

SÉMINAIRE DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

NICOLAAS H. KUIPER

Sur les immersions à courbure totale minimale

Séminaire de topologie et géométrie différentielle, tome 2 (1958-1960), exp. n° 5, p. 1-5

http://www.numdam.org/item?id=SE_1958-1960__2__A5_0

© Séminaire de topologie et géométrie différentielle
(Secrétariat mathématique, Paris), 1958-1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire de topologie et géométrie différentielle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>).
Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES IMMERSIONS A COURBURE TOTALE MINIMALE

par Nicolaas H. KUIPER

X^n est une variété différentiable de classe C^∞ , connexe, compacte, de dimension n . E^N est l'espace (vectoriel) euclidien de dimension N . $f : X \rightarrow E$ est une immersion C^∞ de X dans E , c'est-à-dire une application différentiable de classe C^∞ et de rang n en chaque point de X .

Suivant Chern et Lashof [1] nous définissons la *courbure totale* $r(f) = r(X^n, f, E^N)$ de f comme suit : Soit M^{N-1} le fibré avec base X des vecteurs unitaires normaux de $f(X^n)$ dans E^N , et S^{N-1} la $N-1$ -sphère des vecteurs unitaires de E^N . L'application canonique de M^{N-1} dans S^{N-1} est nommée γ . Sa duale γ^* applique l'élément de volume $d\sigma$ de S^{N-1} sur une $N-1$ -forme $\gamma^* d\sigma$ de M^{N-1} .

Alors

$$(1) \quad r(f) = r(X^n, f, E^{N-1}) = \int_{M^{N-1}} \frac{|\gamma^* d\sigma|}{c_{N-1}}, \quad c_{N-1} = \int_{S^{N-1}} d\sigma$$

Soit Φ la classe des fonctions réelles différentiables ϕ définies sur X , qui ne possèdent que des points critiques non-singuliers.

Un point critique d'une fonction est d'indice k si la fonction ϕ admet dans un voisinage de ce point la représentation en coordonnées locales $\phi_1, \dots, \phi_n$:

$$\phi = K - \phi_1^2 - \dots - \phi_k^2 + \phi_{k+1}^2 + \dots + \phi_n^2, \quad K \text{ constant.}$$

Le nombre des points critiques d'indice k sera $\beta_k(X^n, \phi)$.

Alors on définit : $\beta(X^n, \phi) = \sum_{k=0}^n \beta_k(X^n, \phi)$

$$\beta_k(X^n) = \min_{\phi \in \Phi} \beta_k(X^n, \phi)$$

$$\beta(X^n) = (\beta_0(X^n), \beta_1(X^n), \dots, \beta_n(X^n))$$

$$\beta(X^n) = \min_{\phi \in \Phi} \beta(X^n, \phi)$$

parce que $\beta_k(X^n, \phi) = \beta_{n-k}(X^n, -\phi)$ on a $\beta_k(X^n) = \beta_{n-k}(X^n)$

C'est évident que

$$(2) \quad \beta(X^n) \geq \sum_{k=0}^n \beta_k(X^n)$$

Dans [2] on trouve le *théorème*

$$(3) \quad r(f) = r(X^n, f, E^{N-1}) \geq \beta(X^n)$$

Si $\rho_k(X^n)$ est le rang maximal du k -ième groupe d'homologie par rapport à un anneau variable, on a les *inégalités de Morse*.

$$(4) \quad \beta_k(X^n) \geq \rho_k(X^n)$$

La composition de (1), (2), (3), (4), donne (voir [2])

$$(5) \quad r(f) \geq \beta(X^n) \geq \sum_{k=0}^n \beta_k(X^n) \geq \sum \rho_k(X^n) = \rho(X^n)$$

DEFINITION. Une immersion est nommée à courbure absolue totale minimale, ou brièvement, minimale si l'on a

$$(6) \quad r(f) = \beta(X^n)$$

On peut donner une autre définition des immersions minimales par la propriété caractéristique suivante :

Soit $z \in S^{N-1}$ un vecteur unitaire de E^N , $x \in X$; $z f(x)$ le produit scalaire des vecteurs z et $f(x)$. C'est la composition de f avec une fonction réelle linéaire $y \rightarrow zy$, $y \in E^N$, qui applique E^N sur $\mathbb{R}$. Alors on sait que si f est une immersion arbitraire, obéissant aux conditions données au premier paragraphe, les vecteurs $z \in S^{N-1}$ pour lesquels la fonction $z f(x) : X \rightarrow \mathbb{R}$ possède des points critiques singuliers, forment un ensemble clos et de mesure nulle. Pour les immersions minimales on a :

THEOREME 1 (Voir [2]). Dans le cas, et seulement dans le cas, où l'immersion $f : X^n \rightarrow E^N$ est minimale, le nombre des points critiques non singuliers de la fonction $z f(x)$, $z \in S^{N-1}$, est

$$(7) \quad \beta(X^n, z f(x)) = \beta(X^n) \text{ pour chaque } z f(x) \in \Phi.$$

On peut dire (c'est équivalent) que si $z f(x) \in \Phi$, alors dans le système des hyperplans orthogonaux au vecteur z , il existe $\beta(X^n)$ hyperplans tangents par rapport à $f(X^n)$.

Si $\beta(X^n) = 2$, $N = n + 1$, f minimal, alors $f(X^n)$ est une hypersurface convexe. Minimal est alors une généralisation de convexe.

Une application $f : X^n \rightarrow E^N$ est dite proprement dans E^N si $f(X^n)$ n'est contenu dans aucun hyperplan de l'espace euclidien E^N .

PROBLEME. Si X^n est donnée, quels sont les valeurs que N peut prendre si $f : X^n \rightarrow E^N$ est une immersion minimale, proprement dans E^N .

Nous considérons une immersion minimale $f : X^n \rightarrow E^N$ d'une C^∞ - variété compacte connexe X^n , proprement dans E^N et avec les conditions supplémentaires :

$$(8) \quad \begin{aligned} \beta(X^n) &= \sum_{k=0}^n \beta_k(X^n) \\ \beta_0(X^n) &= \beta_n(X^n) = 1 \end{aligned}$$

Je ne sais pas si les conditions (8) valent pour tout X

Soit $|f|(x)$ la longueur du vecteur $f(x)$ et soit $q = f(x_0)$, $x_0 \in X$, un vecteur pour lequel

$$|q| = |f(x_0)| = \max_{x \in X} |f(x)|$$

V^{N-n} est l'espace vectoriel de toutes les fonctions linéaires, pas nécessairement homogènes, de E^N qui s'annulent sur q et sur l'espace tangent de q par rapport à $f(X)$.

Si $\phi \in V^{N-n}$ la composition $\phi \circ f$ est une fonction réelle sur X^n dont le 0-jet (= valeur) et le 1-jet au point x_0 s'annulent. Soit $W = W^{\frac{1}{2}n(n+1)}$ l'espace vectoriel des 2-jets au point x_0 , des applications différentiables de X^n dans $\mathbb{R}$, dont les 1-jets s'annulent. Si $\xi_1, \dots, \xi_n$ sont les coordonnées locales de X^n et $x_0 = (0, \dots, 0)$, alors on peut identifier W avec le système des formes homogènes quadratiques dans $\xi_1 \dots \xi_n$. Ce système est de dimension $\frac{1}{2}n(n+1)$. Soit $\pi(\phi) \in W$ le 2-jet obtenu de $\phi \in V^{N-n}$. C'est évident que π est un homomorphisme, mais dans les conditions données sur f et X , on a même :

$$\text{LEMME.} \quad \pi : V^{N-n} \rightarrow W^{\frac{1}{2}n(n+1)} \quad \text{est un monomorphisme}$$

C'est-à-dire $\text{Ker } \pi = 0$.

Du lemme on déduit immédiatement $N-n \leq \frac{1}{2}n(n+1)$, ou :

COROLLAIRE. Dans les conditions (8) on a :

$$N \leq \frac{1}{2}n(n+3)$$

PREUVE DU LEMME. Si $\text{Ker } \pi \neq 0$, alors il existe un élément $\psi \in V^{N-n}$, $\psi \neq 0$, qui obéit $\pi(\psi) = 0$. Soit $\phi \in V^{N-n}$ une fonction linéaire avec gradient proportionnel au vecteur q . Par exemple la fonction $q(y \cdot q)$ (produit scalaire, variable $y \in E^N$). C'est évident que $\pi(\psi)$ est positif défini. Si λ est un nombre réel, on a

$$\pi(\phi + \lambda\psi) = \pi(\phi) + \lambda\pi(\psi) = \pi(\phi)$$

On sait que $f(X^n)$ n'est contenu dans aucun hyperplan. C'est pourquoi il existe une valeur λ telle que l'hyperplan $\phi + \lambda\psi = 0$ divise $f(X)$ en trois parties non vides $\phi + \lambda\psi > 0$, < 0 et $= 0$. La fonction $(\phi + \lambda\psi) \circ f$ possède un point critique d'indice n au point $x_0 \in X$, mais la valeur en ce point n'est pas la valeur maximum sur X . Alors il existe une fonction linéaire $\chi \in \mathbb{R}$, suffisamment proche de la fonction $\phi + \lambda\psi$, dont la composition avec f possède au moins 2 points critiques non singuliers d'indice n : en tenant compte de (8) cela contredit la minimalité de f .

On dira qu'un système linéaire de formes quadratiques sur n variables $\xi_1, \dots, \xi_n$ qui contient au moins une forme définie positive tolère un $n+1$ -tuple de nombres

$\beta_* = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n)$, si pour chaque k avec $\beta_k = 0$, le système ne contient aucune forme d'indice k . Soit $g(\beta_*)$ la dimension maximale d'un tel système linéaire de formes quadratiques sur n variables, qui tolère β_* . Alors on a :

THEOREME 2. Si f est une immersion minimale d'une variété compacte connexe X^n proprement dans l'espace euclidien E^N , et si X^n obéit les conditions (8), alors

$$N \leq n + g(\beta_*(X^n))$$

CAS SPECIAUX :

- a) X^n , $g \leq \frac{1}{2}n(n+1)$, $N \leq \frac{1}{2}n(n+3)$ (voir [2]).
- b) $X^n = S^n$ le n -sphère, $\beta_* = (1, 0, 0, \dots, 0, 1)$, $g = 1$, $N \leq n+1$
(Fenchel $n = 1$; Chern-Lashof $n = n$ [1]).
- c) $\beta_1(X^n) = 0$, $n = 2m$ ou $2m+1$, $g \leq m^2$, $N \leq n+m^2$
par exemple les espaces projectifs complexes.
- d) $P^2(K)$, le plan quaternionnien $n = 8$, $\beta_* = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1)$
 $g = 6$, $N \leq 14$.
- e) Le plan des octaves de Cayley, $n = 16$, $\beta = \beta_8 = \beta_{16} = 1$,
 $\beta_i = 0$ pour les autres i , $g = 10$, $N \leq 26$.

Remarquons que dans les cas des plans projectifs c), d), e), on peut réaliser la limite pour N du théorème, par des immersions minimales.

DEMONSTRATION DU THEOREME 2. Avec les notations plus haut il suffit de démontrer que $\pi(V^{N-n})$, un système linéaire de formes quadratiques, tolère $\beta_*(X)$. Si le système ne tolère pas $\beta_*(X)$, alors il existe $\psi \in V^{N-n}$ et k , ainsi que $\pi(\psi)$ a l'indice k , tandis que $\beta_k(X) = 0$. Alors pour une fonction linéaire sur E^N , χ , assez près de ψ on peut assurer que la composition $\chi \circ f$ est un élément de Φ , et que

$$\beta_k(X^n, \chi \circ f) > \beta_k(X^n) = 0$$

Cela contredit la minimalité suivant le théorème 1.

Pour démontrer les cas spéciaux, il faut calculer la fonction $g(\beta_*)$. Je ne connais la valeur de $g(\beta_*)$ que pour des cas spéciaux. Le cas a) est trivial. Dans le cas b) toutes les formes non singulières du système sont définies positives alors $g = 1$. Dans les cas d) et e), et plus généralement dans le cas $n = 2m$, $\beta_0 = \beta_n = 1$, $\beta_m \neq 0$, $\beta_i = 0$ pour $i \neq 0, m, 2m$, on trouve une représentation des formes du système par des matrices symétriques de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda & B \\ {}^t B & \mu \end{pmatrix}$$

dont les quatre symboles sont des matrices $m \times m$; λ et μ sont scalaires, c'est-à-dire multiples d'une matrice-unité, B est similaire c'est-à-dire une multiple scalaire d'une matrice orthogonale.

tB est le transposé de B . Alors il faut déterminer les systèmes linéaires de dimensions maximales, des matrices $m \times m$ semblables B . Ces systèmes sont étudiés par Hurwitz [3]. Dans les cas $m = 2, 4, 8$, on trouve par exemple les systèmes de dimensions 2, 4, 8 :

$$\begin{array}{c} \overbrace{\hspace{10em}}^8 \\ \overbrace{\hspace{4em}}^4 \\ \overbrace{\hspace{2em}}^2 \\ \left| \begin{array}{cccccccc} x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 & -x_5 & -x_6 & -x_7 & -x_8 \\ x_2 & x_1 & -x_4 & x_3 & -x_6 & x_5 & -x_8 & x_7 \\ x_3 & x_4 & x_1 & -x_2 & -x_7 & x_8 & x_5 & -x_6 \\ x_4 & -x_3 & x_2 & x_1 & x_8 & x_7 & -x_6 & -x_5 \\ x_5 & x_6 & x_7 & -x_8 & x_1 & -x_2 & -x_3 & x_4 \\ x_6 & -x_5 & -x_8 & -x_7 & x_2 & x_1 & x_4 & x_3 \\ x_7 & x_8 & -x_5 & x_6 & x_3 & -x_4 & x_1 & -x_2 \\ x_8 & -x_7 & x_6 & x_5 & -x_4 & -x_3 & x_2 & x_1 \end{array} \right| \end{array}$$

et dans ces $g(\beta_*)$ est $2 + 2 = 4$, $4 + 2 = 6$ et $8 + 2 = 10$.

Le cas spécial c) demande bien plus de calculs et je ne veux pas y insister dans cette conférence. Pour $n = 2m = 6$ on a un exemple d'un système de dimension maximale $m^2 = 9$,

$$\left| \begin{array}{cccccc} a & 0 & p & q & r & s \\ 0 & a & -q & p & -s & r \\ p & -q & b & 0 & u & v \\ q & p & 0 & b & -v & u \\ r & -s & u & -v & c & 0 \\ s & r & v & u & 0 & c \end{array} \right|$$

Bibliographie

- [1] CHERN S.S. and LASHOF R.K., On the total curvature of immersed manifolds I. Am. J. Math. 79 (1957), 396-418 ; II Mich. Math. J. 5 (1958), 5-12.
- [2] KUIPER, Nicolaas H., Immersions with minimal total absolute curvature. Coll. de Géométrie Différentielle, Bruxelles, décembre 1958, à paraître.
- [3] HURWITZ, A., Math. Werke II p. 641 = Math. Ann. 88 (1923), 1-25.