dans un voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^p$.

Supposons maintenant que l'espace-quotient $X/G = Y$ soit compact. Avec cette hypothèse, on se propose de définir un plongement global de Y

comme sous-ensemble algébrique normal dans un espace projectif convenable. Ce plongement s'effectuera au moyen de séries de Poincaré d'un même poids (voir ci-dessous, le théorème énoncé au §3).

§2. Rappel de résultats antérieurs.

Dans les hypothèses précédentes (et sans qu'il soit besoin encore de supposer X/G compact), on note $J_g(x)$ la valeur, au point $x \in X$, du jacobien (au sens analytique-complexe) de la transformation $x \mapsto g \cdot x$ (pour $g \in G$), cette transformation étant rapportée aux coordonnées de l'espace ambiant $\mathbb{C}^S$. Pour tout entier $m \geq 2$, soit L_m l'espace vectoriel des séries de Poincaré .

$$\sum_{g \in G} \varphi(g \cdot x) (J_g(x))^m ,$$

où $\varphi(x)$ est un polynôme (cf. Exposé 1, §3).

Pour chaque point $x_0 \in X$, on notera, comme dans l'Exposé 1, $k(x_0)$ le plus petit des entiers $k \geq 1$ tels que $(J_g(x_0))^k = 1$ pour tout $g \in G(x_0)$. Si x est assez voisin de x_0 , l'entier $k(x)$ divise $k(x_0)$; en effet, $G(x)$ est un sous-groupe de $G(x_0)$ pour x assez voisin de x_0 ; de plus, on va montrer que $J_g(x) = J_g(x_0)$ si $g \in G(x)$, ce qui entraînera $(J_g(x))^k(x_0) = 1$, et prouvera bien que $k(x)$ divise $k(x_0)$. Pour voir cela, on fait un choix des coordonnées locales au voisinage de x_0 , tel que $G(x_0)$ opère linéairement (ce qui est possible d'après l'Exposé 12, Lemme 1); le changement de coordonnées locales ne change pas le jacobien $J_g(x)$ si $g \in G(x)$. Mais puisque g est linéaire, la valeur de son jacobien est la même en x_0 qu'en x . C.Q.F.D.

Nous aurons à utiliser les deux lemmes suivants, qui sont deux cas particuliers du Théorème 5 de l'Exposé 1:

Lemme 1. Soient x_0 et x_1 deux points non congrus modulo G . Pour tout entier m assez grand et multiple de $k(x_0)$ et de $k(x_1)$, il existe une $f \in L_m$ telle que $f(x_0) = 1$, $f(x_1) = 0$.

Lemme 2. Soit $x_0 \in X$, et soit d un entier ≥ 0 . Il existe un entier $m(d, x_0)$ jouissant de la propriété suivante: pour tout entier m , multiple de $k(x_0)$ et $\geq m(d, x_0)$, et pour toute h holomorphe au voisinage de x_0 et satisfaisant à

$$(2) \quad h(g \cdot x)(J_g(x))^m = h(x) \text{ quel que soit } g \in G(x_0),$$

il existe une $f \in L_m$ telle que la différence $f - h$ soit d'ordre $> d$ au point x_0 .

§3. Le théorème d'immersion

L'espace-quotient $Y = X/G$ sera désormais supposé compact. On notera k le p.p.c.m. des entiers $k(x_0)$ attachés à tous les points, $x_0 \in X$.

Soit A l'anneau gradué engendré par les espaces vectoriels L_m ($m \geq 2$), et soit A_m l'espace vectoriel des éléments de degré m de A . Les éléments de A_m sont des formes automorphes de poids m . Or l'espace D_m des formes automorphes de poids m est de dimension finie, puisque Y est compact (cf. Exposé 2, Th. 3). Ainsi A_m est un espace vectoriel de dimension finie, dimension qu'on notera a_m .

On se propose de prouver le théorème suivant:

Théorème. Pour tout entier m assez grand et multiple de k , les propriétés suivantes ont lieu:

(i) pour tout $x \in X$ existe une $f \in A_m$ telle que $f(x) \neq 0$.

(N.B: cette condition entraîne ce qui suit: le choix d'une base de l'espace vectoriel A_m définit une application analytique de X dans l'espace projectif P_{a_m-1} . D'ailleurs, eu égard aux propriétés des formes automorphes de poids m , cette application passe au quotient suivant G , et définit donc une application analytique $F_m: Y \rightarrow P_{a_m-1}$).

(ii) l'application F_m définie ci-dessus est un isomorphisme de l'espace analytique normal Y sur un sous-ensemble algébrique de P_{a_m-1} , normal en chacun de ses points.

Toute la fin de cet exposé est consacrée à la démonstration de ce théorème. On va d'abord prouver (i) sous une forme renforcée:

Proposition 1. Il existe un recouvrement ouvert fini $\mathcal{R}$ de Y , jouissant de la propriété suivante: pour tout multiple m de k , assez grand, et tout ensemble V du recouvrement $\mathcal{R}$, il existe une $f \in A_m$ qui ne s'annule en aucun point de l'image réciproque $p^{-1}(V)$.

Démonstration: appliquons le Lemme 1. Pour chaque point $x \in X$ il existe $h \in L_m$ telle que $h(x) = 1$, tout au moins si m est un multiple de $k(x)$ plus grand qu'un entier convenable (dépendant a priori du point x). Ceci vaut donc pour tout multiple m de k , plus grand qu'un entier dépendant du point x . A chaque x associons deux multiples consécutifs de k , soient $m'(x)$ et $m''(x) = m'(x) + k$; et soient $h'_x \in L_{m'}(x)$ et $h''_x \in L_{m''}(x)$ telles que $h'_x(x) = h''_x(x) = 1$. Alors h'_x et h''_x sont $\neq 0$ dans un voisinage ouvert de x , et aussi dans tous ses transformés par le groupe G . D'où, dans l'espace-quotient Y , un ouvert $V(x)$ tel que son image réciproque dans X contienne x , et que h'_x et h''_x soient $\neq 0$ dans cette image réciproque. Puisque Y est compact, il existe une famille finie de points $x_i \in X$ tels que les ouverts $V(x_i)$ recouvrent Y . Je dis que ces ouverts $V(x_i)$ constituent un recouvrement jouissant de la propriété de l'énoncé.

En effet, soit m un multiple de k , au moins égal à tous les produits $m'(x_i)(1 + m'(x_i)/k)$. Pour chaque i , il existe des entiers positifs a'_i et a''_i tels que $m = a'_i m'(x_i) + a''_i m''(x_i)$ (vérification élémentaire: c'est une question de division euclidienne). Pour chaque i , la fonction

$$(h'_{x_i})^{a'_i} (h''_{x_i})^{a''_i}$$

appartient à A_m , et elle est $\neq 0$ en tout point de l'image réciproque $p^{-1}(V(x_i))$. Ceci démontre la Proposition 1.

§4. Démonstration du théorème d'immersion (Suite).

On va maintenant prouver:

Proposition 2. Il existe un recouvrement ouvert fini $\mathcal{R}'$ de Y , plus fin que $\mathcal{R}$ (cf. Prop. 1), et jouissant de la propriété suivante: pour tout multiple m de k , assez grand, l'application $Y \rightarrow P_{a_m-1}$, définie par le choix d'une base de A_m , définit, dans chaque ouvert $V \in \mathcal{R}'$, un isomorphisme de V sur un sous-ensemble analytique normal d'un ouvert de P_{a_m-1} .

Démonstration: plaçons-nous en un point $x_0 \in X$, et choisissons des coordonnées locales telles que le groupe d'isotropie $G(x_0)$ soit linéaire. Soit (Q_i) , $1 \leq i \leq p$, un système fini de polynômes homogènes invariants par $G(x_0)$, et engendrant l'anneau de tous les polynômes $G(x_0)$ -invariants. Soit d_i le degré de Q_i . Choisissons, pour un multiple m assez grand de k , une $g \in L_m$ qui soit égale à un au point x_0 (cf. Lemme 1). Si m a été choisi assez grand, on peut, d'après le Lemme 2, choisir pour chaque produit gQ_i une $f_i \in L_m$ telle que $f_i - gQ_i$ soit d'ordre $> d_i$ au point x_0 . Alors $(f_i/g) - Q_i$ est d'ordre $> d_i$ au point x_0 ; par suite, d'après le Théorème 5 de l'Exposé 12 rappelé au début du présent exposé, l'application $x \rightarrow (f_i(x)/g(x))$ définit, par passage au quotient suivant le groupe G , un isomorphisme d'un voisinage ouvert V de $p(x_0) \in Y$, sur un sous-ensemble analytique normal d'un voisinage ouvert de l'origine de $\mathbb{C}^p$.

Ceci peut être fait pour chaque point $x_0 \in X$. En vertu de la compacité de Y , on peut trouver un recouvrement ouvert fini $\mathcal{R}'$ de Y (qu'on peut choisir plus fin que le recouvrement $\mathcal{R}$ de la Prop. 1), jouissant de la propriété suivante: pour chaque ouvert $V \in \mathcal{R}'$, il existe un entier $m(V)$, multiple de k , et un système fini $(g, f_1, f_2, \dots)$ de fonctions de $L_{m(V)}$, avec $g \neq 0$ en tout point de $p^{-1}(V)$, de manière que les fonctions $f_1/g, f_2/g, \dots$ définissent un plongement normal de V dans un ouvert d'un espace numérique. Soit maintenant m un multiple de k assez grand pour qu'on puisse appliquer la Proposition 1 à tous les entiers $m - m(V)$. Alors, pour chaque $V \in \mathcal{R}'$, il existe un $f \in A_{m-m(V)}$ qui soit $\neq 0$ en tout point de $p^{-1}(V)$. La suite

$(fg, ff_1, ff_2, \dots)$ est une suite finie d'éléments de A_m , dont la premier est $\neq 0$ dans V , et dont les quotients définissent un plongement normal de V dans un ouvert d'un espace numérique. A fortiori, le choix d'une base de A_m définit un plongement normal de V dans un ouvert de l'espace projectif P_{a_m-1} , ce qui prouve la Proposition 2.

§5. Démonstration du théorème d'immersion (Fin).

Pour achever de prouver le Théorème, il reste à montrer que, pour tout entier m multiple de k et assez grand, l'application $F_m: Y \rightarrow P_{a_m-1}$ (définie par le choix d'une base de A_m) sépare les points de Y . En effet, s'il en est ainsi, F_m est une application continue biunivoque de l'espace compact Y dans l'espace compact P_{a_m-1} , donc est un homéomorphisme de Y sur l'image (fermée) de F_m ; au voisinage de chacun de ses points, cette image est un sous-ensemble analytique (d'après la Prop. 2). Donc, d'après le théorème de CHOW (cf. Exposé 14, Prop. 6), c'est un sous-ensemble algébrique. Enfin, d'après la Proposition 2, ce sous-ensemble algébrique est normal en chacun de ses points.

On sait déjà que l'application F_m , pour m multiple de k assez grand, sépare les points dans chacun des ouverts V du recouvrement $\mathcal{R}'$ (Prop. 2). Soit W l'ensemble des couples $(y', y'') \in Y \times Y$ tels qu'il existe un $V \in \mathcal{R}'$ avec $y' \in V$, $y'' \in V$; W est un voisinage ouvert de la "diagonale" de $Y \times Y$. Soit K le complémentaire de W , qui est compact. Il suffit de prouver que, pour tout m , multiple assez grand de k , la propriété suivante a lieu: pour tout couple $(x', x'') \in X \times X$ dont l'image par p est dans K , il existe une $f \in A_m$ telle que $f(x') = 0$ et $f(x'') \neq 0$. C'est ce qu'on va montrer maintenant.

Soit $(x', x'') \in X \times X$ dont l'image est dans K . Les points x' et x'' ne sont pas congrus modulo G ; donc, d'après le Lemme 1, il existe $h \in L_m$ telle que $h(x') = 0$ et $h(x'') = 1$; du moins, ceci est vrai si m , multiple de k , a été choisi assez grand. De même, il existe $\tilde{h} \in L_m$ telle que $\tilde{h}(x') = 1$ et $\tilde{h}(x'') = 0$. Alors il existe un voisinage ouvert

U' de $y' = p(x')$ et un voisinage ouvert U'' de $y'' = p(x'')$, tels que le quotient $h/\tilde{h}$ soit de valeur absolue < 1 dans U' , et > 1 dans U'' . Recouvrons le compact K avec une suite finie de tels produits $U'_i \times U''_i$: pour chaque i on aura un entier m_i (multiple de k), et des éléments h_i et $\tilde{h}_i \in L_{m_i}$ tels que $|h_i/\tilde{h}_i| < 1$ dans U'_i , $|h_i/\tilde{h}_i| > 1$ dans U''_i .

Soit maintenant m un multiple de k assez grand pour qu'on puisse appliquer la partie (i) de l'énoncé à chacun des entiers $m - m_i$. Soit $(y', y'') \in K$, et soit i tel que $y' \in U'_i$ et $y'' \in U''_i$. Choisissons x' et x'' tels que $p(x') = y'$ et $p(x'') = y''$. Il existe une constante c ($|c| < 1$) telle que $h_i - c\tilde{h}_i$ soit nulle au point x' ; alors $h_i - c\tilde{h}_i$ est $\neq 0$ au point x'' . D'après la partie (i) de l'énoncé, il existe une $f \in A_{m-m_i}$ non nulle au point x'' . Alors le produit $(h_i - c\tilde{h}_i)f \in A_m$ est nul au point x' , et non nul au point x'' . Ceci achève la démonstration.