J. Dixmier

Homologie et cohomologie singulières

Séminaire Henri Cartan, tome 1 (1948-1949), exp. nº 5, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1948-1949__1__A5_0>

HOMOLOGIE ET COHOMOLOGIE SINGULIÈRES.

(Exposé fait par DIXMIER, le 20.12.1948,
complété par H. CARTAN).

<u>Changement de notation</u> : dans un complexe simplicial K où l'on considère un sous-complexe L , le groupe des chaînes relatives $C(K/L)$ (exposé 2, paragraphe 6) sera désormais noté $C(K \bmod L)$ pour éviter des confusions ; le groupe d'homologie correspondant sera noté $H(K \bmod L)$. De même pour les cochaînes et la cohomologie relatives (exposé 4, paragraphe 5) : on écrira $C^*(K \bmod L)$ et $H^*(K \bmod L)$.

1.- <u>Chaînes singulières</u>, <u>homologie singulière</u>.

Rappelons (exposé 1, paragraphe 1) qu'un simplexe euclidien de dim. p a été canoniquement identifié à un sous-espace d'un cube de dim. $p+1$, à savoir le sous-espace des systèmes de nombres réels $(\lambda_0,\dots,\lambda_p)$ tels que $\lambda_i \geqslant 0$, $\sum_i \lambda_i = 1$; c'est un espace topologique muni également d'une structure linéaire-affine. Un tel simplexe est "ordonné" par la relation d'ordre des indices $0,\dots,p$ des variables $\lambda_0,\dots,\lambda_p$.

Soit alors E un espace topologique quelconque.

Un <u>simplexe singulier</u> (ou "simplexe continu") de dimension p de l'espace E est, par définition, une application <u>continue</u> (non nécessairement biunivoque) d'un simplexe euclidien ordonné, de dimension p , dans l'espace E . C'est donc une fonction continue x , à valeurs dans E , de $p+1$ variables $\lambda_i \geqslant 0$ telles que $\sum_i \lambda_i = 1$. L'égalité de deux simplexes singuliers de même dimension se définit par l'identité des fonctions. Un simplexe singulier de dimension 0 s'identifie à un <u>point</u> de l'espace E . On appelle <u>support</u> d'un simplexe singulier x l'ensemble des valeurs de la fonction $x(\lambda_0,\dots,\lambda_p)$: c'est un sous-ensemble <u>compact</u> de E .

Soit x un simplexe singulier de dimension $p \geqslant 1$, et i un entier tel que $0 \leqslant i \leqslant p$. La restriction de la fonction $x(\lambda_0,\dots,\lambda_p)$ aux systèmes (λ_j) tels que $\lambda_i = 0$ est une fonction des p variables $\lambda_0,\dots,\hat{\lambda}_i,\dots,\lambda_p$ prises dans cet ordre ; c'est donc un simplexe singulier de dim. $p-1$, que nous noterons x^i . Le support de x^i est contenu dans le support de x .

Soit, pour chaque entier $p \geqslant 0$, $S_p(E)$ le groupe <u>libre</u> ayant pour base l'ensemble des simplexes singuliers de dim. p de l'espace E ; les éléments de $S_p(E)$ s'appellent chaînes singulières (de dim. p) de l'espace E ; ce sont les combinaisons linéaires finies, à coefficients entiers, de simplexes singuliers (de dim. p) de E . Le groupe S(E) , somme directe des $S_p(E)$, est un groupe gradué. On y définit un opérateur de dérivation ∂ , appelé bord, de la manière suivante : si x est un simplexe singulier de dim. 0 (point de E), on pose $\partial x = 0$; si x est un simplexe singulier de dim. $p \geqslant 1$, on pose $\partial x = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i x^i$. L'endomorphisme ∂ est de degré -1 , et il satisfait bien a $\partial\partial = 0$.

Le support d'une chaîne singulière est, par définition, la réunion des supports de ceux de ses simplexes dont le coefficient n'est pas nul. C'est un ensemble compact. Si x est une chaîne singulière, le support de ∂x est contenu dans le support de x .

Muni de sa graduation et de l'endomorphisme ∂ , le groupe S(E) est un groupe gradué à dérivation, auquel on peut appliquer les notions de l'exposé 2 (paragraphe 4). On obtient ainsi le groupe d'homologie singulière de l'espace E , noté H(E) . C'est un groupe gradué ; le groupe d'homologie singulière pour la dimension p se note $H_p(E)$.

Interprétation de $H_o(E)$: c'est le quotient du groupe libre ayant pour base l'ensemble des points de E , par le sous-groupe des bords des simplexes singuliers de dimension 1 . Or appelons composante connexe d'un point M de E l'ensemble des points P de E qui peuvent être joints à M par un "arc", c'est-à-dire tels qu'il existe un simplexe singulier de dim. 1 dont le bord soit la différence entre le point P et le point M . L'ensemble des composantes connexes des points de E constitue une partition de E , et le groupe d'homologie $H_o(E)$, pour la dimension 0 , s'identifie au groupe libre ayant pour base l'ensemble des composantes connexes de E . Ainsi l'homologie pour la dimension 0 est liée aux propriétés de connexion (par arcs) de l'espace E .

Soit K un complexe simplicial localement fini, et $\widetilde{K}$ l'espace topologique (localement compact) qu'il définit (exposé 1). On définira plus tard un isomorphisme (canonique) de H(K) (groupe d'homologie simpliciale du complexe K) sur $H(\widetilde{K})$ (groupe d'homologie singulière de l'espace $\widetilde{K}$). Il en résultera que H(K) est un invariant topologique de l'espace $\widetilde{K}$.

2.- Cochaînes singulières, cohomologie singulière.

Soit γ un groupe abélien donné une fois pour toutes (cf. exposé 4).

Le groupe $\mathrm{Hom}(S(E),\gamma)$ sera noté $S^*(E,\gamma)$, ou simplement $S^*(E)$ si aucune ambigüité n'est à craindre. On l'appelle le groupe des <u>cochaînes singulières</u> de l'espace E (à valeurs dans γ). Il s'identifie au groupe des fonctions de simplexes singuliers, à valeurs dans γ . D'après l'exposé 4, paragraphe 2, $S^*(E)$ est un groupe gradué à dérivation ; l'opérateur de dérivation δ , transposé de ∂ , s'appelle <u>cobord</u>. Une cochaîne de degré p (fonction f des simplexes singuliers de dimension p) a son cobord δf qui est une fonction des simplexes sing. de dim. $p+1$ donnée par la formule

$$\delta f(x) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i f(x^i) .$$

Le groupe dérivé de $S^*(E,\gamma)$ s'appelle <u>groupe de cohomologie singulière</u> de l'espace E (relativement à γ) et se note $H^*(E,\gamma)$; sa composante homogène de degré p se note $H^p(E,\gamma)$: groupe de cohomologie singulière de E pour la dimension p .

Les cochaînes de degré 0 s'identifient aux fonctions d'un point de E , à valeurs dans γ . Les cocycles de degré 0 sont les fonctions constantes sur chaque composante connexe de E . Tout cobord de degré 0 étant nul, le groupe de cohomologie pour la dimension 0 s'identifie au groupe des fonctions (à valeurs dans γ) constantes sur chaque composante connexe de E .

Si K est un complexe simplicial localement fini, on définira plus tard un isomorphisme canonique $H^*(\tilde{K}) \to H^*(K)$ du groupe de cohomologie singulière de l'espace $\tilde{K}$ sur le groupe de cohomologie simpliciale du complexe K .

Ce qui a été dit (exposé 4, paragraphe 4) sur l'<u>accouplement</u> entre homologie et cohomologie vaut pour l'homologie et la cohomologie singulières.

3.- <u>Structure multiplicative</u>.

Comme pour les cochaînes d'un complexe simplicial (exposé 4, paragraphe 8), on peut définir dans l'ensemble des <u>cochaînes</u> une multiplication, lorsque γ est un anneau. Il suffit de définir le produit d'une cochaîne singulière de degré p et d'une cochaîne singulière de degré q , qui sera une cochaîne singulière de degré $p+q$. Pour cela, associons à chaque simplexe singulier x de dimension $p+q$, le simplexe singulier x' , de dim. p , obtenu par restriction de la fonction $x(\lambda_0,\dots,\lambda_{p+q})$ aux systèmes (λ_i) tels que $\lambda_i = 0$ pour $i > p$; et le simplexe singulier x'' , de dim. q , obtenu par restriction de la fonction x aux systèmes (λ_i) tels que $\lambda_i = 0$ pour $i < p$. Cela étant, si f est une cochaîne de degré p et g une cochaîne de degré q , leur produit sera la cochaîne h , fonction des simplexes sing. de dim. p+q , définie par

$$h(x) = f(x')\, g(x'') ,$$

le produit du second membre s'entendant au sens de la multiplication dans l'anneau γ .

Tout ce qui a été dit (exposé 4, paragraphe 8) peut se répéter ici : $S^*(E,\gamma)$ devient un <u>anneau gradué à dérivation</u>, qui satisfait notamment à

$$\delta(fg) = (\delta f)g + \bar{f}(\delta g)$$ (notations de l'exposé 4, paragraphe 8).

Donc $H^*(E,\gamma)$ est muni d'une structure d'<u>anneau</u> gradué : <u>anneau de cohomologie singulière</u> de l'espace E , relativement à l'anneau γ .

On verra que si K est un complexe simplicial localement fini, l'isomorphisme $H^*(\tilde{K}) \to H^*(K)$ est aussi un isomorphisme pour la structure multiplicative.

4. <u>Effet d'une application continue</u>.

Soient E et E' deux espaces topologiques, φ une application continue de E dans E' . Si x est un simplexe singulier de l'espace E , l'application composée $\varphi \circ x$ est un simplexe singulier de l'espace E' . L'application $x \to \varphi \circ x$ de l'ensemble des simplexes singuliers de E dans l'ensemble des simplexes singuliers de E' définit, par linéarité, un homomorphisme f de S(E) dans S(E') . C'est un homom. <u>permis</u>, car $\varphi \circ (x^i) = (\varphi \circ x)^i$. On en déduit un homom. $\bar{f}$ du groupe d'homologie singulière H(E) dans le groupe d'homologie singulière H(E') . Propriété évidente de <u>transitivité</u>, dans le cas de 3 espaces E , E' , E" , d'une application continue φ de E dans E' , d'une applic. continue ψ de E' dans E" , et de l'application composée $\psi \circ \varphi$ de E dans E" .

L'homomorphisme transposé f^* de $S^*(E')$ dans $S^*(E)$ est un homom. permis, et c'est un homom. d'anneau. Il définit un homom. $\bar{f}^*$ de l'anneau de cohomologie singulière $H^*(E')$ dans l'anneau de cohomologie singulière $H^*(E)$. On a le diagramme de compatibilité relatif à l'accouplement

$$\begin{array}{ccc} H(E) & \longrightarrow & H(E') \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ H^*(E) & \longleftarrow & H^*(E') \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \gamma & & \gamma \end{array}$$

5.- Homologie et cohomologie relatives.

Soit F un <u>sous-espace</u> de l'espace topologique E ; F pourra notamment être fermé, ou ouvert. Le groupe des chaînes singulières $S(F)$ s'identifie à un sous-groupe (permis) de $S(E)$: le sous-groupe des chaînes sing. de E dont le support est contenu dans F. Le groupe quotient $S(E)/S(F)$ se notera $S(E \bmod F)$ et s'appellera le groupe des <u>chaînes singulières de</u> E <u>modulo</u> F. C'est un groupe gradué à dérivation. Son groupe dérivé se notera $H(E \bmod F)$ et s'appellera groupe d'<u>homologie singulière de</u> E <u>modulo</u> F.

Le groupe $\mathrm{Hom}(S(E \bmod F),\gamma)$, noté $S^*(E \bmod F,\gamma)$, s'identifie à un sous-groupe permis de $S^*(E,\gamma)$: le sous-groupe des cochaînes singulières de E qui s'annulent sur les simplexes singuliers dont le support est contenu dans F. En outre, puisque $S(F)$ est facteur direct de $S(E)$, on peut identifier $S^*(F,\gamma)$ au quotient de $S^*(E,\gamma)$ par $S^*(E \bmod F,\gamma)$. On aura donc (cf. exposé 2, paragraphe 7, et exposé 4, paragraphe 5) les deux suites exactes suivantes

$$\begin{array}{ccccccccc}
\dots \to & H_p(F) & \to & H_p(E) & \to & H_p(E \bmod F) & \to & H_{p-1}(F) & \to \dots \\
& \| & & \| & & \| & & \| & \\
\dots \leftarrow & H^p(F) & \leftarrow & H^p(E) & \leftarrow & H^p(E \bmod F) & \leftarrow & H^{p-1}(F) & \leftarrow \dots \\
& \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & \\
& \gamma & & \gamma & & \gamma & & \gamma &
\end{array}$$

avec les compatibilités d'accouplement qu'indique ce diagramme.

En ce qui concerne les structures multiplicatives (si γ est un anneau), $S^*(E \bmod F)$ est un sous-anneau, et même un idéal de $S^*(E)$; $S^*(F)$ s'identifie à l'anneau quotient. Deux des trois homom. de la suite exacte des groupes de cohomologie sont des homomorphismes d'anneau.

> <u>Remarque</u>.- $H(E \bmod F)$ et $H^*(E \bmod F)$ ne sont pas, en général, des invariantes topologiques de l'espace différence $E-F$. Par exemple, envisageons le cas où F est le complémentaire d'un point M de E. Les groupes $H(E \bmod F)$ et $H^*(E \bmod F)$ expriment alors non des propriétés d'un espace réduit à un point M, mais des propriétés locales de l'espace ambiant E au voisinage du point M ; on les appelle parfois groupe d'homologie (resp. de cohomologie) de E au point M. Lorsque E est une variété de dimension n, on verra plus tard que $H_p(E \bmod F)$ est nul pour tout p, sauf pour $p = n$ (auquel cas il est isomorphe au groupe additif des entiers).

Si on a deux espaces E et E', et une application continue φ de E dans E', qui applique un sous-espace F de E <u>dans</u> un sous-espace F' de E', on en déduit des homomorphismes de $H(E)$ dans $H(E')$, $H(F)$ dans $H(F')$, et $H(E \bmod F)$ dans $H(E' \bmod F')$. Ces homom. donnent lieu au diagramme de compatibilités

$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots \to & H_p(F) & \to & H_p(E) & \to & H_p(E \bmod F) & \to & H_{p-1}(F) & \to \ldots \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\ldots \to & H_p(F') & \to & H_p(E') & \to & H_p(E' \bmod F') & \to & H_{p-1}(F') & \to \ldots
\end{array}$$

On a des homomorphismes analogues et un diagramme analogue pour les groupes (resp. anneaux) de cohomologie.

6.- Homologie et cohomologie singulières de deuxième espèce.

Supposons désormais que l'espace E soit localement compact. On va définir d'autres groupes d'homologie et de cohomologie, qui se réduiront aux précédents lorsque E est un espace compact.

Le groupe $S_p(E)$ était le groupe des combinaisons linéaires formelles, à coefficients entiers tous nuls sauf un nombre fini, de tous les simplexes singuliers (de dim. p) de l'espace E. C'est un sous-groupe du groupe $\mathcal{S}_p(E)$ que voici : une combinaison linéaire à coeff. entiers des simplexes singuliers (de dim. p) de E appartient à $\mathcal{S}_p(E)$ si, pour tout compact F de E, les coefficients des simplexes singuliers dont le support rencontre F sont nuls sauf un nombre fini. Le support d'une chaîne singulière de deuxième espèce (élément de $\mathcal{S}_p(E)$) est, par définition, la réunion des supports des simplexes singuliers dont le coefficient est $\neq 0$; c'est un ensemble fermé.

On prendra garde que $\mathcal{S}_p(E)$ n'est pas, en général, un groupe libre.

La somme directe $\mathcal{S}(E)$ des $\mathcal{S}_p(E)$ constitue le groupe des chaînes singulières de deuxième espèce de E ; l'opérateur bord y est défini de manière évidente, et fait de $\mathcal{S}(E)$ un groupe gradué à dérivation. Son groupe dérivé (qui est gradué) se notera $\mathcal{H}(E)$, et s'appellera le groupe d'homologie singulière de deuxième espèce de l'espace localement compact E .

$\mathcal{S}_p(E)$ s'identifie canoniquement à la limite projective ("inverse limit") des groupes $S_p(E \bmod U)$, où U parcourt l'ensemble des complémentaires de parties compactes de E .

Si $U_1 \supset U_2$, on a en effet un homomorphisme canonique φ_{12} de $S_p(E \bmod U_2)$ dans $S_p(E \bmod U_1)$; par définition, un élément de la limite projective des $S_p(E \bmod U_i)$ est un système d'éléments $\alpha_i \in S_p(E \bmod U_i)$ tels que, pour $U_i \supset U_j$, on ait $\varphi_{ji}(\alpha_j) = \alpha_i$.

De la même manière, si U_1 et U_2 sont des complémentaires de parties compactes, et si $U_1 \supset U_2$, $S^*(E \bmod U_1, \gamma)$ s'identifie à un sous-groupe de

$S^*(E \bmod U_2,\gamma)$. La "limite inductive" ("direct limit") de ces groupes se notera $\mathcal{S}^*(E,\gamma)$; les $S^*(E \bmod U_i,\gamma)$ s'identifient à des sous-groupes de $\mathcal{S}^*(E,\gamma)$, qui en est la réunion. D'ailleurs $\mathcal{S}^*(E,\gamma)$ s'identifie à un sous-groupe du groupe $S^*(E,\gamma)$ de toutes les cochaînes : une cochaîne f appartient à $\mathcal{S}^*(E,\gamma)$ s'il existe un compact F de E tel que F s'annule sur tout simplexe dont le support ne rencontre pas F .

$\mathcal{S}^*(E,\gamma)$ est muni d'une structure de groupe gradué à dérivation et même d'anneau gradué à dérivation, si γ est un anneau. Son groupe dérivé $\mathcal{H}^*(E,\gamma)$ s'appellera le groupe de cohomologie singulière de deuxième espèce de l'espace E (resp. l'anneau de cohom. sing. de deuxième espèce de E); on l'appelle aussi le groupe de cohomologie compacte de E ; on verra plus tard pourquoi.

On a un accouplement évident entre $\mathcal{S}(E)$ et $\mathcal{S}^*(E,\gamma)$, donc entre les groupes d'homologie et de cohomologie de deuxième espèce : $\mathcal{H}(E)$ et $\mathcal{H}^*(E,\gamma)$.

On verra que, si K est un complexe simplicial localement fini, $\mathcal{H}^*(\tilde{K},\gamma)$ est canoniquement isomorphe au groupe de cohomologie des "cochaînes finies" du complexe K (cf. exposé 4, paragraphe 7), ou groupe de cohomologie compacte de K ; l'isomorphisme est d'ailleurs un isomorphisme pour la structure d'anneaux. Quant au groupe $\mathcal{H}(\tilde{K})$, il est canoniquement isomorphe au groupe d'homologie que l'on obtiendrait à l'aide des "chaînes infinies" du complexe K ; le groupe d'homologie des chaînes infinies de K est donc un invariant topologique de l'espace localement compact $\tilde{K}$.

On verra aussi que si K est un complexe simplicial fini , et L un sous-complexe de K , le groupe d'homologie relative $H(K \bmod L)$ est canoniquement isomorphe au groupe d'homologie singulière de deuxième espèce de l'espace loc. compact $\tilde{K}-\tilde{L}$. De même, le groupe de cohomologie simpliciale $H^*(K \bmod L,\gamma)$ est canoniquement isomorphe au groupe de cohomologie compacte $\mathcal{H}^*(\tilde{K}-\tilde{L},\gamma)$. Ceci prouvera que $H(K \bmod L)$ et $H^*(K \bmod L)$ sont des invariants topologiques de l'espace localement compact $\tilde{K}-\tilde{L}$, lorsque K est un complexe fini et L un sous-complexe de K . Ceci permettra aussi de déterminer, par exemple, les groupes d'homologie singulière de deuxième espèce d'une boule ouverte de dimension n : ils sont nuls pour toute dimension p , sauf pour $p = n$.

Soient E et E' deux espaces localement compacts. Une application continue de E dans E' sera dite propre si l'image réciproque de toute partie compacte de E' est une partie compacte de E . Toute application continue propre de E dans E' définit un homomorphisme permis de $\mathcal{S}(E)$ dans $\mathcal{S}(E')$, d'où un homomorphisme de $\mathcal{H}(E)$ dans $\mathcal{H}(E')$. On obtient aussi un homomorphisme permis de $\mathcal{S}^*(E')$ dans $\mathcal{S}^*(E)$, d'où un homomorphisme de $\mathcal{H}^*(E')$ dans $\mathcal{H}^*(E)$.

Si F est un sous-espace fermé de E, le groupe $\mathcal{S}(F)$ s'identifie au sous-groupe (permis) de $\mathcal{S}(E)$ formé des éléments dont le support est contenu dans F (il n'en serait pas de même, en général, si F était ouvert dans E, tout au moins lorsque E est non compact). On en déduit des groupes d'homologie et de cohomologie relatifs de deuxième espèce : $\mathcal{H}(E \bmod F)$ et $\mathcal{H}^*(E \bmod F, \gamma)$, ainsi que des suites exactes d'homomorphismes, à la manière habituelle.