

SÉMINAIRE DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

SHIING-SHEN CHERN

Sur les métriques riemanniennes compatibles avec une réduction du groupe structural

Séminaire de topologie et géométrie différentielle, tome 2 (1958-1960), exp. n° 8, p. 1-2

http://www.numdam.org/item?id=SE_1958-1960__2__A8_0

© Séminaire de topologie et géométrie différentielle
(Secrétariat mathématique, Paris), 1958-1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire de topologie et géométrie différentielle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES METRIQUES RIEMANNIENNES
 COMPATIBLES AVEC UNE REDUCTION DU GROUPE STRUCTURAL

par Shiing-shen CHERN

Soit M une variété différentiable de dimension n et de classe ≥ 3 . L'espace fibré tangentiel de M est un espace fibré à fibre l'espace vectoriel réel T à n dimensions et à groupe structural $GL(n, R)$. On dit que M a une Γ -structure, si le dernier est réduit à un sous-groupe Γ de $GL(n, R)$. Le groupe Γ opère dans la fibre typique T et induit des opérations linéaires dans l'espace dual T^* de T et dans les espaces des covecteurs extérieurs $\Lambda^q(T^*)$, $0 \leq q \leq n$. Soit W un sous-espace de $\Lambda^q(T^*)$, qui est stable par rapport à Γ . Alors on peut définir sur une variété M munie d'une Γ -structure la notion de forme différentielle extérieure de degré q et du type W . Si Γ est de plus un sous-groupe du groupe orthogonal $O(n)$, l'espace $W^\perp \subset \Lambda^q(T^*)$, qui est orthogonal à W , est aussi stable. On peut alors définir sur les formes de degré q de M l'opérateur de projection P_W .

Prenons un repère dans T et appelons repères admissibles tous ceux qui s'en déduisent par les opérations de Γ . Un corepère admissible est par définition le dual d'un repère admissible. Si M a une Γ -structure, on peut, d'une manière évidente définir les repères ou les corepères admissibles sur M .

A une Γ -structure sur M , avec $\Gamma \subset O(n)$, est associée une métrique riemannienne. Nous considérons les variétés M munies d'une Γ -structure, $\Gamma \subset O(n)$, satisfaisant à une des trois conditions suivantes, qui sont d'ailleurs équivalentes entre elles :

- 1) Le groupe d'holonomie homogène de la connexion de Levi-Civita (de la métrique riemannienne associée) est Γ ou un sous-groupe de Γ .
- 2) par le transport par parallélisme de Levi-Civita les repères admissibles restent admissibles.
- 3) Il existe une connexion de torsion nulle, dont le groupe structural est le groupe linéaire non homogène dont Γ est la partie homogène.

Nous appellerons holonome une telle Γ -structure. Bien entendu, la géométrie riemannienne classique est un cas particulier, avec $\Gamma = O(n)$.

THEOREME FONDAMENTAL. Soit M une variété avec une Γ -structure holonome. L'opérateur P_W défini ci-dessus commute avec l'opérateur de Laplace-de Rham Δ , c'est-à-dire : $\Delta P_W = P_W \Delta$. De plus, si η est une forme différentielle extérieure invariante par Γ , l'opérateur multiplication extérieure par η commute aussi avec Δ .

Dans le cas où M est compact et orienté ce théorème donne une analyse fine de la cohomologie à coefficients réels de M (via les formes harmoniques de Hodge).

Voici quelques exemples :

Exemple 1. $n = 2m$, $\Gamma = U(m)$, considéré comme un sous-groupe de $SO(2m)$. C'est la formulation réelle de la géométrie kählérienne. On peut déduire du théorème fondamental les conséquences topologiques connues sur les variétés kählériennes compactes.

Exemple 2. $\Gamma = SO(q) \times SO(n-q)$. Géométriquement cela signifie qu'il existe un champ de q -plans orientés sur M , qui sont parallèles par rapport au parallélisme de Levi-Civita. On déduit du théorème fondamental une analyse de la cohomologie réelle de M . En particulier, il s'en suit que le q -ième nombre de Betti b_q de M est ≥ 1 . L'analyse du cas où $q = 1$ donne l'inégalité suivante $b_2 \geq b_1 - 1$.

L'utilisation des formes harmoniques donne aussi des conséquences concernant la structure multiplicative de cohomologie de M , et en particulier l'indice (au sens topologique). En effet, soit $n = 4k$. L'opérateur $*$ définit un endomorphisme linéaire dans $\Lambda^{2k}(T^*)$ et on a $\Lambda^{2k}(T^*) = W_1 \oplus W_2$, où W_1 (resp. W_2) est le sous-espace de tous les éléments de $\Lambda^{2k}(T^*)$ invariants par $*$ (resp. transformés en éléments opposés par $*$). Soit b_i la dimension de l'espace des formes harmoniques de degré $2k$ et du type W_i , $i = 1, 2$. Alors l'indice de M est égal à $b_1 \cdot b_2$. De ce théorème on déduit par une voie purement algébrique le théorème d'indice de Hodge pour les variétés kählériennes compactes.

Mentionnons l'application suivante : Soit M une variété compacte et orientée de dimension $4k$ avec la propriété qu'il existe $2k$ champs de vecteurs linéairement indépendants qui sont parallèles par rapport à une métrique riemannienne. Alors l'indice de M est nul.

Référence :

CHERN S., On a generalization of Kähler geometry, Lefschetz Jubilee Volume, 103-121, Princeton, et un autre article qui sera publié prochainement.