

SÉMINAIRE DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

S. DOLBEAULT-LEMOINE

Variétés réductibles plongées dans un espace à courbure constante

Séminaire de topologie et géométrie différentielle, tome 2 (1958-1960), exp. n° 1, p. 1-9

http://www.numdam.org/item?id=SE_1958-1960__2__A1_0

© Séminaire de topologie et géométrie différentielle
(Secrétariat mathématique, Paris), 1958-1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire de topologie et géométrie différentielle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

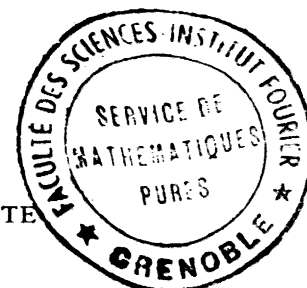
NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Novembre 1958

VARIETES REDUCTIBLES
 PLONGEES DANS UN ESPACE A COURBURE CONSTANTE

par S. DOLBEAULT-LEMOINE



Cet exposé résume un article à l'impression dans les «Rendiconti di Matematica» ; il a pour but l'étude des variétés V_{n-1} , de dimension $n-1$, plongées dans un espace V_n , de classe C^ω , à courbure constante K non nulle, lorsque ce plongement est partout régulier de classe C^r ($r > 3$) et induit sur V_{n-1} une structure riemannienne réductible de classe C^r . Une étude locale permet d'abord de déterminer la métrique de V_{n-1} ; ensuite nous ferons une étude globale des V_{n-1} plongées soit dans la sphère S_n , soit dans l'espace projectif réel P_n .

1. Réductibilité locale. A tout point $x \in V_{n-1}$, associons un repère orthonormé constitué par n vecteurs $\vec{e}_1(x), \dots, \vec{e}_n(x)$ de l'espace vectoriel tangent en x à V_n , dont l'un, $\vec{e}_p(x)$, est normal en x à V_{n-1} .

La réductibilité de V_{n-1} se traduit localement par le fait que la métrique est décomposable [3], c'est-à-dire que les formes de Pfaff associées au repère mobile dans le formalisme de E. Cartan peuvent être séparées en au moins deux systèmes dont chacun est complètement intégrable ; nous supposons d'abord qu'il existe seulement deux tels systèmes, désignés respectivement par ω^i , ω^a , où i et a sont des éléments des ensembles d'indices :

$$I = \{1, \dots, p-1\}, \quad A = \{p+1, \dots, n\};$$

ceci se traduit par la condition

$$(1) \quad \omega_i^a = 0,$$

portant sur la forme de connexion. Par différentiation extérieure de (1), il vient :

$$(2) \quad \omega_i^p \wedge \omega_p^a + \Omega_i^a = 0$$

où Ω_i^a désigne la restriction à V_{n-1} de la forme de courbure de V_n , relative aux mêmes indices i et a . La variété V_{n-1} étant supposée de classe C^r , le calcul précédent exige $r \geq 3$.

Considérons la forme asymptotique ϕ de V_{n-1} pour le plongement envisagé dans V_n . Exprimée à l'aide de K , des composantes de ϕ et des symboles de Kronecker, la condition (2) est, par suite de l'indépendance des formes ω^i , ω^α , équivalente au système suivant :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi_{ik} \phi_{aj} - \phi_{ij} \phi_{ak} = 0, \quad \phi_{i\beta} \phi_{\alpha\gamma} - \phi_{i\gamma} \phi_{\alpha\beta} = 0, \\ \phi_{ik} \phi_{\alpha\beta} - \phi_{i\beta} \phi_{\alpha k} - K \delta_{ik} \delta_{\alpha\beta} = 0, \end{array} \right. \quad \left(\begin{array}{l} i, j, k \in I, \\ \alpha, \beta, \gamma \in A. \end{array} \right)$$

Pour $n > 3$, il résulte du système (3) d'une part qu'il existe deux ensembles d'indices I et A , et deux seulement et, d'autre part, qu'il existe deux constantes r et ρ , liées à K par la relation

$$(4) \quad r\rho = K,$$

et telles que

$$(5) \quad \phi_{ik} = r\delta_{ik}, \quad \phi_{\alpha\beta} = \rho\delta_{\alpha\beta}$$

Pour $n = 3$, le système (3) se réduit à une seule équation qui, jointe à un système de deux équations aux dérivées partielles linéaires du premier ordre (équations de Codazzi) montre que ϕ dépend de deux fonctions arbitraires d'une variable.

En résumé, on a obtenu le

LEMME 1. Soit V_{n-1} une variété régulièrement plongée dans un espace V_n à courbure constante non nulle, et munie par ce plongement d'une métrique partout décomposable ; si, de plus, $n > 3$, la forme asymptotique de V_{n-1} se décompose en la somme de deux formes quadratiques dont chacune est proportionnelle à la partie correspondante de la métrique ; si $n = 3$, la variété V_{n-1} est localement déformable.

Pour $n > 3$, considérons, au point $x \in V_{n-1}$, la variété intégrale $V_{p-1}(x)$ (resp. $V_{n-p}(x)$) du système $\omega^\alpha = 0$ (resp. $\omega^i = 0$) ; une étude locale montre que $V_{p-1}(x)$ (resp. $V_{n-p}(x)$) est munie par son plongement dans V_n d'une structure de variété riemannienne de dimension $p-1$ (resp. $n-p$) à courbure K_I (resp. (K_A)) constante. On trouve en effet :

$$(6) \quad K_I = K + r^2, \quad K_A = K + \rho^2 ;$$

l'élimination de r et ρ entre les équations (4) et (6) donne

$$(7) \quad K_I K_A - K(K_I + K_A) = 0.$$

REMARQUE. Le calcul de K_I et K_A suppose essentiellement que les ensembles I et A ne sont pas réduits à un seul élément et que K n'est pas nul. Si I (resp. A) est réduit à un

seul élément, il suffit de remarquer que $V_{p-1}(x)$ (resp. $V_{n-p}(x)$) est localement isométrique à la droite réelle R^1 . Pour $K = 0$, voir [1].

Compte tenu du signe de K , on obtient le

THEOREME 1. Soit V_{n-1} une variété de dimension $n-1$, munie d'une métrique décomposable par un plongement de classe $C^r (r \geq 3)$ dans un espace V_n de dimension n et de courbure constante K .

1° Si K est positif et si n est supérieur ou égal à quatre, la métrique de V_{n-1} est la somme :

- soit de deux métriques à courbures constantes positives,
- soit d'une métrique à courbure constante positive et du carré d'une différentielle exacte.

(Au cas $n = 3$ correspond évidemment une métrique localement euclidienne).

2° Si K est négatif, V_{n-1} peut être une variété localement euclidienne, sinon sa métrique est la somme :

- soit de deux métriques à courbures constantes, l'une positive, l'autre négative,
- soit d'une métrique à courbure constante (positive ou négative) et du carré d'une différentielle exacte.

2. Réductibilité dans la sphère S_n . Supposons que V_n est la sphère S_n de courbure riemannienne K ; alors, d'après la première partie du théorème 1, $V_{p-1}(x)$ (resp. $V_{n-p}(x)$) est localement isométrique à la sphère S_{p-1} (resp. S_{n-p}) de courbure K_1 (resp. K_A). Or l'existence d'un plongement isométrique et régulier du produit topologique et riemannien $S_{p-1} \times S_{n-p}$ dans S_n est un fait bien connu que nous mettrons suffisamment en évidence en considérant, comme espace auxiliaire, l'espace numérique réel R^{n+1} . Un choix convenable d'axes de coordonnées rectangulaires permet de définir ce produit par les équations :

$$(8) \quad \sum_{i=1}^p x_i^2 = 1/K_1, \quad \sum_{i=p+1}^{n+1} x_i^2 = 1/K_A.$$

Il est plongé dans la sphère S_n d'équation :

$$(9) \quad \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1/K.$$

Cette construction donne en particulier le plongement du tore T_2 dans S_3 .

Inversement, soit V_{n-1} la plus générale des variétés de dimension $n-1$, connexes par arcs, régulièrement plongées dans S_n , et munies par ce plongement de métriques partout décomposables. Alors, chacun des systèmes de Pfaff $\omega^i = 0$, $\omega^a = 0$, définit

sur V_{n-1} une structure feuilletée [2] et toute variété intégrale maximale de l'un d'eux est une feuille ; restreignons la notation $V_{p-1}(x)$, $V_{n-p}(x)$ à la composante connexe de x des deux feuilles passant par x .

Supposons $n > 3$. Une étude locale de la variété $V_{p-1}(x)$ montre que tout point $y \in V_{p-1}(x)$ possède un voisinage $U(y)$ qui est non seulement isométrique à la sphère $S_{p-1}(y)$ de courbure K_I qui lui est tangente en y , mais encore admet les mêmes formes asymptotiques que $S_{p-1}(y)$, relativement au plongement dans S_n , de sorte que, d'après un théorème de rigidité [1],

$$(10) \quad U(y) \subset S_{p-1}(y) ;$$

si, de plus, V_{n-1} est supposée complète pour la métrique induite par son plongement dans S_n , $V_{p-1}(x)$ l'est aussi (car c'est une variété intégrale maximale d'un système de Pfaff complètement intégrable sur V_{n-1} , donc une variété complète pour son plongement dans V_{n-1}) et l'on peut constituer un atlas sur $V_{p-1}(x)$ à l'aide de cartes telles que $U(y)$, de sorte que

$$(11) \quad V_{p-1}(x) = S_{p-1}(x).$$

En général, nous ne pouvons affirmer que $V_{p-1}(x)$ soit une variété complète pour la métrique induite par son plongement dans S_n , mais nous pouvons toujours constituer un atlas sur $V_{p-1}(x)$ à l'aide de cartes $U(y)$ vérifiant (10) ; alors, dans la relation (11), l'égalité est remplacée par l'inclusion.

Une étude semblable peut être faite pour la feuille $V_{n-p}(x)$.

La variété V_{n-1} pouvant être considérée comme la réunion des feuilles de chacun des deux systèmes, on a ainsi obtenu le

THEOREME 2. *Il existe des variétés de dimension $n-1$, régulièrement plongées dans la sphère de dimension n et munies, par ce plongement, de métriques partout décomposables ; pour $n > 3$, chaque composante connexe d'une telle variété est contenue dans le produit topologique et riemannien de deux sphères de dimensions respectives $p-1$ et $n-p$.*

REMARQUES. a) Ce théorème n'exclut pas la possibilité, pour les feuilles de l'un des systèmes, d'être de dimension un, c'est-à-dire homéomorphes à un cercle ou contenues dans un cercle, suivant qu'elles sont complètes ou non.

b) Pour $n = 3$, on a trouvé un plongement du tore T_2 dans S_3 , mais on ne peut pas affirmer que toute V_2 régulièrement plongée dans S_3 et munie par ce plongement d'une métrique partout décomposable soit contenue dans T_2 , car nous avons vu, au n° 1, qu'une telle V_2 est localement déformable.

c) Des relations entre holonomie et réductibilité, il résulte que parmi les V_{n-1} régulièrement plongées dans S_n , les seules variétés à groupe d'holonomie homogène réductible sont celles qui sont munies par leur plongement d'une métrique partout décomposable ; chaque composante connexe d'une telle variété a un groupe d'holonomie homogène isomorphe à un sous-groupe du produit direct de deux groupes de rotations ; si, de plus, l'une de ces composantes connexes est une variété complète pour la métrique induite par son plongement dans S_n , son groupe d'holonomie homogène est isomorphe au produit direct de deux groupes de rotations. Cette dernière remarque est à rapprocher de résultats obtenus par Kobayashi [4].

3. Réductibilité dans l'espace projectif réel P_n . Considérons la sphère S_n , de courbure K , plongée dans R^{n+1} , et désignons par $d(x, x')$ la distance de deux points, x et x' , mesurée dans R^{n+1} . Soit $\mathfrak{R}$ la relation d'équivalence suivante dans S_n : les deux points x et x' sont équivalents s'ils sont diamétralement opposés sur S_n (autrement dit, si $x, x' \in S_n$ et si $d(x, x') = 2K^{-1/2}$). On sait que P_n est homéomorphe à $S_n / \mathfrak{R}$. Supposons P_n muni d'une métrique localement sphérique.

Considérons le produit $V_{n-1} = S_{p-1} \times S_{n-p}$, plongé dans S_n , et montrons qu'il est saturé pour $\mathfrak{R}$. En effet, soient successivement le point $x \in V_{n-1}$, le point y diamétralement opposé à x sur $S_{p-1}(x)$ et le point x' diamétralement opposé à y sur $S_{n-p}(y)$; on a :

$$(12) \quad d(x, y) = 2K_I^{-1/2}, \quad d(y, x') = 2K_A^{-1/2} ;$$

Des formules (7) et (12), il résulte :

$$(13) \quad d(x, x') = 2K^{-1/2} ;$$

mais x' est un point de S_n , puisque $V_{n-1} \subset S_n$. Donc V_{n-1} est bien saturé pour $\mathfrak{R}$. Passons aux quotients : à S_n correspond P_n , à V_{n-1} correspond un ensemble W_{n-1} ; ceci se résume dans le diagramme commutatif suivant :

$$(14) \quad \begin{array}{ccc} V_{n-1} & \longrightarrow & W_{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_n & \longrightarrow & P_n \end{array}$$

où les flèches verticales désignent l'inclusion et les flèches horizontales l'application naturelle de S_n sur P_n et sa restriction à V_{n-1} .

L'étude du diagramme (14) montre que :

- a) W_{n-1} est une variété différentiable de dimension $n-1$, régulièrement plongée dans P_n ,
- b) la métrique induite sur W_{n-1} est partout décomposable,
- c) W_{n-1} est complète pour cette métrique.

Il en résulte le

LEMME 2. *Il existe des W_{n-1} munies, par un plongement régulier dans P_n , de structures riemanniennes complètes à métriques partout décomposables ; chacune de ces variétés admet pour revêtement le produit topologique et riemannien $S_{p-1} \times S_{n-p}$.*

Inversement, pour $n > 3$, par un raisonnement analogue à celui fait pour les variétés à métrique décomposable plongées dans S_n , on montre que la rigidité de W_{n-1} dans P_n a pour conséquence le

LEMME 3. *Pour $n > 3$, toute W_{n-1} connexe par arcs, régulièrement plongée dans P_n et munie par ce plongement d'une métrique partout décomposable peut être prolongée en une variété qui est complète pour son plongement dans P_n et qui admet pour revêtement le produit topologique et riemannien de deux sphères de dimensions respectives $p-1$ et $n-p$.*

Reprenons le diagramme (14) où V_{n-1} est supposée complète pour son plongement dans S_n , et considérons un couple de feuilles de V_{n-1} équivalentes pour $\mathfrak{R}$: ce couple s'applique sur un ensemble contenu dans W_{n-1} . Posons :

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} (S_{p-1}(x), S_{p-1}(x')) \longrightarrow \Sigma_{p-1}(\xi), \\ (S_{n-p}(x), S_{n-p}(x')) \longrightarrow \Sigma_{n-p}(\xi). \end{array} \right.$$

Du diagramme (14), il résulte que les ensembles $\Sigma_{p-1}(\xi)$, (resp. $\Sigma_{n-p}(\xi)$) sont des variétés de dimension $p-1$ (resp. $n-p$), complètes pour la métrique induite par plongement dans P_n ; par chaque point ξ de W_{n-1} passe un couple et un seul de ces variétés, car ce point ξ correspond biunivoquement à un couple de points x, x' équivalents pour $\mathfrak{R}$ sur V_{n-1} . Ainsi les $\Sigma_{p-1}(\xi)$, $\Sigma_{n-p}(\xi)$ définissent sur W_{n-1} une structure doublement feuilletée.

Cherchons l'intersection de deux feuilles de systèmes différents. Pour cela, considérons sur V_{n-1} les points x, x' et y vérifiant les formules (12) et adjoignons-leur le point y' équivalent à y pour $\mathfrak{R}$. L'étude de (14) montre que, si η désigne le point de W_{n-1} qui correspond au couple (y, y') , on a :

$$(16) \quad \Sigma_{p-1}(\xi) \cap \Sigma_{n-p}(\xi) = \{\xi, \eta\},$$

de sorte que W_{n-1} n'est pas homéomorphe à un produit topologique.

Résumons :

THEOREME 3. *Il existe des variétés W_{n-1} régulièrement plongées dans P_n et munies par ce plongement de métriques partout décomposables ; pour $n > 3$, chaque composante connexe d'une telle variété est contenue dans une variété de même dimension et complète*

pour son plongement dans P_n ; cette dernière variété n'est pas homéomorphe à un produit topologique, mais admet un revêtement à deux feuillets qui est le produit topologique et riemannien de deux sphères de dimensions respectives $p-1$ et $n-p$.

REMARQUES. a) Le revêtement précédent est le revêtement universel de W_{n-1} si et seulement si les inégalités suivantes sont satisfaites :

$$n-2 \geq p \geq 3.$$

Dans tous les autres cas, le revêtement universel de W_{n-1} est le produit de S_{n-2} par R^1 .

b) Indépendamment de toute question de plongement, il est possible de construire, à partir d'une W_{n-1} connexe par arcs et complète, une variété $\underline{W}_{n-1}$ qui est elle-même connexe par arcs, complète et qui, de plus, est homéomorphe à un produit topologique : cette $\underline{W}_{n-1}$ est la variété quotient de W_{n-1} par la relation d'équivalence qui identifie les deux points d'intersection, ξ et η , de deux feuilles de systèmes différents de W_{n-1} . Ceci constitue un exemple d'un théorème dû à A.G. Walker ; une variété à métrique partout décomposable qui n'est pas réductible admet un revêtement réductible et est elle-même un revêtement d'une variété réductible [5].

4. Remarque sur le plongement d'une variété localement euclidienne dans un espace de Riemann à courbure constante négative.

a. Soit V_n un espace de Riemann de dimension n , à courbure constante négative K . En cherchant à déterminer des variétés plongées dans V_n et munies par ce plongement de métriques partout décomposables, on a fait apparaître des V_{n-1} localement euclidiennes. On en déduit, par restriction, l'existence de variétés V_q ($q < n-1$) localement euclidiennes et plongées dans V_n . De l'étude locale, il résulte encore que l'une des formes asymptotiques de V_q , obtenue par restriction sur celle de V_{n-1} , peut être :

- soit une forme quadratique proportionnelle à la métrique,
- soit la somme de deux formes quadratiques dont chacune est proportionnelle

à la partie correspondante de la métrique,

et que les coefficients de proportionnalité ne sont pas nuls si $q > 1$,

Plus généralement, pour $q > 1$, considérons une variété V_q , plongée dans V_n par un plongement de classe C^r ($r = 3$) et munie par ce plongement d'une structure localement euclidienne. Alors, si l'on associe à tout point x de V_q un repère orthonormé de l'espace vectoriel tangent en x à V_q , dont les q premiers vecteurs appartiennent à l'espace vectoriel tangent en x à V_q , les équations de Gauss relatives au plongement de V_q dans V_n s'écrivent :

$$\delta_{\alpha\beta}(\phi_i^\alpha \phi_j^\beta \phi_j^\beta \phi_i^\alpha - \phi_i^\alpha \phi_j^\beta \phi_j^\beta \phi_i^\alpha) = K(\delta_{ib} \delta_{jk} - \delta_{ik} \delta_{jb}),$$

avec $i, j, b, k \in \{1, \dots, q\}$, $\alpha, \beta \in \{q+1, \dots, n\}$.

Le second membre n'étant pas identiquement nul, le premier ne peut pas l'être : il existe donc des coefficients $\phi_i^{\alpha}{}_{\bar{k}}$ non nuls, d'où le lemme : *si une variété localement euclidienne de dimension supérieure à un est plongée, par un plongement de classe C^r ($r \geq 3$), dans un espace à courbure constant négative, ses formes asymptotiques $\phi^{\alpha} = \phi_i^{\alpha}{}_{\bar{k}} \omega^i \omega^{\bar{k}}$ ne peuvent être toutes identiquement nulles.*

b. Soit R^N l'espace numérique réel de dimension N . On sait que pour $N = \frac{n}{2}(n+1)(3n+11)$, toute variété riemannienne de dimension n , de classe C^r ($r > 3$) admet un plongement isométrique global, de classe C^r , dans R^N . [6].

Considérons donc :

$$V_q \subset V_n \subset R^N$$

et complétons le repère associé au point $x \in V_q$ de manière à obtenir un repère de R^N . Parmi les formes asymptotiques de V_q pour son plongement dans R^N figurent les formes ϕ^{α} précédentes. Donc *les formes asymptotiques de V_q pour son plongement dans R^N ne sont pas toutes identiquement nulles.*

D'autre part, considérons l'espace numérique réel R^q plongé dans R^N . A tout point de R^q , associons un repère orthonormé de R^q , dont les q premiers vecteurs appartiennent à R^q ; les $N-q$ formes asymptotiques de R^q pour son plongement dans R^N sont *identiquement nulles*. Ainsi apparaît une contradiction entre les propriétés de V_q et celles de R^q , d'où :

THEOREME. *Il n'existe pas de plongement isométrique et régulier de classe C^r ($r > 3$) de l'espace numérique réel R^q ($q > 2$) dans un espace de Riemann à courbure constante négative.*

Ce résultat ne figure pas dans mon article des «Rendiconti di Matematica».

Bibliographie.

- [1] S. DOLBEAULT-LEMOINE. Sur la déformabilité des variétés plongées dans un espace de Riemann, Ann. Sci. E.N.S. 73, 1956, p. 357-438.
- [2] C. EHRESMANN. Sur la théorie des variétés feuilletées, Rend. di Mat. e delle sue Appli. (V), X, 1951, p. 1-19.
- [3] F.A. FICKEN. The riemannian and affine differential geometry of product spaces Ann. of Math., 40, 1939, p. 892-913.
- [4] S. KOBAYASHI. Holonomy groups of hypersurfaces ; Induced connections and imbedded riemannian spaces, Nagoya Math. J., 10, 1956.
- [5] A.G. WALKER. The fibring of Riemannian manifolds, Proc. Lond. Math. Soc. (3) 3, 1953, p.1-19.
- [6] J. NASH. The imbedding problem for Riemannian manifolds, Ann. of Math. 63, 1956, p. 20-63.