

SÉMINAIRE DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

OLAV ARNFINN LAUDAL

Sur la limite projective et la théorie de la dimension. II

Séminaire de topologie et géométrie différentielle, tome 3 (1960-1962), exp. n° 5, p. 15-23

<http://www.numdam.org/item?id=SE_1960-1962__3__A7_0>

© Séminaire de topologie et géométrie différentielle
(Secrétariat mathématique, Paris), 1960-1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire de topologie et géométrie différentielle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>).
Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Janvier 1962

SUR LA LIMITE PROJECTIVE
ET LA THEORIE DE LA DIMENSION. II

par OLAV ARNFINN LAUDAL

Introduction. Soit $\underline{C}$ une catégorie et considérons la catégorie des foncteurs sur $\underline{C}$ à valeurs dans Mod_L , notée $Hom(\underline{C}, Mod_L)$. Nous dirons que $dim \underline{C}$ est plus petit ou égal à n si, pour tout objet F dans $Hom(\underline{C}, Mod_L)$, $\varprojlim^{(q)} F = 0$ pour $q > n$. Il est clair que, par le Corollaire de la Proposition 2.1 de (1), $dim \underline{C}$ est égal à la dimension projective de l'objet L dans $Hom(\underline{C}, Mod_L)$.

Nous pouvons aussi démontrer que si C est un arbre alors $dim C \leq 1$. En effet, soit L_o l'objet $\mathbb{I}$ -projectif de $Hom(C, Mod_L)$ défini par la famille $\{\bar{L}_c^o\}_{c \in C}$ où $\bar{L}_c^o = L$ pour tout $c \in C$. Nous avons une surjection évidente $L_o \xrightarrow{j} L$. Il faut démontrer que $ker i$ est un objet projectif dans $Hom(C, Mod_L)$. Or soit pour tout $c \in C$, R_c l'ensemble des $c' > c$ minimaux. Posons $\bar{L}_c' = \coprod_{c' \in R_c} L_{c'}$ où $L_{c'} = L$ pour tout c' . Appliquons $\bar{L}_c^1$ dans $(ker i)_c$ par l'application $\bar{j}_c$ définie par: Soit $1_{c'} \in L_{c'} \subset \bar{L}_c^1$ alors $\bar{j}_c(1_{c'}) = (1_{c'}, -1_{c'}) \in \bar{L}_c^o \oplus \bar{L}_c^o$. Soit L_1 l'objet $\mathbb{I}$ -projectif défini par la famille $\{\bar{L}_c^1\}_{c \in C}$. Il existe alors une application $L_1 \xrightarrow{j} ker i$. Il faut voir que j est un isomorphisme. Pour cela il suffit de remarquer que C étant un arbre les éléments de $(ker i)_{c_o}$ de la forme $(1_{c'}, -1_{c'}) \in \bar{L}_c^o \oplus \bar{L}_c^o$, $c' \in R_c$, $c > c_o$ forment une base de $(ker i)_{c_o}$.

En particulier nous avons $dim \mathbf{Z}^+ = 1$.

Nous allons supposer dès maintenant que $\underline{C}$ est un ensemble ordonné Γ . Un objet F dans $Hom(\Gamma, Mod_L)$ se note $\{F_\gamma, \eta_\gamma^{\gamma'}\}_{\gamma \in \Gamma}$ où $\eta_\gamma^{\gamma'} = F(\gamma < \gamma')$. Nous dirons qu'un tel système projectif F est de type fini, fini, etc. si chacun des F_γ a ces propriétés et nous dirons que F est surjectif si pour tout $\gamma < \gamma'$ l'application $\eta_\gamma^{\gamma'}$ est un homomorphisme surjectif.

Soit Γ' un sous-ensemble de Γ . Considérons l'application canonique $\Delta_{\Gamma'}^\Gamma: \varprojlim_{\Gamma'} F \rightarrow \varprojlim_{\Gamma} F$. Nous dirons alors que F est flasque si pour tout choix de $\Gamma' \subset \Gamma$ l'application $\Delta_{\Gamma'}^\Gamma$ est surjective.

Il est facile de construire des systèmes projectifs qui sont surjectifs mais non flasques. Cependant, si $\Gamma = \mathbf{Z}^+$ tout système projectif surjectif est flasque, et il n'existe essentiellement qu'un seul ensemble ordonné avec cette propriété, comme l'a montré Henkin (3).

1. La condition de Mittag-Leffler.

Soit Γ un ensemble ordonné filtrant à droite par $<$.

DEFINITION 1 : Nous dirons que le système projectif $\{F_\gamma, \eta_\gamma^{\gamma'}\}_{\gamma \in \Gamma}$ est essentiellement nul si, pour tout $\gamma \in \Gamma$ il existe un $\gamma' > \gamma$ tel que $\eta_\gamma^{\gamma'}$ est nul.

DEFINITION 2 : Soit $\{F_\gamma, \eta_\gamma^{\gamma'}\}_{\gamma \in \Gamma}$ un système projectif. Nous dirons alors que F vérifie la condition de Mittag-Leffler¹⁾ si, pour tout $\gamma \in \Gamma$, il existe un $\gamma' > \gamma$ tel que pour tout $\gamma'' > \gamma'$ nous avons :

$$\text{im } \eta_\gamma^{\gamma''} = \text{im } \eta_\gamma^{\gamma'}$$

DEFINITION 3 : Deux systèmes projectifs $\{F_\gamma, \eta_\gamma^{\gamma'}\}_{\gamma \in \Gamma}$ et $\{G_\lambda, \rho_\lambda^{\lambda'}\}_{\lambda \in \Lambda}$ seront dits isomorphes s'il existe une application croissante biunivoque $\pi: \Gamma \rightarrow \Lambda$ telle que : $F_\gamma = G_{\pi(\gamma)}$, $\eta_\gamma^{\gamma'} = \rho_{\pi(\lambda)}^{\pi(\lambda')}$ pour tout couple $\gamma < \gamma'$ de Γ .

DEFINITION 4 : Soient $\{F_\gamma, \eta_\gamma^{\gamma'}\}_{\gamma \in \Gamma}$ et $\{G_\lambda, \rho_\lambda^{\lambda'}\}_{\lambda \in \Lambda}$ deux systèmes projectifs. Nous dirons que F et G sont équivalents si existent un système projectif $\{H_i, \mu_i^{i'}\}_{i \in I}$ et deux sous-ensembles cofinals I_1, I_2 de I tels que $\{H_i, \mu_i^{i'}\}_{i \in I_1}$ est isomorphe à F et $\{H_i, \mu_i^{i'}\}_{i \in I_2}$ est isomorphe à G .

Par le corollaire de la Proposition 4.3 de (1) nous savons que si F et G sont équivalents alors il existe un isomorphisme :

$$\lim_{\leftarrow \Gamma}^{(n)} K \circ F \simeq \lim_{\leftarrow \Lambda}^{(n)} K \circ G$$

pour tout foncteur K sur Mod_L à valeurs dans Mod_L .

PROPOSITION : Le système projectif F satisfait à la condition de Mittag-Leffler si, et seulement si, il est équivalent à un système projectif surjectif.

DEMONSTRATION : Si F est équivalent à un système surjectif alors F vérifie trivialement la condition de Mittag-Leffler.

Soit f une fonction croissante $\Gamma \rightarrow \Gamma$ telle que pour tout $\gamma' > f(\gamma)$, $\text{im } \eta_\gamma^{\gamma'} = \text{im } \eta_\gamma^{f(\gamma)}$. Une telle fonction existe par l'hypothèse. Soit H le système projectif défini par :

1) Nous avons dans (2) utilisé le mot "stable" pour cette propriété.

$$\Pi = \{ (\gamma, \gamma') \mid \gamma < \gamma' \} \subset \Gamma \times \Gamma$$

$$H(\gamma, \gamma') = \text{im } \eta_{\gamma}^{\gamma'} \text{ pour } (\gamma, \gamma') \in \Pi.$$

Si $(\bar{\gamma}, \bar{\gamma}') > (\gamma, \gamma')$ c'est-à-dire si $\bar{\gamma} > \gamma, \bar{\gamma}' > \gamma'$ alors $\mu_{\gamma, \gamma'}^{(\bar{\gamma}, \bar{\gamma}')} = \eta_{\gamma}^{\bar{\gamma}}$ restriction à $\text{im } \eta_{\gamma}^{\gamma'}$

Soient :

$$\Delta = \{ (\gamma, \gamma) \mid \gamma \in \Gamma \} \subset \Pi$$

$$\Delta_f = \{ (\gamma, f(\gamma)) \mid \gamma \in \Gamma \} \subset \Pi$$

alors il est facile de vérifier que $\{ H(\gamma, \gamma'), \mu_{\gamma, \gamma'}^{(\bar{\gamma}, \bar{\gamma}')} \}_{(\gamma, \gamma') \in \Delta}$ est isomorphe à F et que $\{ H(\gamma, \gamma'), \mu_{\gamma, \gamma'}^{(\bar{\gamma}, \bar{\gamma}')} \}_{(\gamma, \gamma') \in \Delta_f}$ est surjectif.

Q. E. D.

REMARQUE : De la même manière on voit que F est essentiellement nul si, et seulement si, F est équivalent à un système nul.

Si pour tout γ il existe un $\gamma' > \gamma$ tel que $\text{im } \eta_{\gamma}^{\gamma'}$ est de type fini, fini etc. alors F est équivalent à un système de type fini, fini etc.

Pour $\Gamma = \mathbf{Z}^+$ tout système surjectif est flasque donc si F vérifie la condition de Mittag-Leffler nous avons $\lim_{\leftarrow}^{(q)} F = 0$ pour tout $q \geq 1$. Puisque $\dim \mathbf{Z}^+ = 1$ il revient au même de dire que $\lim_{\leftarrow}^{(1)} F = 0$.

Nous nous proposons de trouver des conditions pour que la réciproque soit vraie. Ce n'est pas vrai, en général, comme le montre l'exemple suivant.

Soit M un module complet, séparé, c'est-à-dire un module contenant une famille $\{M_n\}_{n \in \mathbf{Z}^+}$ de sous-modules telle que $M_n \supset M_{n+1}$, $\bigcap_{n \geq 0} M_n = 0$, $M_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbf{Z}^+$ et telle que : $M \simeq \lim_{\leftarrow} M / M_n$, alors le système projectif $\{M_n, id\}_{n \in \mathbf{Z}^+}$ ne satisfait pas à la condition de Mittag-Leffler.

Pourtant nous pouvons considérer la suite exacte

$$0 \rightarrow M_n \rightarrow M \rightarrow M / M_n \rightarrow 0$$

comme une suite exacte de systèmes projectifs. Donc il vient une suite exacte :

$$0 \rightarrow \lim_{\leftarrow} M_n \rightarrow \lim_{\leftarrow} M \rightarrow \lim_{\leftarrow} M / M_n \rightarrow \lim_{\leftarrow}^{(1)} M_n \rightarrow 0$$

$$\text{Or } \lim_{\leftarrow} M = M \simeq \lim_{\leftarrow} M / M_n \text{ donc } \lim_{\leftarrow} M_n = 0 \text{ et } \lim_{\leftarrow}^{(1)} M_n = 0$$

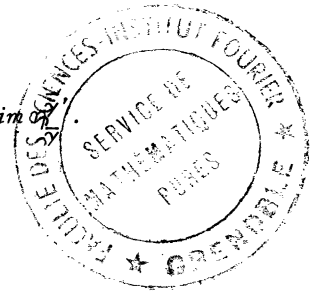
Nous allons voir que cet exemple est typique.

THEOREME 1 : Soit $\{F_n, \eta_n^{n'}\}_{n \in \mathbf{Z}^+}$ un système projectif tel que :

1) $\lim_{\leftarrow}^{(q)} F = 0$ pour $q = 0, 1$.

2) il existe un n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ F_n n'est pas complet séparé.

Dans ce cas F est essentiellement nul.



COROLLAIRE 1 : Soit $\{F_n, \eta_n^{n'}\}_{n \in \mathbf{Z}^+}$ un système projectif tel que :

1) $\varprojlim^{(1)} F = 0$.

2) Soit $\pi_n : \varprojlim F \rightarrow F_n$ l'application canonique, alors il existe un n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ $F_n / \text{im } \pi_n$ n'est pas complet séparé.

Dans ce cas F vérifie la condition de Mittag-Leffler.

COROLLAIRE 2 : Soit F un système projectif surjectif tel que $\varprojlim F$ n'est pas complet séparé alors il existe un n_0 tel que le système $\{F_n, \eta_n^{n'}\}_{n \geq n_0}$ est constant.

COROLLAIRE 3 : Soit F un système projectif tel que :

1) $\varprojlim^{(1)} F = 0$.

2) il existe un n_0 tel que $F_n / \text{im } \pi_n$ n'est pas complet séparé pour aucun $n \geq n_0$.

3) $\varprojlim F$ n'est pas complet séparé.

Dans ce cas il existe pour tout n des $n_2 \geq n_1 \geq n$ tels que l'application $\pi_{n_1} : \varprojlim F \rightarrow \text{im } \eta_{n_1}^{n_2}$ est un isomorphisme.

DEMONSTRATION DU THEOREME 1. Soit H le système projectif défini par :

$$\Pi = \mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+.$$

$$H_{(m, n)} = \text{im } \eta_{\min(m, n)}^{\max(m, n)}.$$

$$\mu_{(m, n)}^{(m', n')} = \text{restriction de } \eta_{\min(m, n)}^{\min(m', n')} \text{ à } H_{(m', n')}.$$

Puisque la diagonale $\Delta \subset \mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+$ est cofinale dans Π et puisque $H_{(n, n)} = F_n$ nous avons : $\varprojlim^{(n)} F \simeq \varprojlim^{(n)} H$ pour tout $n \geq 0$. D'autre part nous avons :

$$\varprojlim_{\Pi} H = \varprojlim_m \varprojlim_n H_{(n, m)}$$

Considérons la suite spectrale du Corollaire 3. du Th. II de (1), donnée par :

$$E_2^{p, q} = \varprojlim_m^{(p)} \varprojlim_n^{(q)} H_{(n, m)}$$

Parce que $\dim \mathbf{Z}^+ = 1$ nous avons $E_2^{p, q} = 0$ si $p > 1$ ou bien $q > 1$. Or, $\{\varprojlim_n H_{(n, m)}\}_{m \in \mathbf{Z}^+}$ étant un système projectif surjectif est flasque, donc $E_2^{1, 0} = 0$.

Il vient alors :

$$\varprojlim_{\Pi}^{(1)} H = \varprojlim_m \varprojlim_n^{(1)} H_{(n, m)}$$

Nous allons montrer que le système projectif $\{\varprojlim_n^{(1)} H_{(n, m)}\}_{m \in \mathbf{Z}^+}$ est surjectif.

Pour m fixé, la suite exacte

$$0 \rightarrow H_{(n, m)} \rightarrow F_m \rightarrow F_m / H_{(n, m)} \rightarrow 0$$

peut être considéré comme une suite exacte de systèmes projectifs sur $\{n | n \in \mathbb{Z}^+, n \geq m\}$.

Il en résulte la suite exacte :

$$(i) \quad 0 \rightarrow \varprojlim_n H(n, m) \rightarrow F_m \rightarrow \varprojlim_n F_m / H(n, m) \rightarrow \varprojlim_n^{(1)} H(n, m) \rightarrow 0$$

Pour $m' > m$ considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \partial' & & \\ & & & & \downarrow & & \\ & \rightarrow & F_{m'} & \rightarrow & \varprojlim_n F_{m'} / H(n, m') & \rightarrow & \varprojlim_n^{(1)} H(n, m') \rightarrow 0 \\ & \eta_m^{m'} \downarrow & & j \downarrow & & k \downarrow & \\ & \rightarrow & F_m & \rightarrow & \varprojlim_n F_m / H(n, m) & \rightarrow & \varprojlim_n^{(1)} H(n, m) \rightarrow 0 \end{array}$$

Il s'agit de démontrer que k est surjectif. Soit alors $a \in \varprojlim_n^{(1)} H(n, m)$. Il existe un $b \in \varprojlim_n F_m / H(n, m)$ tel que $\partial(b) = a$. Or, $b = \sum_{n=m}^{\infty} b_n$ où $b_m \in F_m$ et $b_n \in H(n, m)$ pour $n \geq m$. Nous pouvons supposer que $b_n = 0$ pour $n < m'$. En effet, par exactitude nous avons $\partial(b - \sum_{n=m}^{m'} b_n) = \partial(b) = a$. Soit donc $c_n \in F_n$ tel que $\eta_m^n(c_n) = b_n$ pour tout $n \geq m'$. L'élément $c = \sum_{n=m'}^{\infty} \eta_m^n(c_n)$ existe dans $\varprojlim_n F_{m'} / H(n, m')$ et il est clair que $j(c) = b$. Donc, par commutativité :

$$k \circ \partial'(c) = \partial \circ j(c) = a$$

c'est-à-dire k est surjectif.

Supposons maintenant que : $\varprojlim^{(q)} F = 0$ pour $q = 0, 1$.

Puisque :

$$\begin{aligned} \varprojlim F &= \varprojlim_m \varprojlim_n H(n, m) \\ \varprojlim^{(1)} F &= \varprojlim_m \varprojlim_n^{(1)} H(n, m) \end{aligned}$$

et puisque les deux systèmes projectifs

$$\begin{aligned} & \{ \varprojlim_n H(n, m) \}_{m \in \mathbb{Z}^+} \\ \text{et} \quad & \{ \varprojlim_n^{(1)} H(n, m) \}_{m \in \mathbb{Z}^+} \end{aligned} \quad \text{sont surjectifs}$$

il est clair que pour tout $m \geq 0$ nous avons :

$$\begin{aligned} \varprojlim_n H(n, m) &= \bigcap_{n \geq m} \text{im } \eta_m^n = 0 \\ \varprojlim_n^{(1)} H(n, m) &= 0 \end{aligned}$$

Tenant compte à la suite exacte (i) ceci veut dire que :

$$F_m \simeq \varprojlim_{n \geq m} F_m / \text{im } \eta_m^n$$

Donc pour tout m ou bien il existe un $n > m$ tel que $\text{im } \eta_m^n = 0$ ou bien F_m est complet séparé.

Q. E. D.

DEMONSTRATION DU COROLLAIRE 1. Soit $F_o = \varprojlim F$ et posons $\overline{F}_n = \text{im } \pi_n \subset F_n$, alors nous avons une suite exacte de systèmes projectifs :

$$0 \rightarrow \overline{F}_n \rightarrow F_n \rightarrow F_n / \overline{F}_n \rightarrow 0$$

On en déduit une suite exacte :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \varprojlim \overline{F}_n &\rightarrow \varprojlim F_n \rightarrow \varprojlim F_n / \overline{F}_n \\ &\rightarrow \varprojlim {}^{(1)}\overline{F}_n \rightarrow \varprojlim {}^{(1)}F_n \rightarrow \varprojlim {}^{(1)}F_n / \overline{F}_n \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

Or, $\overline{F}$ étant évidemment surjectif, nous avons $\varprojlim {}^{(1)}\overline{F} = 0$. D'autre part l'application $\varprojlim \overline{F} \rightarrow \varprojlim F$ est un isomorphisme, donc :

$$\varprojlim {}^{(q)}F_n / \overline{F}_n = 0 \quad \text{pour } q = 0, 1.$$

Donc par le théorème le système projectif $\{F_n / \overline{F}_n\}$ est essentiellement nul, c'est-à-dire que pour tout n il existe un $n' > n$ tel que $\text{im } \eta_n^{n'} \subset \overline{F}_n$ donc que $\text{im } \eta_n^{n'} = \overline{F}_n$.

Q. E. D.

DEMONSTRATION DU COROLLAIRE 2.

Considérons la famille $\{\ker \pi_n\}_{n \geq 0}$ de sous-modules de $F_o = \varprojlim F_n$. On a :

$$\bigcap_{n \geq 0} \ker \pi_n = 0 \text{ et } F_n \simeq F_o / \ker \pi_n.$$

Dire que le système projectif $\{F_n, \eta_n^{n'}\}_{n \geq 0}$ n'est pas constant pour aucun $n_o \geq 0$, c'est dire que $\ker \pi_n \neq 0$ pour tout $n \geq 0$, donc que F_o est complet séparé.

Q. E. D.

DEMONSTRATION DU COROLLAIRE 3.

La conclusion résulte aussitôt des Corollaires 1 et 2.

Q. E. D.

REMARQUE. Les conditions du Théorème 1. sont en particulier satisfaites si :

- 1) $\varprojlim {}^{(q)}F = 0$ pour $q = 0, 1$.
- 2) tous les F_n sont dénombrables.

En effet on démontre :

LEMME. Soit M un module et $\{M_n\}_{n \geq 0}$ une famille de sous-modules telle que $M_n \supset M_{n+1}$, $M_n \not\subset M_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$ et $\bigcap_{n \geq 0} M_n = 0$; alors si M est isomorphe à $\varprojlim_n M/M_n$, M n'est pas dénombrable.

DEMONSTRATION. Soit $\{a_i\}_{i \geq 0}$ une suite d'éléments de M telle que $a_i \in M_i$ mais que $a_i \notin M_{i+1}$, alors $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ existe dans M . Il est facile de voir que pour $N \geq 0$ nous avons $\sum_{i=N}^{\infty} a_i \in M_N$. Donc pour deux suites de nombres positifs $\{k_i\}$ et $\{l_i\}$ telles que $k_i < k_{i+1}$, nous avons :

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{l_i} a_{k_i} \neq 0.$$

Il en résulte que pour deux suites $\{k_i\}$ et $\{k'_i\}$ telles que $k_i < k_{i+1}$, $k'_i < k'_{i+1}$, $\{k_i\} \neq \{k'_i\}$ nous avons :

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_{k_i} \neq \sum_{i=0}^{\infty} a_{k'_i}$$

si non on aura :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \delta_i a_{l_i} = 0$$

où $\delta_i = \pm 1$ et $\{l_i\}$ est la différence symétrique de $\{k_i\}$ et $\{k'_i\}$.

Or, l'ensemble des suites $\{k_i\}_{i \geq 0}$, $k_i < k_{i+1}$, est non-dénombrable comme on le voit facilement en utilisant la méthode de Cantor.

Q. E. D.

Soit Γ un ensemble ordonné filtrant, et soit F un système projectif sur Γ . Nous pouvons démontrer :

THEOREME 1'. Supposons que :

- 1) $\varprojlim_{\Gamma}^{(q)} F = 0$ pour $q = 0, 1$.
 - 2) F_{γ} est un groupe abélien de type fini pour tout $\gamma \in \Gamma$.
- alors F est essentiellement nul.

COROLLAIRE 1'. Supposons que :

- 1) $\varprojlim_{\Gamma}^{(1)} F = 0$.
 - 2) F_{γ} est un groupe abélien de type fini pour tout $\gamma \in \Gamma$.
- alors F satisfait à la condition de Mittag-Leffler.

Pour la démonstration de ces résultats voir (2). On y trouve aussi les analogues des Corollaires 2. et 3. ci-dessus.

2.

Soit X un espace topologique localement compact et soit $x \in X$ un point. Nous désignons par $\mathcal{O}_x$ l'ensemble des *voisinsages ouverts* de x . $\mathcal{O}_x$ est un ensemble ordonné filtrant. Soit $H_c^*(\cdot, L)$ la cohomologie de Čech à support compact à valeurs dans l'anneau L . Si $V_1, V_2 \in \mathcal{O}_x$ et si $V_1 \subset V_2$ il existe une application $j_{V_2}^{V_1}: H_c^n(V_1, L) \rightarrow H_c^n(V_2, L)$. On obtient ainsi un système projectif:

$$\{H_c^n(V, L), j_V^{V'}\}_{V \in \mathcal{O}_x}$$

Notons :

$$H_q^p(x, L) = \varprojlim_{\mathcal{O}_x} H_c^p(V, L)$$

c'est un groupe bigradué dépendant seulement du germe d'espace topologique défini par X au point x .

La dimension cohomologique au sens de H. Cohen est le plus petit $n \geq 0$ tel que $H_c^{n+1}(U, L) = 0$ pour tout ouvert U dans X .

THEOREME 2 : Soit X un sous-espace fermé d'un espace euclidien E^N et soit L un anneau dénombrable alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

a) $\dim_L X \leq n$.

b) pour tout $x \in X$, tout $q \geq 0$ et pour tout $p > n$, nous avons : $H_q^p(x, L) = 0$.

DEMONSTRATION : a) $\rightarrow$ b) trivialement. b) $\rightarrow$ a). Soit $x \in X$ un point. Nous notons $p^n(x, L) = 0$ si, pour tout $V \in \mathcal{O}_x$, il existe un $V' \in \mathcal{O}_x$, $V' \subset V$ tel que :

$$j_{V'}^{V'}: H_c^n(V', L) \rightarrow H_c^n(V, L)$$

est nulle. On sait que si pour tout $x \in X$, $p^m(x, L) = 0$ pour tout $m > n$, alors $\dim_L X \leq n$ (voir A. Borel : Seminar on Transformation groups. Annals of Math. Studies 46. Chap. I Th. 2.3), pourvu que $\dim_L X < \infty$. Or, ici, $\dim_L X \leq N$ donc il suffit de démontrer que b) entraîne $p^m(x, L) = 0$ pour tout $x \in X$ et tout $m > n$.

Pour pouvoir appliquer le Théorème 1 du § 1 au système projectif

$$\{H_c^m(V, L), j_V^{V'}\}_{V \in \mathcal{O}_x}$$

il suffit de montrer que :

1. $\mathcal{O}_x$ contient une suite cofinale.

2. Pour tout $V \in \mathcal{O}_x$ relativement compact $H_c^m(V, L)$ est dénombrable.

Or 1 est trivial et 2 vient de ce qu'une limite inductive dénombrable de modules dénombrables est lui-même dénombrable. En effet, par définition de la cohomologie de Čech nous avons que $H_c^m(V, L)$ est la limite inductive sur l'ensemble ordonné $\mathcal{M}$ des recouvrements de $\bar{V}$ de modules de la forme $H^m(k, k_o, L)$ où $k \supset k_o$ sont des com-

-plexes simpliciaux finis. Puisque $\mathcal{M}$ contient une suite cofinale tout est démontré.

Q. E. D.

DEFINITION : Le i -ième nombre de Betti local au point $x \in X$ existe et est égal à k , noté $p^i(x, L) = k$, si pour tout $U \in \mathcal{O}_x$ il existe des $W \subset V \subset U$ dans $\mathcal{O}_x$ avec $\overline{W} \subset V$, $\overline{V} \subset U$ tels que pour tout $W' \subset W$ dans $\mathcal{O}_x$ nous avons :

$$\operatorname{im} j_V^{iW'} = \operatorname{im} j_V^{iW} \quad \text{est}$$

libre de dimension k , où $j_V^{i,W}$ est l'application $H_c^i(W, L) \rightarrow H_c^i(V, L)$ induite par l'inclusion $W \subset V$.

Utilisant le Corollaire 3 du Théorème 1 du § 1, nous démontrons facilement :

THEOREME 3. Soit X un sous-espace fermé de E^N et soit L un anneau dénombrable ; alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) $p^n(x, L)$ existe et est égal à m .
- b) $H_1^n(x, L) = 0$ et $H_0^n(x, L)$ est libre de dimension m .

Bibliographie.

- [1] O. A. LAUDAL. Sur la limite projective et la théorie de dimension I. Séminaire C. Ehresmann, 19 décembre 1961.
- [2] O. A. LAUDAL. Cohomologie locale. Applications. à paraître dans Mathematica Scandinavica.
- [3] L. HENKIN. A problem on inverse mapping systems. Proc. Amer. Math. Soc. 1 (1950) pp. 224-25.