

SÉMINAIRE DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

G. DE RHAM

Factorisations topologiques du disque à cinq dimensions

Séminaire de topologie et géométrie différentielle, tome 3 (1960-1962), exp. n° 2, p. 1-9

http://www.numdam.org/item?id=SE_1960-1962__3__A2_0

© Séminaire de topologie et géométrie différentielle
(Secrétariat mathématique, Paris), 1960-1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire de topologie et géométrie différentielle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FACTORISATIONS TOPOLOGIQUES DU DISQUE A CINQ DIMENSIONS

par G. de RHAM

V. Poénaru (Bull. Soc. math. France, 88, 1960, p. 113-129) a donné un exemple d'une variété à quatre dimensions, dont le bord est une variété non simplement connexe à trois dimensions et dont le produit avec un segment est homéomorphe au disque à cinq dimensions. Le procédé de construction qu'il a imaginé, que je décris ici, permet d'obtenir beaucoup d'autres variétés jouissant de la même propriété. En considérant les plus simples d'entre elles, je montrerai qu'il existe une infinité de variétés distinctes, dont le produit avec un segment est homéomorphe au disque à cinq dimensions.

1. Quelques définitions :

Un *disque* à n dimensions est une variété D^n homéomorphe à l'ensemble des points de R^n dont la distance à l'origine est ≤ 1 . La *sphère* à n dimensions est une variété S^n homéomorphe au bord de D^{n+1} .

J'appellerai *tube* toute variété homéomorphe à $S^1 \times D^2$ (tore plein ou tore solide). Le bord d'un tube est un *tore*, surface fermée orientable de genre un, homéomorphe à $S^1 \times S^1$. Une courbe simple fermée sur le bord d'un tube, qui est homologue à zéro dans le tube mais pas sur le bord, sera appelée un *méridien* du tube. Un disque D^2 bordé par un méridien, dont l'intérieur est intérieur au tube, sera appelé un *disque méridien*. Une courbe simple fermée sur le bord du tube, qui forme une base pour le premier groupe d'homologie du tube, sera appelée une *longitudinale*. Si L et L' sont deux longitudinales du même tube, $L \pm L'$ est homologue à zéro dans le tube, et à un multiple d'un méridien sur le bord du tube.

On dira qu'un tube T plongé dans S^3 n'est pas noué, si $S^3 - \dot{T}$ est un tube. Dans le cas contraire, on dira que T est noué, mais on supposera toujours que $S^3 - \dot{T}$ est une variété (on exclura les plongements sauvages). On sait (Dehn-Papakyriakopoulos) que T n'est pas noué si et seulement si le groupe fondamental de $S^3 - \dot{T}$ est cyclique.

Soient W et W' deux variétés à n dimensions, et soit b un homéomorphisme d'une sous-variété à $n-1$ dimensions W_1 (en général avec bord) du bord ∂W de W sur une sous-variété W'_1 du bord $\partial W'$ de W' . Dans l'espace topologique $W+W'$ somme de W et W' , on considère la relation d'équivalence pour laquelle deux points x et y sont équivalents si $x=y$ ou $x=b(y)$ ou $y=b(x)$, et dans ces cas seulement. L'espace quotient de $W+W'$ par cette relation d'équivalence est une variété à n dimensions, que l'on désignera par (W, W', b) ou simplement par $V(b)$, et l'on dira qu'elle est obtenue en attachant W et W' avec l'homéomorphisme b .

Si b' est un autre homéomorphisme analogue, je dirai que b et b' sont *équivalents*, s'il existe des automorphismes g de W et g' de W' , tels que $g'.b' = b.g$. S'il en est ainsi, (W, W', b) et (W, W', b') sont homéomorphes.

Le bord de (W, W', b) est la variété obtenue en attachant $\partial W - \dot{W}_1$ et $\partial W' - \dot{W}'_1$ avec l'homéomorphisme $b_1 = b|_{\partial W_1}$ restriction de b à ∂W_1 :

$$\partial(W, W', b) = (\partial W - \dot{W}_1, \partial W' - \dot{W}'_1, b|_{\partial W_1}).$$

2. La construction de Poénaru.

Partons d'un tube T noué dans S^3 , de sorte que la variété $A = S^3 - \dot{T}$ ne soit pas un tube. Soient m et $\tilde{m}$ deux méridiens de T , ne se touchant pas; ils partagent le bord de T en deux surfaces F et $\tilde{F}$ homéomorphes à une couronne $S^1 \times I_0$ (produit d'un cercle S^1 et d'un segment I_0). Le produit $A \times I$ de A avec un segment I est une variété à quatre dimensions, dont le bord contient le tube $T_1 = F \times I = S^1 \times I_0 \times I$. Prenons encore un homéomorphisme b de T_1 sur un tube T' contenu dans le bord S^3 d'un disque D^4 . En attachant $A \times I$ et D^4 avec b , on obtient une variété à 4 dimensions:

$$V(b) = (A \times I, D^4, b).$$

Il est clair que cette variété dépend du choix de T , de T' et de b . Poénaru a pris pour T un tube formant le noeud de trèfle, pour T' un noeud plus compliqué formé en composant un noeud de trèfle avec son symétrique et il n'a considéré qu'un seul homéomorphisme b . Je considérerai spécialement le cas où T est le noeud de trèfle et où T' n'est pas noué, et je montrerai que suivant le choix de b on obtient une infinité de variétés distinctes. Je ferai aussi quelques remarques sur le cas général.

Je vais d'abord définir un certain entier associé à l'homéomorphisme b que j'appellerai *l'invariant de b* et que je désignerai par $a(b)$.

Désignons par O_0 et O les origines de I_0 et I , et par p un point de S^1 . La courbe $m_1 = p \times \partial(I_0 \times I)$ est un méridien de T_1 , tandis que $m \times O = S^1 \times O_0 \times O$ en est une longitudinale. Leurs images $b(m_1)$ et $b(m \times O)$ par b sont par suite un méridien et une longitudinale de T' , et comme $b(m_1)$ est une base du premier groupe d'homologie de $S^3 - T'$, $b(m \times O)$ est homologue dans $S^3 - T'$ à un multiple de $b(m_1)$, $b(m \times O) \sim$

$\sim a b(m_1)$ dans $S^3 - T'$. C'est cet entier $a = a(b)$ que j'appellerai *l'invariant* de b .

Voici alors l'énoncé de quelques résultats.

THEOREME I. *Si T est le noeud de trèfle, si T' n'est pas noué et si $a(b) \neq 0$, $\partial V(b)$ n'est pas simplement connexe.*

THEOREME II. *Si T et T' sont noués. $\partial V(b)$ n'est pas simplement connexe.*

THEOREME III. *Si $a(b)$ est pair, le produit de $V(b)$ avec un segment est homéomorphe à D^5 .*

Je démontrerai complètement I et III seulement dans le cas où T' n'est pas noué et où b appartient à une série particulière d'homéomorphismes, dont l'invariant prend toutes les valeurs entières, et je montrerai que les groupes fondamentaux des bords des variétés correspondantes $V(b)$ sont deux-à-deux non isomorphes. Il en résultera bien l'existence d'une infinité de variétés distinctes, dont le produit avec un segment est D^5 .

3. Etude du bord de $V(b)$.

D'après le n° 1, on a $\partial V(b) = (\partial(A \times I) - \dot{T}_1, S^3 - \dot{T}', b / \partial T_1)$. Montrons d'abord, suivant Poénaru, que $\partial(A \times I - \dot{T}_1)$ est homéomorphe à $S^3 - \dot{T}_2$, où T_2 est un tube que l'on obtient en composant le noeud formé par T avec le noeud symétrique.

Représentons S^3 par R^3 complété avec un point à l'infini. Par une déformation homéomorphe de S^3 , on peut amener A sur la variété bornée limitée par la partie d'une sphère S extérieure à deux cercles tracés sur S et ne se touchant pas, et par la surface d'un canal joignant ces deux cercles à l'intérieur de S , de manière que ces deux cercles soient m et $\tilde{m}$, que F soit la surface du canal joignant m et $\tilde{m}$ et $\tilde{F}$ la partie de S limitée par m et $\tilde{m}$ et extérieure à ces deux cercles (Voir figure 2). Soient A' , S' et F' les symétriques de A , S et F par rapport à un plan ne coupant pas S . Par chaque point extérieur à S et S' passe un arc de cercle orthogonal à S et S' , joignant un point de S à son symétrique sur S' , et un seul.

On a :

$$\partial(A \times I) - \dot{T}_1 = (\partial A \times I - T_1) \cup A \times 0 \cup A \times 1 = \tilde{F} \times I \cup A \times 0 \cup A \times 1.$$

On peut alors représenter $A \times 0$ sur A , $A \times 1$ sur A' et $\tilde{F} \times I$ sur la variété balayée par les arcs de cercles orthogonaux à S et S' joignant un point de $\tilde{F}$ à son symétrique sur S' , de manière que, pour $x \in \tilde{F}$, le point (x, t) décrive cet arc lorsque t varie de 0 à 1. On obtient ainsi une représentation de $\partial(A \times I) - \dot{T}_1$ sur $S^3 - \dot{T}_2$, T_2 étant le tube formé par le canal intérieur à S , son symétrique dans S' , et deux canaux joignant m et $\tilde{m}$ à leurs symétriques m' et $\tilde{m}'$, ces derniers canaux étant engendrés par des arcs de cercles orthogonaux à S et S' .

On peut remarquer que $m \times 0$ est un méridien de T_2 ; et que m_1 est une longitudinale de T_2 , qui est homologue à zéro dans $S^3 - \dot{T}_2$ (cela se déduit immédiatement du fait que m_1 est symétrique par rapport au plan de symétrie de T_2 , et par suite a un coefficient d'enlacement nul avec l'"âme" de T_2).

Les groupes fondamentaux $\pi_1(\partial(A \times I) - \dot{T}_1) = \pi_1(S^3 - \dot{T}_2)$ et $\pi_1(S^3 - T')$ sont des groupes de noeuds, dont on sait trouver des générateurs et des relations fondamentales. On sait qu'on obtient des générateurs et des relations fondamentales de $\pi_1(\partial V(b))$ en réunissant ces générateurs et ces relations et ajoutant les relations qu'on obtient en égalant les éléments qui représentent des classes de courbes sur les bords ∂T_2 et $\partial T'$ qui se correspondent par b . Le théorème II peut alors se déduire facilement de résultats de Papakyriakopoulos et Whitehead, d'après lesquels, si un tube T est noué, une courbe sur ∂T non homotope à zéro sur ∂T n'est pas non plus homotope à zéro dans $S^3 - \dot{T}$.

Prenons maintenant le cas où T est le noeud de trèfle. Alors, le groupe $\pi_1(S^3 - \dot{T}_2)$ est le groupe du noeud représenté sur la figure en projection, à chacun des arcs $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ on associe un générateur du groupe, représentant la classe d'homotopie des lacets partant du point base $\odot$ supposé en avant du plan de projection, perçant ce plan à droite de l'arc, passant derrière et revenant en $\odot$ en reperçant le plan à gauche de l'arc. On sait qu'à chaque croisement correspond une relation, et qu'on obtient ainsi des relations fondamentales. On a donc ainsi les générateurs $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \varphi, \delta = \alpha$, avec les relations $\alpha\gamma = \gamma\beta = \beta\alpha$, $\alpha\varepsilon = \varepsilon\varphi = \varphi\alpha$. Comme fait Poénaru, posons $\beta\alpha = \sigma$, $\varphi\alpha = \tau$. En éliminant $\beta, \gamma, \varepsilon, \varphi$ et δ , il reste les générateurs α, σ et τ , avec les relations $\sigma^2 = \alpha\sigma\alpha$, $\tau^2 = \alpha\tau\alpha$. Elles entraînent $\sigma^3 = (\alpha\sigma)^2 = (\sigma\alpha)^2$, $\tau^3 = (\alpha\tau)^2 = (\tau\alpha)^2$, d'où résulte que α commute avec σ^3 et τ^3 .

En supposant le point base O placé sur le bord de T_2 , au dessus (ou en avant) de l'arc α de la figure, le méridien $m \times O$ de T_2 est représenté par α , tandis que la longitudinale m_1 de T_2 (orientée dans le sens des flèches de la figure) est représentée par l'élément :

$$\begin{aligned} \chi &= \gamma\alpha\beta\varphi^{-1}\alpha^{-1}\varepsilon^{-1} = \alpha^{-1}\sigma\alpha\sigma\alpha^{-1}\alpha\tau^{-1}\alpha^{-1}\tau^{-1}\alpha = \\ &= \alpha^{-2}(\alpha\sigma)^2(\alpha\tau)^{-2}\alpha^2 = \alpha^{-2}\sigma^3\tau^{-3}\alpha^2 = \sigma^3\tau^{-3} \end{aligned}$$

Si T' n'est pas noué, le groupe $\pi_1(S^3 - \dot{T}')$ est cyclique, engendré par un élément représentant un méridien de T' , soit $b(m_1)$, élément qui s'identifie par suite à χ . Comme $b(m \times 0)$ est homologue et par suite homotope dans $S^3 - \dot{T}'$ à am_1 , où a est l'invariant de b , il s'introduit une nouvelle relation, $\alpha = \chi^a$. En définitive,

THEOREME IV. Si T est le noeud de trèfle, si T' n'est pas noué et si l'invariant de b est égal à a , $\pi_1(\partial V(b))$ est le groupe G_a défini par les générateurs α, σ et τ avec

les relations :

$$\sigma^2 = \alpha \sigma \alpha, \quad \tau^2 = \alpha \tau \alpha, \quad \alpha = (\sigma^3 \tau^{-3})^a.$$

Si $a = 0$, ces relations entraînent $\alpha = \sigma = \tau = 1$, et G_0 est trivial. Si $a \neq 0$, G_a n'est pas trivial, car il admet une représentation sur le groupe unimodulaire mod $(6a+1)$, qu'on obtient en représentant α , σ et τ par les substitutions $z' = z + 1$, $z' = \frac{-1}{z} - 1$ et $z' = z + 2$, car alors σ^2 et $\alpha \sigma \alpha$ sont représentés par la substitution $z' = \frac{-1}{z+1}$, τ^2 et $\alpha \tau \alpha$ par $z' = z + 4$, et $(\sigma^3 \tau^{-3})^a$ par $z' = z - 6a$, ce qui mod $(6a+1)$ est la même chose que la substitution représentant α .

En considérant les représentations de G_a dans le groupe des déplacements du plan non-euclidien, on peut montrer que si $|a| \neq |b|$, G_a et G_b ne sont pas isomorphes, et que G_a est infini si $a \neq 0$. (voir Appendice, n° 5).

Etude du produit $V(h) \times I_1$:

Je vais montrer d'abord que, quel que soit le tube T , il existe un homéomorphisme h_0 de T_1 sur un tube T' non noué, tel que $V(h_0)$ soit homéomorphe au disque D^4 .

Reprenons la variété A représentée comme plus haut, dans R^3 ; son bord est formé par la partie de la sphère S extérieure aux deux cercles m et $\tilde{m}$ et la surface d'un canal joignant m à $\tilde{m}$ à l'intérieur de S , surface qui représente F . Désignons par B la variété constituée par l'intérieur de ce canal avec son bord, de sorte que $A \cap B = F$ et $A \cup B$ est la variété formée par la sphère S et son intérieur. Il est clair que $B \times I$ est un disque D^4 , dont l'intersection avec $A \times I$ est $F \times I = T_1$, tube qui est contenu à la fois dans $\partial(A \times I)$ et dans $\partial(B \times I)$. En attachant $A \times I$ et $B \times I$ avec l'homéomorphisme h_0 égal à l'application identique de T_1 sur lui-même, on obtient alors la variété $V(h_0) = (A \cup B) \times I$, qui est bien homéomorphe à D^4 . On voit encore que T' , qui se confond ici avec T_1 , n'est pas noué dans $S^3 = \partial(B \times I)$ et que $a(h_0) = 0$, car $S^3 - T' = \partial(B \times I) - T_1 = B \times O \cup B \times I \cup (S - \tilde{F}) \times I$ n'est pas autre chose que le tube T_2 envisagé au n° 3, dans lequel $h_0(m \times O) = m \times O$ est un méridien donc homologue à zéro.

Considérons maintenant un homéomorphisme de T_1 sur un tube T' quelconque dans $S^3 = D^4$. On peut introduire dans T' un système de coordonnées, (z, θ) , formé d'une coordonnée complexe z assujettie à $|z| \leq 1$ et d'une coordonnée angulaire θ (mod 2π), de manière que $\arg z$ augmente de 2π sur le méridien $h(m_1)$ et que θ augmente de 2π sur la longitudinale $h(m \times O)$. L'automorphisme G de T' défini par $G(z, \theta) = (e^{i\theta} z, \theta)$ change alors $h(m \times O)$ en une longitudinale homologue sur $\partial T'$ à $h(m \times O)$ et $h(m_1)$, de sorte que, si l'invariant de h est a , celui de $G.h$ est $a + 1$. On pourra ainsi déduire d'un homéomorphisme h une série d'homéomorphismes $G^k.h$ ($k = 0 \pm 1, \pm 2, \dots$) ayant pour invariants tous les entiers.

THEOREME V. *Quel que soit l'homéomorphisme h , les variétés $V(h) \times I_1$ et $V(G^2 \cdot h) \times I_1$ sont homéomorphes.*

Dans cet énoncé, I_1 désigne un segment, que nous supposons être l'intervalle $(-1 \leq t \leq 1)$. Nous désignerons par i l'application identique de I_1 . Il est clair que l'on peut obtenir $V(h) \times I_1$ en attachant $A \times I \times I_1$ et $D^4 \times I_1$ avec l'homéomorphisme $h \times i$, qui change (x, t) en $(h(x), t)$. On a ainsi:

$$V(h) \times I_1 = (A \times I \times I_1, D^4 \times I_1, h \times i).$$

Pour montrer que $V(h) \times I_1$ et $V(G^2 \cdot h) \times I_1$ sont homéomorphes, il suffira donc de montrer que les homéomorphismes $h \times i$ et $(G^2 \cdot h) \times i$ de $T_1 \times I_1$ sur $T' \times I_1$ sont équivalents, au sens du n° 1, et pour cela il suffit de montrer que l'automorphisme $G^2 \times i$ de $T' \times I_1$ peut s'étendre en un automorphisme de $D^4 \times I_1$, ou, ce qui suffit encore, en un automorphisme de $S^4 = \partial(D^4 \times I_1)$, car un tel automorphisme peut toujours s'étendre à l'intérieur de $D^4 \times I_1$. Je vais montrer que $G^2 \times i$ peut s'étendre en un automorphisme de $(D^4 \times I_1)$ qui est l'identité en dehors d'un voisinage de $T' \times I_1$.

Le système de coordonnées (z, θ) introduit dans T' peut s'étendre à un voisinage de T' dans $S^3 = \partial D^4$, qui sera ainsi représenté sur le produit $R^2 \times S^1$ du plan de la variable complexe z avec un cercle. Ensuite, par projection centrale dans $R^4 \times R$ de $\partial(D^4 \times I_1)$ privée des centres de $D^4 \times -1$ et $D^4 \times 1$ sur $S^3 \times R$, on obtient un système de coordonnées (z, θ, t) défini dans un voisinage $\mathcal{U}$ de $T' \times I_1$ dans $S^4 = \partial(D^4 \times I_1)$, $T' \times I_1$ étant défini dans ce voisinage par $|z| \leq 1$ et $|t| \leq 1$. Posons encore:

$$w = \lambda z \quad \text{et} \quad u = \lambda t, \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{\sup(|z|, |t|)}{\sqrt{|z|^2 + t^2}},$$

de sorte que $\sqrt{|w|^2 + u^2} = \sup(|z|, |t|)$. A l'aide des coordonnées (w, θ, u) , qui sont valables dans $\mathcal{U}$, $T' \times I_1$ est défini par $|\mathcal{U}|^2 + \mathcal{U}^2 \leq 1$ et la transformation $(G^2 \times i)(w, \theta, u) = (e^{2i\theta} w, \theta, u)$ s'étend à ce voisinage. Les sphères $S(r, \varphi)$, définies par $|w|^2 + u^2 = r^2$ et $\theta = \varphi$, forment une fibration de $\mathcal{U}$, et $G^2 \times i$ fait subir à $S(r, \varphi)$ une rotation sur elle-même indépendante de r , d'angle 2φ .

On peut représenter chacune de ces rotations par une rotation de l'espace R^3 des coordonnées (w, u) autour de l'origine. Or, dans le groupe de ces rotations, lorsque φ varie de 0 à 2π , la rotation qui change (w, u) en $(e^{2i\varphi} w, u)$ décrit une courbe fermée homotope à zéro. On peut par suite trouver une famille continue de rotations $R(r, \varphi)$ qui se réduisent à la rotation ci-dessus pour $r \neq 1$ et à l'identité pour $r = 1$. L'automorphisme de $S^4 = \partial(D^4 \times I_1)$ qui coïncide sur $S(r, \varphi)$ avec la rotation $R(r, \varphi)$ et qui se réduit à l'identité en dehors de $\mathcal{U}$ fournit alors l'extension cherchée de $G^2 \times i$.

REMARQUE : La construction ci-dessus ne permet pas d'étendre l'automorphisme $G \times i$, parce que, lorsque φ varie de 0 à 2π , la rotation qui change (w, u) en $(e^{i\varphi} w, u)$ décrit dans le groupe des rotations une courbe qui n'est pas homotope à zéro.

Lorsque T' n'est pas noué, deux homéomorphismes de T_1 sur T' dont les invariants sont égaux au signe près sont équivalents: cela se déduit facilement du fait qu'un automorphisme de T' qui induit l'identité sur l'homologie de T' est isotope à l'identité, et peut par suite s'étendre à S^3 . Dans ce cas, si T est donné, $V(b)$ ne dépend que de $a(b)$.

Revenons au cas où T est le noeud de trèfle et où T' n'est pas noué. Nous obtenons alors une série de variétés $V_a = V(G^a, b_0)$ dépendant d'un entier arbitraire a . D'après le théorème V, le produit $V_a \times I_1$ est homéomorphe à $V_0 \times I_1 = D^5$ (car $V_0 = D^5$) si a est pair et à $V_1 \times I_1$ si a est impair. D'autre part, $\pi_1(V_a) = G_a$.

Comme les groupes G_{2a} ($a = 0, 1, 2, \dots$) sont deux-à-deux non isomorphes, les variétés V_{2a} ($a = 0, 1, 2, \dots$) sont deux-à-deux non homéomorphes, et le produit de chacune d'elles avec I_1 est D^5 .

Le théorème III est ainsi établi dans le cas où T' n'est pas noué. On l'étend au cas général en montrant que, pour tout homéomorphisme h , on peut trouver un homéomorphisme h' tel que $h'(T_1)$ ne soit pas noué, que $h \times i$ soit équivalent à $h' \times i$ et que $a(h') \equiv a(h) \pmod{2}$. Il faut utiliser pour cela le procédé qui permet de dénouer les noeuds dans l'espace à 4 dimensions, comme fait Poénaru dans son exemple.

Il serait intéressant de savoir si $V_1 \times I_1$ est homéomorphe à D^5 ? Je me borne à poser la question!

Voici encore une remarque intéressante faite par Poénaru. L'automorphisme involutif de I_1 qui change t en $-t$ s'étend naturellement en un automorphisme involutif de $\partial(V(b) \times I_1)$, dont l'ensemble des points fixes est une variété homéomorphe à $\partial V(b)$, qui partage $\partial(V(b) \times I_1)$ en deux variétés homéomorphes à $V(b)$. Le "double" de $V(b)$, c'est-à-dire la variété obtenue en attachant deux exemplaires de $V(b)$ avec l'homéomorphisme canonique du bord de l'un sur le bord de l'autre, est homéomorphe à $\partial(V(b) \times I_1)$. En tenant compte de ce qui précède, on voit qu'il existe une infinité d'automorphismes involutifs de S^4 dont les points fixes forment des variétés à trois dimensions deux-à-deux non homéomorphes.

Ces mêmes variétés se présentent comme ensembles des points fixes de groupes à un paramètre (homéomorphes à S^1) d'automorphismes de S^5 .

5. Appendice.

Les groupes G_a , définis dans l'énoncé du théorème IV.

Considérons une représentation du groupe G_a dans le groupe des déplacements du plan non euclidien, que nous supposons non triviale. Soient S , T et A les déplacements représentant σ , τ , et α . On sait que l'ensemble des déplacements permutable avec un déplacement donné (distinct de la transformation identité) est le sous-groupe à un paramètre contenant ce déplacement. Comme S^3 et T^3 sont permutable avec A et $A \neq 1$ (si $A = 1$ la représentation serait triviale), il est nécessaire que S^3 ou T^3 se réduisent à l'identité. (Sinon S et T seraient permutable et la représentation serait triviale).

Si $S^3 = 1$, les relations $S^2 = ASA$, $T^2 = ATA$ et $A = (S^3 T^{-3})^a$ se réduisent à $T = A^2$, $S^3 = A^{6a+1} = (AS)^2 = 1$.

Si $T^3 = 1$, elles se ramènent à $S = A^2$, $T^3 = A^{6a-1} = (AT)^2 = 1$.

On voit que les représentations de G_a se ramènent aux représentations du groupe H_n défini par deux générateurs A et B avec les relations $B^3 = A^n = (AB)^2 = 1$, pour $n = 6|a| + 1$ et $n = 6|a| - 1$. Or, on sait que, si $n \neq 6$, il existe une représentation fidèle de H_n par un groupe de déplacements du plan non-euclidien, qui laisse invariant un réseau de polygones réguliers à n côtés d'angle $2/3$; cela entraîne que n est le maximum de l'ordre des éléments d'ordre fini de H_n . D'autre part, H_5 est le groupe de l'icosaèdre. Il résulte de là que le nombre $6|a| + 1$ est le maximum de l'ordre des éléments d'ordre fini de toutes les représentations de G_a par des déplacements du plan non-euclidien.

Cela entraîne immédiatement que G_a et G_b ne peuvent être isomorphes que si $a = \pm b$. Et G_a et G_{-a} sont effectivement isomorphes : une permutation de σ et τ réalise l'isomorphisme.

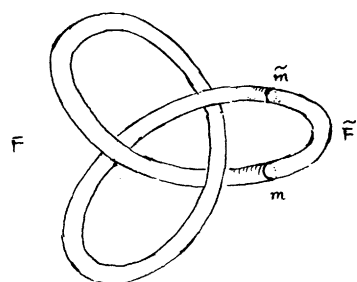


Fig 1

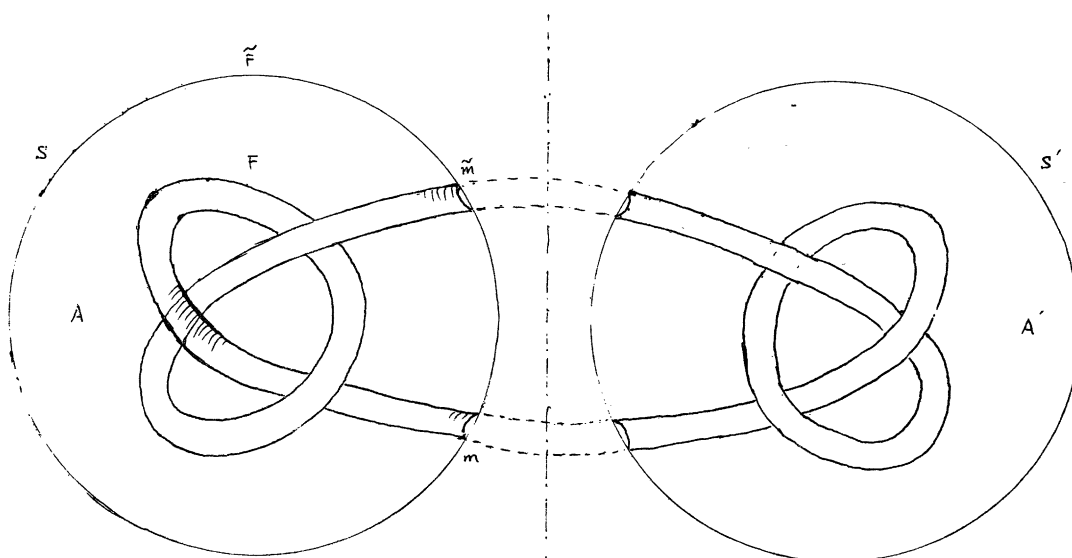


Fig 2

$$\begin{aligned} \alpha &= \delta \\ \alpha\gamma &= \gamma\beta = \beta\alpha = \sigma \\ \alpha\varepsilon &= \varepsilon\varphi = \varphi\alpha = \tau \end{aligned}$$

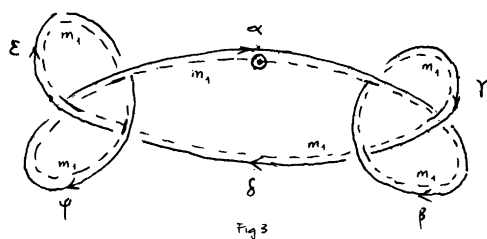


Fig 3

$$\gamma = \gamma\alpha\beta\varphi^{-1}\alpha^{-1}\varepsilon^{-1} = \dots = \sigma^3\tau^{-3}$$