

SÉMINAIRE DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

CH. PEROL

Sur les extensions compactes des espaces topologiques

Séminaire de topologie et géométrie différentielle, tome 2 (1958-1960), exp. n° 12, p. 1-33

<http://www.numdam.org/item?id=SE_1958-1960__2__A12_0>

© Séminaire de topologie et géométrie différentielle
(Secrétariat mathématique, Paris), 1958-1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire de topologie et géométrie différentielle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>).
Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES EXTENSIONS COMPACTES DES ESPACES TOPOLOGIQUES

par Ch. PEROL

INTRODUCTION

LE PROBLEME. Etant donné un espace topologique, E , nous nous proposons d'étudier les espaces compacts, $\hat{E}$, tels que E soit homéomorphe à une partie, E' , partout dense de E .

ENSEMBLE DES SOLUTIONS. Nous verrons bientôt que, pour que le problème ait des solutions, il faut et il suffit que l'espace E soit complètement régulier (cette notion sera précisée au moment voulu).

Mais lorsque le problème a des solutions, il est possible qu'il en ait plusieurs. C'est ce que nous allons faire voir sur des exemples simples.

L'ESPACE R DES NOMBRES REELS.

1°) Nous pouvons plonger R dans la droite projective, nous obtenons ainsi une solution, qui dans une classification que nous étudierons, recevra le nom de «Solution la moins étendue».

2°) En plongeant R , suivant la méthode classique en analyse dans la droite achevée, nous obtenons une autre solution qui, dans un cas plus général, a été étudiée par Freudenthal.

Ces deux solutions sont simples, mais on pourrait en imaginer d'autres, par exemple la suivante :

3°) Considérons l'ensemble E , somme de la droite numérique R et de deux cercles C_+ et C_- , c'est-à-dire deux exemplaires de l'espace quotient de R par la relation d'équivalence définie par

$$«x = y»$$

« $x-y$ est entier»

NOTE DE C. EHRESMANN

Ce mémoire a été préparé sous ma direction et soutenu comme Diplôme d'Etudes Supérieures à l'Université de Strasbourg en Février 1947. Il a été exposé par J. BENABOU lors de mon Séminaire de Topologie et de Géométrie Différentielle à Paris en 1959. Les résultats indiqués ne sont plus inédits à l'heure actuelle, mais la lecture du mémoire peut toujours être très utile, ce qui justifie sa publication même tardive. Certaines démonstrations figurant dans le manuscrit ont été supprimées en particulier celles qui se trouvent dans la deuxième édition de Topologie Générale de N. BOURBAKI (Chap. I, § 10, n° 6, Prop. 8 et Cor. 1).

L'application canonique de R dans C fait correspondre à un élément de R l'élément de C qui est sa classe d'équivalence.

On appellera intervalle ouvert de C_+ , et on notera I_{C_+} , l'image sur C_+ , par l'application canonique, d'un intervalle ouvert I de R .

Etant donné l'intervalle I_{C_+} de C_+ et le nombre N , faisons leur correspondre la partie de E réunion de I_{C_+} et de la trace sur $]N \rightarrow]$ de l'image canonique réciproque de I_{C_+} . Notons $I_{C_+}^N$ cette partie de E .

Nous définissons de la même manière $I_{C_-}^N$ réunion de I_{C_-} et de la trace sur $[\leftarrow N[$ de l'image canonique réciproque de I_{C_-} .

Lorsque I parcourt l'ensemble des intervalles ouverts de R et N l'ensemble des entiers, l'ensemble des I , des $I_{C_+}^N$ et des $I_{C_-}^N$ engendre une topologie sur E . Cette topologie induit sur R sa topologie ordinaire.

Elle est telle que R est partout dense dans $\hat{E}$ puisque toute intersection finie non vide des générateurs rencontre R .

Elle est séparée, nous le vérifions en faisant 5 classes dans l'ensemble des couples de points de E .

α) $a \in R, b \in R$: Si nous supposons de plus $a < b$ et si ε est un nombre positif les deux intervalles ouverts $]a-\varepsilon, \frac{a+b}{2}[$ et $] \frac{a+b}{2}, b+\varepsilon[$ sont des voisinages de a et b sans point commun.

β) $a \in R, b \in C_+$: On prendra comme voisinage de a un ouvert borné contenant a , $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$, et comme voisinage de b un ouvert de la forme $I_{C_+}^N$ défini par un I_{C_+} contenant b et un nombre N plus grand que $a+\varepsilon$.

γ) $a \in R, b \in C_-$: Même méthode avec un ouvert $I_{C_-}^N$ où N est inférieur à $a-\varepsilon$.

δ) $a \in C_+, b \in C_+$ (resp $a \in C_-$ et $b \in C_-$) : On prendra 2 ouverts $I_{C_+}^N$ (resp $I_{C_-}^N$) définis par deux intervalles I_{C_+} (resp I_{C_-}) sans point commun.

ε) $a \in C_+, b \in C_-$: On prendra un $I_{C_+}^N$ contenant a et un $I_{C_-}^N$ contenant b définis par le même N .

Enfin notre topologie vérifie l'axiome de Borel-Lebesgue. En effet considérons un recouvrement de E par des ouverts, nous pouvons en extraire un recouvrement fini de la partie C_+ qui est compacte car munie de la topologie habituelle du cercle. Soit $O_1, O_2, O_3, \dots, O_n$ ce recouvrement. Montrons que $O_1, O_2, \dots, O_n$ recouvre aussi un intervalle, illimité à droite, de la partie R de E .

Quelque soit $e \in C_+$, il existe un O_i qui le contient, soit $O_{i(e)}$. Montrons qu'il existe un générateur contenant e et contenu dans $O_{i(e)}$. Puisque $O_{i(e)}$ est un voisinage de e il existe une intersection finie de générateurs contenant e et contenue dans $O_{i(e)}$. Il

nous suffit de montrer que toute intersection finie de générateurs contenant e contient un générateur, et pour cela nous pouvons nous limiter à une intersection de deux générateurs. Soit $I_{C_+}^N$ un générateur formé à partir de l'intervalle I_{C_+} de C_+ . Pour que $I_{C_+}^N$ contienne e il faut et il suffit que I_{C_+} le contienne. Soit un autre générateur $I_{C_+}^{N'}$ contenant e , $I_{C_+}^{N'}$ contient aussi e . $I_{C_+} \cap I_{C_+}^{N'}$ est constitué par un ou deux intervalles ouverts du cercle C_+ dont l'un contient e , soit J_{C_+} cet intervalle de C_+ . Désignons par M le plus grand des deux nombres N et N' . $J_{C_+}^M$ est un générateur contenant e et contenu à la fois dans $I_{C_+}^N$ et $I_{C_+}^{N'}$, désignons-le par $J(e)$ à la fois pour abrégier et pour rappeler qu'il contient e et est contenu dans $O_{i(e)}$, désignons par $M(e)$ la valeur correspondante du nombre M .

Les ouverts $J(e)$, lorsque e parcourt C_+ , recouvrent C_+ . On peut en extraire un recouvrement fini : $J(a), J(b), \dots, J(p)$, $a, b, \dots, p$ étant des éléments d'une partie finie F de C_+ . Soit M_0 le plus grand des nombres $M(a), M(b), \dots, M(p)$. $\bigcup_{k \in F} J(k)$ recouvre l'intervalle illimité $R]M_0 \rightarrow]$ qui est par suite recouvert aussi par la famille O ($i=1, \dots, n$).

De même, il existe un recouvrement fini $O_{n+1}, \dots, O_{n+m}$ de C_- extrait de notre recouvrement ouvert et il existe un M' assez petit tel que les O_j ($n+1 < j < n+m$) recouvrent l'intervalle $(\leftarrow M'_0$ de R . Mais alors, (M'_0, M_0) est compact donc recouvert par une famille finie, $O_{n+m+1}, \dots, O_{n+m+p}$, extraite de la famille d'ouverts initiale. $O_1, \dots, O_{n+m+p}$ est un recouvrement fini de $\hat{E}$ extrait du recouvrement initial. c.q.f.d.

4°) Si nous identifions sur la solution précédente un point de C_+ et un point de C_- qui correspondent à un même point de R par la relation d'équivalence, nous vérifierions que nous obtenons encore une solution et ceci résultera d'ailleurs d'une proposition que nous établirons plus tard.

5°) En identifiant tous les points de C_+ en un point $+\infty$, nous obtenons encore une solution.

6°) De même, en identifiant tous les points de C_- en un point $-\infty$,

En identifiant tous les points de C_+ d'une part, et tous les points de C_- d'autre part, on retrouve la solution droite achevée. En identifiant ensemble tous les points de C_+ et de C_- on retrouve la solution droite projective.

L'ESPACE R^2 . Sur R^2 nous avons les trois solutions classiques suivantes :

1°) Le plan de Cauchy, qui coïncidera avec la «Solution la moins étendue» et avec la «Solution de Freudenthal».

2°) Le plan projectif.

3°) On peut considérer R^2 comme homéomorphe à l'intérieur d'un cercle que l'on peut ensuite plonger dans son adhérence.

On démontre, en utilisant la théorie de l'homologie, que l'on peut en identifiant convenablement les points du bord de ce cercle, obtenir toutes les variétés à 2 dimensions compactes orientables de R^3 . Il résulte de la manière dont est faite l'identification et de la proposition à laquelle nous avons déjà fait allusion que nous obtiendrons ainsi encore des solutions.

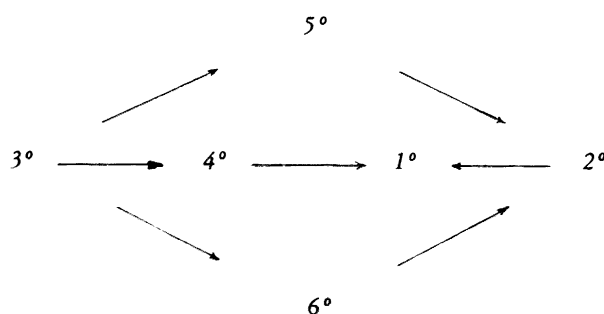
Le théorème de Tychonoff permettrait de trouver de nombreuses solutions au problème dans R^2 à partir de solutions dans R . Les espaces que nous obtiendrions ainsi seraient des espaces produits.

En nous inspirant de la solution 3° de R nous obtiendrions une grande variété de solutions bizarres.

PROGRAMME D'ETUDE DE L'ENSEMBLE DES SOLUTIONS. Ces quelques solutions sur ces 2 exemples suffisent à nous montrer la complexité de l'ensemble des solutions de notre problème. Nous sommes donc conduits ainsi à chercher à ordonner ces solutions et à les rattacher entre elles.

Les exemples donnés nous montrent que certaines solutions peuvent être déduites de certaines autres par identification de points, cette remarque nous conduira à définir une relation d'ordre dans l'ensemble des solutions et nous justifierons alors le nom de «Solution la moins étendue».

Pour les 6 solutions que nous avons données au R , la relation d'ordre peut être schématisée par le croquis ci-dessous.



CHAPITRE PREMIER

PREMIER ASPECT

1. Solutions.

DEFINITION 1. Un espace topologique E étant donné, nous appellerons *solution* l'ensemble d'un espace topologique compact, $\hat{E}$, et d'un homéomorphisme ϕ de E dans une partie partout dense E' de $\hat{E}$.

Nous la noterons $(\hat{E}, \phi)$. Nous dirons que E est le support de la solution.

Nous désignerons par $\hat{\phi}$ l'application biunivoque de E dans $\hat{E}$ composée de l'application canonique de E' dans $\hat{E}$ et de ϕ .

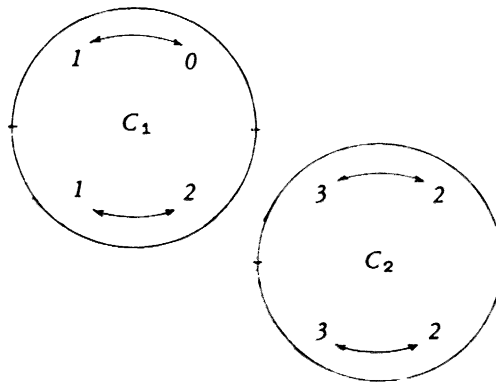
DEFINITION 2. Deux solutions, $(\hat{E}_1, \phi_1)$ et $(\hat{E}_2, \phi_2)$, seront dites *équivalentes* s'il existe un homéomorphisme, ϕ , de $\hat{E}_1$ sur $\hat{E}_2$ qui associe à un point de $\hat{E}_1$ image par $\hat{\phi}_1$ d'un point de E le point de $\hat{E}_2$ image par $\hat{\phi}_2$ du même point de E .

REMARQUE. Cette définition entraîne $\phi_0 \phi_1 = \phi_2$.

Dans notre définition nous avons bien précisé qu'une solution était l'ensemble d'un espace topologique compact et d'un homéomorphisme. Montrons sur un exemple l'importance de l'homéomorphisme.

Il est d'abord bien évident que tous les espaces compacts ne peuvent pas entrer dans la constitution d'une solution du problème, mais si un espace compact entre dans la constitution d'une solution il peut en même temps entrer dans la constitution de solutions non équivalentes comme le montre l'exemple suivant :

Nous considérons l'espace E somme topologique des intervalles de R , $]0, 1[$, $]1, 2[$, $]2, 3[$, $]3, 4[$ et l'espace $\hat{E}$ somme topologique de 2 cercles C_1 et C_2 gradués de 0 à 2π .



L'application ϕ_1 de E dans E définie par :

$\phi_1(\alpha) = \text{Elément } \alpha\pi \text{ de } C_1 \text{ si } \alpha < 2$

$\phi_1(\beta) = \text{Elément } (\beta - 2)\pi \text{ de } C_2 \text{ si } \beta > 2$

fournit une solution (E, ϕ_1) du problème.

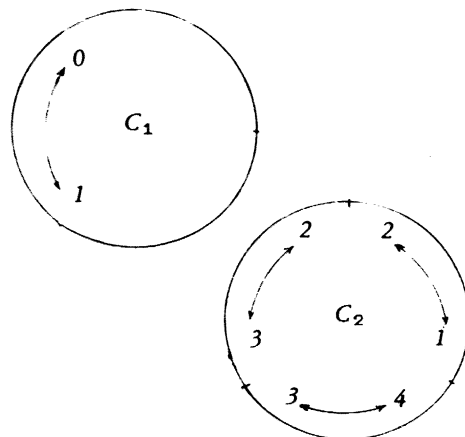
L'application ϕ_2 de E dans E définie par :

$\phi_2(\gamma) = \text{Elément } 2\gamma\pi \text{ de } C_1 \text{ si } \gamma < 1$

$\phi_2(\delta) = \text{Elément } 2\frac{\delta-1}{3} \text{ de } C_2 \text{ si } \delta > 1$

fournit une deuxième solution (E, ϕ_2) .

Ces deux solutions doivent évidemment être regardées comme distinctes, bien que l'espace E soit identique pour les deux.



2. Solutions homéomorphes. Si nous avons une solution $(\hat{E}, \phi)$, et si f est un homéomorphisme de E sur lui-même, $\phi \circ f$ est encore une application continue de E dans E , nous avons donc une autre solution $(\hat{E}, \phi \circ f)$. Nous venons de mettre en évidence une méthode nous permettant de construire des solutions à partir d'une solution donnée. Toutes les solutions que nous obtenons ainsi présentent un caractère commun. La relation entre deux solutions $(\hat{E}_1, \phi_1)$ et $(\hat{E}_2, \phi_2)$, qui s'énonce :

« Il existe un homéomorphisme ψ de $\hat{E}_1$ sur $\hat{E}_2$ dont l'application réduite à $\hat{\phi}_2(E)$ de la restriction à $\hat{\phi}_1(E)$ est un homéomorphisme de $\hat{\phi}_1(E)$ sur $\hat{\phi}_2(E)$ »

est une relation d'équivalence dans l'ensemble des solutions.

DEFINITION 3 : Nous dirons que les solutions $(\hat{E}_1, \phi_1)$ et $(\hat{E}_2, \phi_2)$ sont « homéomorphes » lorsqu'elles sont équivalentes dans ce sens.

« $(\hat{E}_1, \phi_1)$ équivalent à $(\hat{E}_2, \phi_2)$ », au sens de la définition 2, entraîne « $(\hat{E}_1, \phi_1)$ homéomorphe à $(\hat{E}_2, \phi_2)$ ».

Exemple : Sur R , les solutions 5° et 6° de l'introduction sont homéomorphes, comme le montre l'homéomorphisme de nos deux espaces qui, à $a \in R$ de la solution 5°, fait correspondre $-a$ dans la solution 6°, qui à $+\infty$ du 5° fait correspondre $-\infty$ du 6°, et qui associe à l'image canonique dans C_+ du point $a \in R$ l'image canonique dans C_- du point $-a$.

Les deux solutions de l'exemple du début de ce paragraphe ne sont, au contraire, pas homéomorphes.

L'ensemble des solutions, à l'équivalence près, se présente comme un ensemble produit dont un des facteurs est l'ensemble des homéomorphismes de E sur lui-même, l'autre étant l'ensemble des solutions à l'homéomorphisme près.

3. Notations. Etant donné une solution $(\hat{E}, \phi)$, nous poserons $E' = \hat{\phi}(E)$; $\Omega = \hat{\Gamma}(E')$. Nous désignerons par des lettres «coiffées» les éléments de $\hat{E}$ et, lorsque nous les considérerons comme éléments du sous-espace $E' = \hat{\phi}(E)$ nous les désignerons par les mêmes lettres non coiffées mais accentuées, (exemple : $a' \in E'$ est appliqué sur $a \in E$ par l'application canonique de E' dans E). Lorsque nous voudrions préciser qu'un élément appartient à Ω nous le désignerons par une lettre grecque. Pour $a' \in E'$, nous poserons $a = \bar{\phi}^1(a')$.

4. Solutions et ensembles de filtres. A tout $\hat{a} \in \hat{E}$ nous pouvons faire correspondre son filtre des voisinages dans $\hat{E}$, $\mathfrak{V}(\hat{a})$. La trace de $\mathfrak{V}(\hat{a})$ sur E' est un filtre $\mathfrak{F}'(\hat{a})$, sur le sous-ensemble E' puisque $\hat{a}$ est adhérent à E' . L'image $\mathfrak{F}(\hat{a})$ de $\mathfrak{F}'(\hat{a})$ par $\bar{\phi}^1$ est donc un filtre sur E . A deux éléments, $\hat{a}$ et $\hat{b}$, de $E(\hat{a} \neq \hat{b})$ correspondent deux filtres $\mathfrak{F}(\hat{a})$ et $\mathfrak{F}(\hat{b})$ tels que $\mathfrak{F}(\hat{a}) \neq \mathfrak{F}(\hat{b})$ puisqu'il existe un élément de $\mathfrak{V}(\hat{a})$ et un élément de $\mathfrak{V}(\hat{b})$ sans point commun (Séparation de $\hat{E}$). Enonçons donc:

THEOREME. $\hat{E}$ peut être représenté comme un ensemble de filtres de E sur lequel on a défini une topologie convenable.

Une solution détermine l'ensemble des filtres ci-dessus, mais il est bien évident qu'à tout ensemble de filtres ne correspond pas forcément une solution au moins; d'autre part, à priori, il n'est pas exclu qu'à certains ensembles de filtres de E il puisse correspondre plusieurs solutions. Nous allons maintenant insister sur ces points. Mais avant de poursuivre notre étude, il nous sera utile de rappeler quelques notions générales de topologie.

5. Espaces et filtres complètement réguliers.

DEFINITION 4. On appelle espace complètement régulier un espace séparé satisfaisant à l'axiome suivant :

O_V . Quelque soit le point x et le voisinage A de x , il existe une application continue f de E dans $(0, 1)$ nulle au point x et égale à 1 dans A .

DEFINITION 5. Nous appellerons filtre complètement régulier un filtre $\mathfrak{F}$ admettant une base $\mathfrak{B}$ formée d'ouverts tels que si $A \in \mathfrak{B}$ il existe $B \in \mathfrak{B}$ et une application continue f de E dans $(0, 1)$ égale à 1 dans A et à zéro dans B .

La proposition suivante va nous en donner un exemple.

LEMME 1 : La condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace soit complètement régulier est que tous ses filtres de voisinages soient complètement réguliers.

Tout d'abord, il est évident que si tous les filtres de voisinages de l'espace E sont complètement réguliers, E est un espace complètement régulier.

Réciproquement, supposons E complètement régulier et soit $\mathfrak{V}(x)$ le filtre des voisinages de x . Soit V un élément ouvert de $\mathfrak{V}(x)$ et f l'application continue dont il est question dans l'axiome O_V . Soit $W = \bar{f}^{-1}(0, \frac{1}{2})$, c'est un voisinage de x puisque

f est continue. L'application $g = 2f - 1$ applique E dans $(-1, +1)$ et est égale à 1 dans V et < 0 dans W . $g^+ = \text{Max}(0, g)$ est une application continue qui satisfait aux conditions de la définition 5, c'est-à-dire qui est nulle dans W et égale à 1 dans V . $\mathfrak{B}(x)$ est donc un filtre complètement régulier.

LEMME 2 : Si $F \subset E$ et si la trace sur F d'un filtre complètement régulier de E est un filtre, il est complètement régulier pour le sous-espace F .

Il suffit pour s'en convaincre, d'associer à A' , trace de A sur F , la trace B' de B sur F et l'application f' , restriction de f à F .

6. Espaces compacts et filtres complètement réguliers.

LEMME 3. Sur un espace compact, les filtres complètement réguliers sont les filtres qui admettent une base $\mathfrak{B}$ formée d'ouverts et telle que si $A_1 \in \mathfrak{B}$, il existe $A_0 \in \mathfrak{B}$ tel que $\bar{A}_0 \subset A_1$.

Il est d'abord bien évident que tous les filtres complètement réguliers satisfont à cette condition sur tout espace topologique. En effet, avec les notations de la définition 5, nous avons $f^{-1}(\{0\})$ qui est un fermé qui contient B donc $\bar{B}$ et est contenu dans A , d'où $\bar{B} \subset A$.

Réciproquement, supposons que le filtre $\mathfrak{F}$ de base $\mathfrak{B}$ satisfasse aux conditions du lemme. A_1 étant ouvert est un voisinage de A_0 , donc pour tout $a \in A_0$ il existe un voisinage $V(a)$ contenu dans A_1 et nous pouvons supposer ce voisinage fermé puisque E est compact donc régulier. Mais $\bar{A}_0$ fermée dans le compact E est elle-même compacte, donc recouverte par un nombre fini de $V(a)$ soit $V(a_i) \quad i = (1 \dots n)$. $\bigcup_{i=1}^n V(a_i)$ est un fermé contenu dans A_1 et son intérieur $A_{1/2}$ est un voisinage de A_0 . Nous avons donc construit $A_{1/2}$ tel que

$$\bar{A}_0 \subset A_{1/2} \quad \text{et} \quad \bar{A}_{1/2} \subset A_1$$

Par ce procédé, nous sommes en mesure de construire une famille A_α où α parcourt l'ensemble des nombres dyadiques de l'intervalle $(0, 1)$. Cette famille est telle que la condition suivante soit vérifiée : $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ entraîne $\bar{A}_\alpha \subset A_\beta$ (1)

En posant pour tout nombre réel t

$$A_t = \bigcup_{\alpha \leq t} A_\alpha \quad (\alpha \text{ dyadique})$$

On définit une famille à indices réels $t \in (0, 1)$ satisfaisant à la condition (1) :

Pour tout $x \in E$, posons :

$$g(x) = 1 \quad \text{si} \quad x \in A_1$$

$$g(x) = \text{borne inférieure des } t \text{ tels que } x \in A_t \text{ si } x \in A_1$$

$$\text{Nous aurons :} \quad 0 \leq g(x) \leq 1$$

$$g(x) = 1 \text{ dans } A_1, \quad g(x) = 0 \text{ dans } A_0 \text{ enfin } g(x) \text{ est continue dans } E.$$

En effet, si on a $g(x) = a$, on aura $|g(y) - g(x)| < \varepsilon$ pour tout $y \in A_{a+\varepsilon} \cap (\bar{A}_{a-\varepsilon})$ qui est un voisinage de x , car c'est l'intersection de deux ouverts et $x \in A_{a+\varepsilon}$ d'une part et d'autre part $x \notin \bar{A}_{a-\frac{\varepsilon}{2}} \subset A_{a-\varepsilon}$ donc $x \in (\bar{A}_{a-\varepsilon})$. (Si $a + \varepsilon > 1$, on prendra $A_{a+\varepsilon} = E$, et si $a - \varepsilon < 0$, on prendra $A_{a-\varepsilon} = \emptyset$.) c. q. f. d.

LEMME 4. *Tout espace compact est complètement régulier.*

Il résulte d'abord de la régularité des espaces compacts et du lemme 3 que sur un compact, les filtres de voisinages sont complètement réguliers. Le résultat découle alors de là et du lemme 1 (suffisance).

Les lemmes 1 et 2 permettent de montrer que tous les sous-espaces d'un espace complètement régulier sont complètement réguliers. Il résulte donc du lemme 4 et de la définition 1:

THEOREME 2 : *Une condition nécessaire pour que notre problème ait des solutions est que l'espace E soit complètement régulier.*

Nous supposons désormais qu'il en est ainsi. Nous démontrerons au chap. 4 que cette condition est aussi suffisante.

7. Trois propriétés de l'ensemble de filtres. Voici maintenant trois conditions nécessaires vérifiées par les filtres $\mathfrak{F}$ pour qu'ils correspondent à une solution au moins.

Conditions pour que ϕ soit un homéomorphisme de E sur E' :

1°) Soit $\hat{a} \in \hat{E}$, $\hat{\mathfrak{A}}(\hat{a})$ est un filtre complètement régulier d'après le lemme 1. $\mathfrak{F}'(\hat{a})$ et par suite $\mathfrak{F}(\hat{a})$ sont donc aussi complètement réguliers d'après le lemme 2.

2°) Soit $a \in E$, $\hat{a} = \hat{\phi}(a)$, $\mathfrak{F}'(\hat{a})$ est le filtre des voisinages de a' dans le sous-espace E' , et par suite, si ϕ est un homéomorphisme, $\mathfrak{F}(\hat{a})$ sera le filtre des voisinages de a dans E .

3°) Condition pour que E soit séparé :

Deux filtres différents, $\mathfrak{F}(\hat{a})$ et $\mathfrak{F}(\hat{b})$, sont toujours tels qu'il n'existe aucun filtre plus fin que $\mathfrak{F}(\hat{a})$ et $\mathfrak{F}(\hat{b})$ simultanément car il existe un $F \in \mathfrak{F}(\hat{a})$ et un $H \in \mathfrak{F}(\hat{b})$ tels que $F \cap H = \emptyset$.

8. Ensembles des $\mathfrak{F}$ et solutions (étude directe). Conformément à ce qui a été annoncé à la fin du n°4, voici maintenant quelques propositions qui élucident la dépendance entre ensembles de filtres et solutions.

PROPOSITION 1. *Si deux solutions sont équivalentes elles ont même représentation par filtres.*

Soient $(\hat{E}_1, \phi_1)$ et $(\hat{E}_2, \phi_2)$ deux solutions équivalentes, l'extension aux parties de de l'homéomorphisme g de $\hat{E}_1$ sur $\hat{E}_2$ qui assure l'équivalence associe les filtres de voisinages dans $\hat{E}_1$ et dans $\hat{E}_2$. Comme $\hat{\phi}_1(E)$ et $\hat{\phi}_2(E)$ se correspondent par g , les filtres $\mathfrak{F}'$, pour les 2 solutions, sont aussi associés ; et parce que $\phi_2 = g \circ \phi_1$ les filtres $\mathfrak{F}$ sont les mêmes pour les deux solutions.

REMARQUE. Cette proposition ne serait pas vraie pour deux solutions homéomorphes, car on n'a pas $g \circ \phi_1 = \phi_2$. Mais alors l'homéomorphisme de $\phi_1(E)$ sur $\phi_2(E)$ dont il est question dans la définition 3, transforme les filtres de la solution $(\hat{E}_1, \phi_1)$ dans ceux de la solution $(\hat{E}_2, \phi_2)$.

PROPOSITION 2. *L'ensemble $\hat{E}$ étant donné sous la forme de sa représentation par filtres de E , il ne peut y avoir qu'une seule solution de support $\hat{E}$ respectant cette représentation.*

Soit O une partie de E , et $\hat{O}$ la partie de $\hat{E}$ formée par les éléments qui correspondent à un filtre dont O est élément. $\hat{O}$ est ouvert; pour le montrer, prenons un élément quelconque $\hat{a}$ de $\hat{O}$ et montrons que $\hat{O}$ est voisinage de $\hat{a}$. Nous avons $O \in \mathfrak{F}(\hat{a})$, par conséquent, il existe un voisinage ouvert de a dont la trace sur E' est contenue dans $\phi(O)$. Soit $\hat{V}(\hat{a})$ ce voisinage, la question sera tranchée si nous montrons que $\hat{V}(\hat{a}) \subset \hat{O}$. Soit $\hat{b} \in \hat{V}(\hat{a})$; montrons donc que $\hat{b} \in \hat{O}$. $\hat{V}(\hat{a})$ étant ouvert, $\hat{V}(\hat{a})$ est un voisinage de $\hat{b}$, donc $V'(\hat{b})$, sa trace sur E' , qui est contenue dans $\phi(O)$, comme nous l'avons vu, est élément de $\mathfrak{F}'(\hat{b})$, nous avons donc $O \in \mathfrak{F}(\hat{b})$ d'où $\hat{b} \in \hat{O}$. S'il existe une solution de support $\hat{E}$, la topologie correspondante sur $\hat{E}$ sera donc plus fine que celle engendrée par les $\hat{O}$. Or si cette dernière est séparée et si le problème a une solution de support $\hat{E}$, la topologie correspondante sur $\hat{E}$ qui ne peut être strictement plus fine que celle engendrée par les $\hat{O}$ (Chap. 1, § 10, Th. 1, Cor. 2) sera donc forcément identique à cette dernière.

Il nous reste donc à montrer que la topologie engendrée par les $\hat{O}$ est séparée. Soient $\hat{a}$ et $\hat{b}$ deux éléments de $\hat{E}$, $\hat{a} \neq \hat{b}$; $\mathfrak{F}(\hat{a})$ et $\mathfrak{F}(\hat{b})$ doivent être des filtres complètement réguliers et satisfaire en plus à la condition 3° du n° précédent; nous pouvons donc considérer deux ouverts de E , $V(\hat{a})$ et $V(\hat{b})$, éléments de $\mathfrak{F}(\hat{a})$ et $\mathfrak{F}(\hat{b})$ respectivement et tels que $V(\hat{a}) \cap V(\hat{b}) \neq \emptyset$; il n'y a aucun filtre de la famille qui admette à la fois $V(\hat{a})$ et $V(\hat{b})$ comme éléments; les ouverts fondamentaux de $\hat{E}$ définis à partir de $V(\hat{a})$ et $V(\hat{b})$ sont donc des voisinages de $\hat{a}$ et de $\hat{b}$ sans point commun.

D'autre part l'application ϕ est déterminée, car (condition 2° du n° 7) à $a \in E$ nous devons forcément faire correspondre son filtre des voisinages. La solution est donc complètement déterminée.

Les propositions 1 et 2 peuvent être réunies en un seul énoncé:

THEOREME 3. *Il y a correspondance biunivoque entre classes de solutions et familles de filtres de E les représentant.*

Le problème se pose alors de caractériser les ensembles de filtres qui représentent effectivement une solution. Une réponse sera donnée dans le prochain §.

9. Les espaces de filtres. Nous sommes donc conduits à étudier des espaces dont les éléments sont des filtres d'un espace topologique. Ces espaces seront définis de la manière suivante, conformément à la proposition 2.

Nous considérons un espace topologique E et un ensemble $\hat{E}$ de filtres complètement réguliers de E . Soit O une partie de E ; nous noterons O l'ensemble des filtres complètement réguliers éléments de E qui admettent O pour élément. Donc pour $\hat{a} \in \hat{E}$, « $\hat{a} \in \hat{O}$ » est équivalent de « $O \in \hat{a}$ ».

Remarquons qu'il y a bien identité entre $\hat{E}$ défini au début du §4 et la partie définie par le procédé précédent à partir de la partie pleine de E , et qui se note aussi $\hat{E}$.

DEFINITION 6. La topologie de $\hat{E}$ sera engendrée par les $\hat{O}$ lorsque O parcourt l'ensemble des parties de E .

Nous avons les relations suivantes :

LEMME 5. $\widehat{O \cap P} = \hat{O} \cap \hat{P}$.

$\hat{a} \in \widehat{O \cap P}$ est équivalent à $O \cap P \in \hat{a}$, qui est équivalent à « $O \in \hat{a}$ et $P \in \hat{a}$ », donc à « $\hat{a} \in \hat{O}$ et $\hat{a} \in \hat{P}$ », donc à $\hat{a} \in \hat{O} \cap \hat{P}$.

Cette relation exprime que les $\hat{O}$ constituent une base de la topologie de $\hat{E}$.

LEMME 6. Les $\hat{O}$ définis au moyen d'éléments d'une base pour chaque $\hat{a} \in \hat{E}$ forment une base de la topologie de $\hat{E}$. Il en est ainsi en particulier lorsque O décrit l'ensemble des ouverts de E .

LEMME 7. $\hat{a} \in \bar{\bar{O}}$ est équivalent de $O \cap A \neq \emptyset$ pour tous les $A \in \hat{a}$.

$\hat{a} \in \bar{\bar{O}}$ est équivalent de $\hat{A} \cap \hat{O} \neq \emptyset$ pour tous les $A \in \hat{a}$. Mais d'après le lemme 5, ceci équivaut à $A \cap O \neq \emptyset$ pour tous les $A \in \hat{a}$.

LEMME 8. $\bigcap \bar{\bar{O}} = \widehat{\bigcap \bar{\bar{O}}}$.

$\hat{a} \in \bigcap \bar{\bar{O}}$ est équivalent de «il existe un $A \in \hat{a}$ tel que $A \cap O = \emptyset$ (Lemme 7)»; ceci est encore équivalent de «il existe $A \in \hat{a}$ tel que $A \subset \bigcap \bar{\bar{O}}$ » d'où $A \in \widehat{\bigcap \bar{\bar{O}}}$.

CHAPITRE DEUX

DEUXIEME ASPECT

1. Solutions et structures uniformes précompactes. Considérons une solution $(\hat{E}, \phi)$. $\hat{E}$ est compact; il existe donc une structure uniforme et une seule sur E compatible avec sa topologie (Chap. 2, § 4, Th. 1). Or nous connaissons une telle structure, c'est la structure uniforme la moins fine de celles qui rendent uniformément continues toutes les applications continues de E dans $(0, 1)$; en effet cette dernière est compatible avec la topologie de E comme le montre le lemme 4 du Ch. 1 et elle est précompacte (Chap. 2, § 5, Th. 5).

Cette structure uniforme induit sur $\hat{\phi}(E)$ une structure uniforme précompacte, car la structure de E est le prolongement compact donc complet de celle de E . Nous pouvons la caractériser comme étant la structure uniforme la moins fine de celles qui rendent uniformément continues les applications continues de E dans $(0, 1)$ qui peuvent être prolongées par continuité à $\hat{E}$.

Nous définissons ainsi une application Φ de l'ensemble des solutions dans l'ensemble des structures uniformes précompactes de E .

Si d'autre part nous considérons une structure d'espace uniforme précompacte sur E en prenant le complété $\hat{E}$ et l'application de E dont il est question dans le théorème de complétion, nous obtenons une solution de notre problème. Nous définissons une application Ψ de l'ensemble des structures uniformes précompactes dans l'ensemble des solutions.

$\Phi \circ \Psi$ et $\Psi \circ \Phi$ sont l'identité dans l'ensemble des structures uniformes précompactes de E et dans l'ensemble des solutions. Il en résulte que Φ et Ψ sont « biunivoque sur » et que $\Phi = \Psi^{-1}$ (Ens. § 2, n° 12). Nous pouvons énoncer :

THEOREME 1. *Il y a correspondance biunivoque entre solutions du problème à l'équivalence près et structures uniformes précompactes compatibles avec la topologie de E .*

Notre problème se ramène donc à l'étude de ces structures uniformes ou des familles d'applications continues correspondantes.

2. Des structures uniformes aux filtres de Nous considérons une solution définie par une structure d'espace uniforme précompact sur E , et nous nous proposons de déterminer les filtres qui la représentent au sens du Ch. 1. Pour cela, nous commençons par établir les lemmes suivants :

LEMME 1. *Pour toute structure d'espace uniforme, dans toute classe de filtres de Cauchy, il y a un filtre moins fin que tous les autres.*

Il s'agit dans ce lemme, des classes définies par la relation d'équivalence qui s'énonce : $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ sont équivalents s'ils ont en commun un élément petit d'ordre V , quel que soit V .

Soit $\mathfrak{X}$ un filtre de Cauchy sur un espace uniforme E , et soit V un entourage symétrique de la structure uniforme de E . Considérons la partie X_V réunion des éléments de $\mathfrak{X}$ petits d'ordre V . Lorsque V varie, nous avons $X_V \subset X_{V'}$ pour $V \subset V'$; il en résulte $X_{V \cap V'} = X_V \cap X_{V'}$. Donc les X_V forment une base de filtre lorsque V décrit le filtre des entourages de la structure uniforme sur E . X_V est petit, d'ordre V^2 , car si $x \in X_V$ et $y \in X_V$ il existe un élément de $\mathfrak{X}$ petit d'ordre V contenant x et un autre contenant y , leur intersection n'est pas vide; soit z un de ses éléments, x et z sont voisins d'ordre V , z et y aussi, donc x et y sont voisins d'ordre V^2 et x_V est petit d'ordre V^2 . Le filtre des X_V est donc un filtre de Cauchy. Il est équivalent à $\mathfrak{X}$ car quel que soit V , X_V est un élément petit d'ordre V^2 commun à ce filtre et à $\mathfrak{X}$. Il est moins fin que tout filtre de Cauchy équivalent à $\mathfrak{X}$, car X_V appartient à un tel filtre quel que soit V . C'est donc le moins fin des filtres de Cauchy équivalents à $\mathfrak{X}$. C.Q.F.D.

LEMME 2. *Soit E un espace uniforme et E' l'espace uniforme séparé associé. E' est isomorphe au sous-espace $\hat{E}$ de E obtenu en prenant un élément $\hat{x}$ dans chaque classe x' de E (Pour la relation d'équivalence défini par la structure uniforme de E).*

L'application $\hat{x} \rightarrow x'$ est «biunivoque sur» et il est immédiat qu'elle constitue un isomorphisme car la structure de E' est image canonique de celle de E et que celle de E est image réciproque de celle de E' .

Ceci dit, soit E l'espace donné, $\tilde{E}$ l'espace uniforme des filtres de Cauchy de E , $\hat{E}$ l'espace uniforme séparé associé et E' la partie partout dense dans $\hat{E}$ qui est isomorphe à E par ϕ . Soit $\dot{E}$ une partie de E constituée par un élément de chaque classe de filtre de Cauchy et tel que $\dot{E}$ contienne tous les filtres qui admettent pour base une seule partie de la forme $\{a\}$ ($a \in E$) ces filtres sont bien des filtres de Cauchy et deux d'entre eux ne sont jamais équivalents. Soit $\dot{E}'$ le sous-espace de $\dot{E}$ constitué par ces filtres.

Un filtre $\mathfrak{F}(\hat{a})$ est l'image par ϕ^{-1} de la trace sur $\dot{E}'$ d'un filtre de voisinage de E .

C'est aussi l'image de la trace sur E' du filtre des voisinages d'un élément quelconque de la classe de a . Or dans la topologie de $\tilde{E}$ un système fondamental de voisinages de $\tilde{a}$ est constitué en prenant pour chaque entourage V de E les filtres qui ont en commun avec $\tilde{a}$ un élément petit d'ordre V . La trace sur $\dot{E}'$ du voisinage correspondant à V sera donc formée par les filtres qui ont une base réduite à une partie de la forme $\{x\}$ avec $x \in M$ où M est la réunion des éléments de $\tilde{a}$ petits d'ordre V . Son image sur E est l'ensemble des $x \in M$; or, les M lorsque V varie définissent une base du filtre le moins fin de la classe $\hat{a}$ de $\tilde{a}$.

Il résulte de là que $\mathfrak{F}(\hat{a})$ est identique au filtre le moins fin de la classe $\hat{a}$. Nous énoncerons :

THEOREME 2 : *La famille de filtres correspondant à une solution définie par une structure uniforme d'espace précompact sur E , est constituée par les filtres de Cauchy les moins fins de chaque classe, pour cette structure.*

Il est bien évident que la structure uniforme définit en même temps la topologie de cet ensemble de filtres et l'application ϕ de E dans une partie de E .

A la fin du Ch.1 nous avons posé le problème de caractériser les familles de filtres acceptables pour une solution. Une réponse vient d'être fournie au cours du théorème 2.

3. Ensembles de filtres et solutions (étude directe). Considérons une solution; elle est définie par une structure uniforme sur E , et nous venons de voir que cette structure uniforme définit en même temps la topologie dont il faut munir cet ensemble de filtres et l'application ϕ . Montrons que cette topologie peut être caractérisée en se servant uniquement d'éléments empruntés aux filtres. Il en résultera qu'à une famille de filtres correspondra une seule structure topologique. Nous aurons ainsi redémontré la proposition 2 du Ch. 1.

Considérons un filtre $\mathfrak{F}_1$; un système fondamental de voisinages σ de $\mathfrak{F}_1$ est constitué pour V décrivant le filtre des entourages par les filtres $\mathfrak{F}$ qui ont en commun avec $\mathfrak{F}_1$ un élément petit d'ordre V . En effet, $\hat{E}$ peut être considéré comme un sous-espace de $\tilde{E}$.

Prenons maintenant le système σ' de parties obtenues en prenant pour chaque élément $F_1 \in \mathfrak{F}_1$ les filtres de la famille qui admettent F_1 comme élément. Nous définissons ainsi une base de filtres équivalente à σ ; en effet : un élément de σ correspondant à un entourage V contient les éléments de σ' correspondant à des $F_1 \in \mathfrak{F}_1$ et petits d'ordre V ; d'autre part il y a un élément de σ contenu dans l'élément de σ' correspondant à $F_1 \in \mathfrak{F}_1$, car soit M_V la réunion des éléments de $\mathfrak{F}_1$ petits d'ordre V , nous savons qu'il existe V tel que M_V soit contenu dans F_1 (Th. 2 et lemme 1) et tous les filtres qui ont en commun avec $\mathfrak{F}_1$ un élément petit d'ordre V ont M_V comme élément. La base de filtre σ' a bien été définie au moyen d'éléments empruntés uniquement aux filtres.

4. Des filtres aux structures uniformes. Nous connaissons une solution par son ensemble de filtres représentatifs (nous savons qu'il y en a une seule représentée par cet ensemble de filtres) et nous proposons de définir la structure uniforme d'espace précompact correspondante de E .

La structure d'espace uniforme compact de $\hat{E}$ sera définie par le filtre des voisinages de la diagonale. Nous allons le construire.

Construction d'un entourage : Pour chaque élément $\hat{a}$ de E nous prendrons un élément ouvert $V(\hat{a})$ du filtre $\mathfrak{B}(\hat{a})$ et nous construirons $V(\hat{a}) \times V(\hat{a})$ qui est un ouvert de $\hat{E} \times \hat{E}$.

Les $V(\hat{a})$ constituent un recouvrement de $\hat{E}$ lorsque $\hat{a}$ décrit $\hat{E}$. On peut en extraire un recouvrement fini $V(\hat{a}_1) \dots V(\hat{a}_n)$.

$\bigcup_{i=1}^n (V(\hat{a}_i) \times V(\hat{a}_i))$ est un voisinage de la diagonale, donc un entourage de la structure uniforme.

Construction d'une base d'entourage: Lorsque l'on considère tous les recouvrements finis de $\hat{E}$ par des ouverts, éléments des filtres $\mathfrak{F}$, on définit un système fondamental d'entourages. En effet, tout entourage est un voisinage de la diagonale; il contient donc pour tout point $\hat{a} \in \hat{E}$ un voisinage de $(\hat{a}, \hat{a})$ de la forme $V(\hat{a}) \times V(\hat{a})$ et on peut extraire un recouvrement fini de $\hat{E}$ des $V(\hat{a})$; ce recouvrement correspond, par le procédé de l'alinéa précédent, à un élément de la famille étudiée contenu dans l'entourage donné.

Nous aurons alors un système fondamental d'entourages de E' en prenant la trace sur $E' \times E'$ de celui de $\hat{E}$. Mais d'après la distributivité de l'intersection par rapport à la réunion, nous avons :

$$\begin{aligned} (E' \times E') \cap \bigcup_{i=1}^n (V(\hat{a}_i) \times V(\hat{a}_i)) &= \bigcup_{i=1}^n (E' \times E') \cap (V(\hat{a}_i) \times V(\hat{a}_i)) \\ &= \bigcup_{i=1}^n (E' \cap V(\hat{a}_i)) \times (E' \cap V(\hat{a}_i)) \end{aligned}$$

Nous obtiendrons donc un système fondamental d'entourages de E' en prenant les parties $\bigcup (F'_i \times F'_i)$ pour chaque recouvrement fini (F'_i) de E' par des éléments des $\mathfrak{F}'(\hat{a})$ tels que tout $\mathfrak{F}'(\hat{a})$ admette pour élément un des F'_i .

Nous aurons alors la structure de E en prenant l'image par $\hat{\phi}^1$ de celle de E' , c'est-à-dire $\bigcup F_i \times F_i$ pour chaque recouvrement ouvert fini de $E(F_i)$ par des éléments des $\mathfrak{F}$ tels que tout $\mathfrak{F}$ admette au moins un des F_i pour élément.

5. Solutions homéomorphes (2e aspect). Si $(\hat{E}_1, \phi_1)$ et $(\hat{E}_2, \phi_2)$ sont deux solutions homéomorphes (§1, n°2), l'application de $\hat{E}_1 \times \hat{E}_1$ sur $\hat{E}_2 \times \hat{E}_2$, étendue de ϕ , est un isomorphisme des structures uniformes de $\hat{E}_1$ et de $\hat{E}_2$. Il en résulte que l'application étendue de l'application réduite à $\hat{\phi}_2(E)$ de la restriction à $\hat{\phi}_1(E)$ est un isomorphisme entre les structures uniformes qui représentent les deux solutions.

Réciproquement, si deux solutions, $(\hat{E}_1, \phi_1)$ et $(\hat{E}_2, \phi_2)$ sont représentées par deux structures uniformes isomorphes, l'isomorphisme de E_1 sur E_2 se prolonge en un isomorphisme de $\hat{E}_1$ sur $\hat{E}_2$ (Chap.2, §3, prop.8). C'est en même temps un homéomorphisme de $\hat{E}_1$ sur $\hat{E}_2$ qui satisfait à la condition de la définition 3 du §1.

THEOREME 3 : Deux solutions sont homéomorphes si elles sont représentées par deux structures uniformes isomorphes.

CHAPITRE TROIS

ORDRE

1. Définition. Nous dirons que la solution $(\hat{E}_1, \phi_1)$ est plus étendue que la solution $(\hat{E}_2, \phi_2)$ et nous noterons $(\hat{E}_1, \phi_1) > (\hat{E}_2, \phi_2)$ s'il existe une application continue ϕ de $\hat{E}_1$ sur $\hat{E}_2$ qui fasse correspondre à un point de $\hat{E}_1$, image par ϕ_1 d'un point $a \in E$, le point de $\hat{E}_2$, image par ϕ_2 du même point de E .

EXEMPLE: Sur R la solution droite achevée est plus étendue que la solution droite projective, comme le montre l'application qui conserve la valeur des points à distance finie et qui applique $+\infty$ et $-\infty$ sur le point à l' ∞ de la droite projective.

Cette relation est réflexive (application identique), et transitive (application composée). La relation « $(\hat{E}_1, \phi_1) \geq (\hat{E}_2, \phi_2)$ et $(\hat{E}_2, \phi_2) \geq (\hat{E}_1, \phi_1)$ » est équivalente à la relation d'équivalence définie au Chap.II, déf. 2. En effet, si $(\hat{E}_1, \phi_1)$ est équivalent à $(\hat{E}_2, \phi_2)$, l'homéomorphisme dont il est question dans la définition nous montre que nous avons aussi bien $(\hat{E}_1, \phi_1) \geq (\hat{E}_2, \phi_2)$ que $(\hat{E}_2, \phi_2) \geq (\hat{E}_1, \phi_1)$. D'autre part, si nous avons une application continue ϕ de $\hat{E}_1$ sur $\hat{E}_2$ qui satisfasse à la définition ci-dessus, et une application continue ψ de $\hat{E}_2$ sur $\hat{E}_1$ satisfaisant aux mêmes conditions avec échange des indices 1 et 2, l'application $\phi \circ \psi$ qui est une application continue de $\hat{E}_2$ sur lui-même prolongeant l'application identique de $\phi_2(E)$ sur lui-même, est donc l'application identique de $\hat{E}_2$. On a le même résultat pour $\psi \circ \phi$ qui est l'application identique de $\hat{E}_1$. Donc $\psi = \bar{\phi}^{-1}$ et on déduit (Ens.R, §2, n°12) que ϕ est une application biunivoque de $\hat{E}_1$ sur $\hat{E}_2$. Comme ϕ et $\bar{\phi}^{-1}$ sont continues, ϕ est un homéomorphisme de $\hat{E}_1$ sur $\hat{E}_2$. $\hat{E}_2$ et, par suite les deux solutions $(\hat{E}_1, \phi_1)$ et $(\hat{E}_2, \phi_2)$, sont équivalentes. On en déduit que la relation étudiée est compatible avec la relation d'équivalence introduite au début du chapitre et que, par passage au quotient, elle devient une relation d'ordre. (Ens.R, §6, n°1).

2. Liaison avec le deuxième point de vue. Soient deux solutions $(\hat{E}_1, \phi_1)$ et $(\hat{E}_2, \phi_2)$. Elles correspondent à deux structures uniformes d'espace précompact sur E . Supposons que nous ayons $(\hat{E}_1, \phi_1) \geq (\hat{E}_2, \phi_2)$, il existe alors une application continue f de E_1 sur E_2 qui prolonge l'application biunivoque de $\phi_1(E)$ sur $\phi_2(E)$, qui associe deux points images l'un par ϕ_1 et l'autre par ϕ_2 , du même point de E . Or, puisque E_1 est compact f est uniformément continue (Chap.II, §4, Th.2), sa restriction à $\phi_1(E)$ est donc aussi uniformément continue. La structure uniforme sur E correspondant à E_1 est donc plus fine que celle correspondant à E_2 .

Réciproquement, considérons deux structures d'espace uniforme précompact sur E , $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$, telles que $\mathcal{U}_1$ soit plus fine que $\mathcal{U}_2$. A la structure $\mathcal{U}_1$ correspond une solution $(\hat{E}_1, \phi_1)$ et à la structure $\mathcal{U}_2$, une solution $(\hat{E}_2, \phi_2)$. L'application $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ de $\phi_1(E)$ sur $\phi_2(E)$ est alors uniformément continue; elle peut donc être prolongée en une application continue f de $\hat{E}_1$ dans $\hat{E}_2$, mais puisque $\hat{E}_1$ est compact, $f(\hat{E}_1)$ est compact (Chap.1, § 10, Th. 1) et contient $\phi_2(E)$ qui est partout dense dans $\hat{E}_2$ donc $f(\hat{E}_1) = \hat{E}_2$. En résumé, f est une application continue de $\hat{E}_1$ sur $\hat{E}_2$ et cette application satisfait à la définition 1, donc $(\hat{E}_1, \phi_1) \geq (\hat{E}_2, \phi_2)$. Nous avons donc :

THEOREME 1 : *La relation d'ordre dans l'ensemble des solutions est équivalente à la relation d'ordre (inclusion) dans l'ensemble des structures uniformes correspondantes sur E .*

3. Liaison avec la représentation par filtres. Soient $(\hat{E}_1, \phi_1)$ et $(\hat{E}_2, \phi_2)$, deux solutions telles que $(\hat{E}_1, \phi_1) \geq (\hat{E}_2, \phi_2)$; soit ϕ une application continue de E_1 dans E_2 qui satisfait à la condition de la définition 1. Soient $\hat{a}_1 \in \hat{E}_1$ et $\hat{a}_2 = \phi(\hat{a}_1)$ avec les notations du Ch.1, n°5. $(\hat{a}_1)$ est plus fin que l'image réciproque par ϕ de $\mathcal{B}(\hat{a}_2)$ puisque ϕ est continue; il en résulte que $\mathcal{F}(\hat{a}_2) \subset \mathcal{F}(\hat{a}_1)$

A tout filtre de la famille représentant la première solution correspond ainsi un filtre moins fin de la famille représentant la deuxième.

Réciproquement, supposons qu'à tout filtre de la famille des $\mathcal{F}_1$ représentant la solution $(\hat{E}_1, \phi_1)$, on puisse en associer un moins fin appartenant à la famille des $\mathcal{F}_2$ qui représente la solution $(\hat{E}_2, \phi_2)$. Il résulte immédiatement de la manière dont nous avons construit les filtres des entourages de $(\hat{E}_1, \phi_1)$ et de $(\hat{E}_2, \phi_2)$, que la structure uniforme qui correspond à $(\hat{E}_1, \phi_1)$ est plus fine que celle qui correspond à $(\hat{E}_2, \phi_2)$; il résulte de la (n°2) que la solution $(\hat{E}_1, \phi_1)$ est plus étendue que $(\hat{E}_2, \phi_2)$.

THEOREME 2 : *La relation d'ordre dans l'ensemble des solutions est équivalente à la relation d'ordre entre familles de filtres qui s'énonce : « quel que soit un filtre de $\mathcal{F}_1$ il existe un filtre de $\mathcal{F}_2$ moins fin que lui.*

4. Sur les espaces compacts. Etablissons maintenant quelques propriétés des espaces compacts; elles vont nous servir dans un instant.

LEMME 1. *Si E et F sont deux espaces compacts, et si f est une application continue de E sur F , l'espace quotient de E par la relation d'équivalence R , qui s'énonce $f(a) = f(b)$, est homéomorphe à F .*

LEMME 2. *La condition nécessaire et suffisante pour que l'espace quotient d'un espace compact E par une relation d'équivalence R soit un espace séparé, est que la relation d'équivalence soit fermée.*

Nous venons d'établir que sur un espace compact, la notion de relation d'équivalence fermée et celle de relation d'équivalence représentée par un fermé, sont équivalentes.

5. Solutions comparables et quotients. Soient $(\hat{E}_1, \phi_1)$ et $(\hat{E}_2, \phi_2)$ deux solutions, et supposons que nous ayons $(\hat{E}_1, \phi_1) \succ (\hat{E}_2, \phi_2)$, il existe alors une application continue ϕ de $\hat{E}_1$ sur $\hat{E}_2$. Nous pouvons donc énoncer, d'après le lemme 1 :

PROPOSITION 1 : *Si entre deux solutions nous avons la relation $(\hat{E}_1, \phi_1) \succ (\hat{E}_2, \phi_2)$ et si ϕ est l'application continue de $\hat{E}_1$ sur $\hat{E}_2$ dont il est question dans la définition 2, la relation $\phi(a_1) = \phi(b_1)$ entre éléments de E_1 est une relation d'équivalence R et $\hat{E}_1/R$ est homéomorphe à $\hat{E}_2$.*

Réciproquement, considérons une solution $(\hat{E}_1, \phi_1)$ et cherchons à caractériser les relations d'équivalence R sur $\hat{E}_1$, telles que si l'on désigne par f l'application canonique de E sur E/R ($\hat{E}_1/R, f \circ \phi_1$) constitue une autre solution.

Pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire que $\hat{E}_1/R$ soit compact, donc que la relation d'équivalence R soit fermée et que $f \circ \phi_1$ soit une application biunivoque, donc que R n'identifie pas deux points de $\phi_1(E)$. Il est facile de voir que ces deux conditions sont suffisantes.

THEOREME 3 : *La relation d'ordre entre ensembles de solutions $(\hat{E}_1, \phi_1) \succ (\hat{E}_2, \phi_2)$ est la relation qui s'énonce : Il existe une relation d'équivalence R dans $\hat{E}_1$ telle que $\hat{E}_1/R = \hat{E}_2$ et telle que $\phi(R) \circ \phi_1 = \phi_2$; $\phi(R)$ désigne l'application canonique de $\hat{E}_1$ sur $\hat{E}_1/R$.*

6. Existence d'une borne supérieure. Considérons une famille de solutions $(\hat{E}_i, \phi_i)$ représentée par des structures uniformes précompactes $\mathcal{U}_i$ sur E compatibles avec sa topologie. Soit $\mathcal{U}$ le filtre borne supérieure des filtres $\mathcal{U}_i$. Ce filtre existe et est un filtre d'entourages (Chap.II, §1, prop.1). La topologie engendrée par $\mathcal{U}$ est évidemment la même que celle engendrée par chacun des $\mathcal{U}_i$. La structure uniforme définie est une structure d'espace uniforme précompact (Chap.II, §5, prop.5).

Elle correspond donc à une solution qui est borne supérieure des solutions $(\hat{E}_2, \phi_2)$.

Nous énoncerons :

THEOREME 4 : *Toute famille de solutions admet une borne supérieure. Il existe en particulier une solution plus étendue que toutes les autres.*

CHAPITRE QUATRE

SOLUTION LA PLUS ETENDUE

1. Filtres complètement réguliers.

REMARQUE 1 : La borne supérieure d'un ensemble de filtres complètement réguliers $\mathfrak{F}_i (i \in I)$, si elle existe, est un filtre complètement régulier.

A tout $A = \bigcap_{i \in I'} F_i$ où $F_i \in \mathfrak{F}_i$ et où I' est une partie finie de I , on peut faire correspondre $B = \bigcap_{i \in I'} B_i$ (B_i correspondant à A_i dans la définition des filtres complètement réguliers $\mathfrak{F}_i$ avec l'application f_i de E dans $(0, 1)$ et $f = \max_{i \in I'} f_i$. Il est bien évident que f est une application continue égale à 0 dans B , et à 1 dans $\bigcap A$.

REMARQUE 2 : L'ensemble ordonné par inclusion des filtres complètement réguliers est inductif.

La démonstration est immédiate en s'appuyant sur la remarque 1, et en remarquant qu'une famille totalement ordonnée de filtres a toujours une borne supérieure.

De cette remarque et du théorème de Zorn, on tire la proposition suivante :

REMARQUE 3 : Il existe un filtre complètement régulier maximal plus fin que tout filtre complètement régulier donné.

REMARQUE 4 : Pour qu'un filtre complètement régulier, $\mathfrak{F}$, soit maximal, il faut et il suffit que pour tout couple d'ensembles ouverts A, B de E tels que $B \subset A$ et qu'il existe une application continue f de E dans $(0, 1)$ égale à 0 dans B et à 1 dans $\bigcap A$, ou bien $A \in \mathfrak{F}$, ou bien il existe un ensemble de $\mathfrak{F}$ ne rencontrant pas B .

Si tous les ensembles de $\mathfrak{F}$ rencontrent B , le filtre $\mathfrak{F}$ et le filtre complètement régulier formé par les $f((Oa))$, où a parcourt $(0, 1)$, auraient une borne supérieure qui serait un filtre complètement régulier (Remarque 1), et si nous n'avions pas $A \in \mathfrak{F}$, le filtre serait strictement plus fin que $\mathfrak{F}$ qui ne serait donc pas maximal.

La réciproque est immédiate.

LEMME 1 : Dans un espace complètement régulier, les filtres des voisinages sont des filtres complètement réguliers maximaux.

Soit $\mathfrak{B}$ le filtre des voisinages de a dans l'espace complètement régulier E . Nous avons vu (Chap.1, lemme 1) que $\mathfrak{B}$ est complètement régulier et (Remarque 3) qu'il existe un filtre complètement régulier maximal $\mathfrak{A}$ plus fin que $\mathfrak{B}$. Supposons $\mathfrak{A}$

non complètement régulier maximal, il existe alors un ouvert $o_1 \in \mathfrak{M}$ et $\mathfrak{B}$, donc ne contenant pas le point limite de $\mathfrak{B}$, il existe aussi $o_2 \in \mathfrak{M}$, $o_2 \subset o_1$, et une application continue f de E dans $(0, 1)$ telle que $f(a) = 0$ pour $a \in o_2$ et $f(\beta) = 1$ pour $\beta \in o_1$ donc $f(a) = 1$. Mais $\mathfrak{M}$ étant convergent vers a , tout voisinage de a rencontre o_2 donc $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}((1/2, 1))$ n'est donc pas un voisinage de a ce qui est contraire à l'hypothèse de la continuité de f .

2. Deuxième aspect. Supposons E complètement régulier, ce qui exige qu'il existe des applications continues de E dans $(0, 1)$. Munissons E de la structure uniforme la moins fine de celles qui rendent uniformément continues toutes les applications continues de E dans $(0, 1)$. C'est une structure d'espace précompact car la proposition 5 du §5, chap.II s'applique; en effet si $x \neq y$, il existe un voisinage de x ne contenant pas y , donc une application nulle au point x et égale à 1 au point y . Cette structure uniforme est compatible avec la topologie de E . Elle correspond donc à une solution du problème (Ch.II, th.1).

THEOREME 1: *La structure uniforme la moins fine de celles qui rendent uniformément continues toutes les applications continues de E dans $(0, 1)$ correspond à une solution du problème.*

Nous avons démontré que la condition pour E d'être complètement régulier, qui était une condition nécessaire pour que le problème ait des solutions, est aussi une condition suffisante. Nous pouvons donc énoncer:

THEOREME 2: *La condition nécessaire et suffisante pour que le problème ait des solutions est que E soit complètement régulier.*

La solution que nous venons d'obtenir est la plus étendue car la structure étudiée est la plus fine des structures uniformes précompactes compatibles avec la topologie de E . Ceci résulte du fait que toute solution correspond à une famille d'applications continues de E dans $(0, 1)$, (Chap.2, n°1) et que nous avons ici toutes les applications continues, donc la famille la plus étendue.

THEOREME 3: *La solution du théorème 1 est la plus étendue.*

3. Premier aspect. Nous nous proposons dans ce n°, de caractériser la représentation par filtres de la solution du théorème 1.

LEMME 2: *Tout filtre complètement régulier maximal est un filtre de Cauchy sur E .*

Soit $\mathfrak{F}$ un filtre complètement régulier maximal et f une application continue de E dans $(0, 1)$. f a une limite suivant $\mathfrak{F}$. En effet, si f n'avait pas de limite suivant $\mathfrak{F}$, pour tout $\alpha \in (0, 1)$ il existerait un voisinage ouvert de α , $V_1(\alpha)$, tel que $V_1(\alpha) \notin f(\mathfrak{F})$, il existerait aussi un voisinage ouvert de α , $V_2(\alpha)$, et une application continue, $\phi(\alpha)$, de $(0, 1)$ dans lui-même, égale à 0 dans V_2 et à 1 dans V_1 (Car $(0, 1)$, qui est compact, est complètement régulier). On peut considérer un nombre fini de α ; soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tels que les $V_2(\alpha_i)$ recouvrent $(0, 1)$. On en déduit, en prenant l'image réciproque par f

des V_1 et des V_2 , un recouvrement fini de E par les $\bar{f}^1(V_2(a_i))$. Pour tout i , $\bar{f}^1(V_2(a_i))$ n'est pas un élément de $\mathfrak{F}$, et l'application $\phi(a_i) \circ f$ satisfait aux conditions de la remarque 4 avec $\bar{f}^1(V_2(a_i))$; donc il existe un élément F_i de $\mathfrak{F}$ ne rencontrant pas $\bar{f}^1(V_2(a_i))$. $\bigcap V_i$ serait donc un élément vide de $\mathfrak{F}$, ce qui est impossible. Nous venons de voir que f a une limite suivant $\mathfrak{F}$. $f(\mathfrak{F})$ est donc un filtre de Cauchy sur $(0, 1)$ quel que soit V . Or une base d'entourage de E est constituée par l'intersection d'une famille finie $\bar{f}^1(U_i)$ où les U_i sont des entours de $(0, 1)$ et f_i les applications continues de E dans $(0, 1)$. $\mathfrak{F}$ contient des éléments petits d'ordre $\bar{f}_i^1(U_i)$ quel que soit i , donc un élément petit d'ordre $\bar{f}_i^1(U_i)$. $\mathfrak{F}$ est un filtre de Cauchy.

LEMME 3 : Deux filtres complètement réguliers maximaux ne sont jamais équivalents.

Il s'agit d'équivalence entre filtres de Cauchy au sens défini au chap. II, § 3.

Si $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ sont deux filtres complètement réguliers maximaux différents, il existe $M_1 \in \mathfrak{M}_1$ et $M_2 \in \mathfrak{M}_2$ tels que $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, sans quoi la borne supérieure de $\mathfrak{M}_1$ et de $\mathfrak{M}_2$ existerait et serait un filtre complètement régulier (Remarque 3) strictement plus fin que $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ qui ne seraient pas maximaux. Il existe $M'_1 \in \mathfrak{M}_1$ et une application continue f_1 de E dans $(0, 1)$ égale à 0 dans M'_1 et à 1 dans $\bar{M}_1$. Si V_1 est un entourage de E , contenu dans l'image réciproque par f d'un entourage de $(0, 1)$, tout élément de $\mathfrak{M}_1$ petit d'ordre V_1 est contenu dans M_1 , car il contient un point de M'_1 et $M_1 \supset V_1(M'_1)$. Il existe de même $M'_2 \in \mathfrak{M}_2$ et un entourage V_2 de E tel que tout élément de $\mathfrak{M}_2$ petit d'ordre V_2 est contenu dans M_2 . On en déduit que $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ ne peuvent avoir en commun un ensemble petit d'ordre $V_1 \cap V_2$.

LEMME 4 : La trace $\mathfrak{D}$ sur E du filtre des voisinages d'un point de E est un filtre complètement régulier maximal.

C'est un filtre complètement régulier (Ch. II, lemme 2). Supposons qu'il existe un filtre $\mathfrak{F}$ complètement régulier maximal strictement plus fin que $\mathfrak{D}$, il existerait alors un ouvert $F \in \mathfrak{F}$, $F \notin \mathfrak{D}$, et un ouvert $G \in \mathfrak{F}$ et une application continue f de E dans $(0, 1)$, nulle dans G et égale à 1 dans $\bar{F}$. Si nous considérons les $\bar{f}^1(a, 1)$ pour $a \in (0, 1)$ nous définissons un filtre complètement régulier, $\mathfrak{R}$, et puisque $F \in \mathfrak{D}$ tout élément de $\mathfrak{D}$ rencontre $\bar{F}$. Donc la borne supérieure de $\mathfrak{D}$ et de $\mathfrak{R}$ existe et c'est un filtre complètement régulier (Ch. III, lemme 2). Il existe un filtre complètement régulier maximal plus fin et il est distinct de $\mathfrak{F}$, car $\bar{f}^1(a, 1) \cap G = \emptyset$ et $G \in \mathfrak{F}$. Ce filtre est plus fin que $\mathfrak{D}$ ainsi que $\mathfrak{F}$, ils sont donc équivalents à $\mathfrak{D}$ qui est un filtre de Cauchy pour la structure uniforme de la solution. Par suite, ces filtres sont identiques (Lemme 3), ce qui est en contradiction avec ce que nous avons dit plus haut.

Ce lemme montre que la solution que nous étudions est représentée par une partie des filtres complètement réguliers maximaux de E .

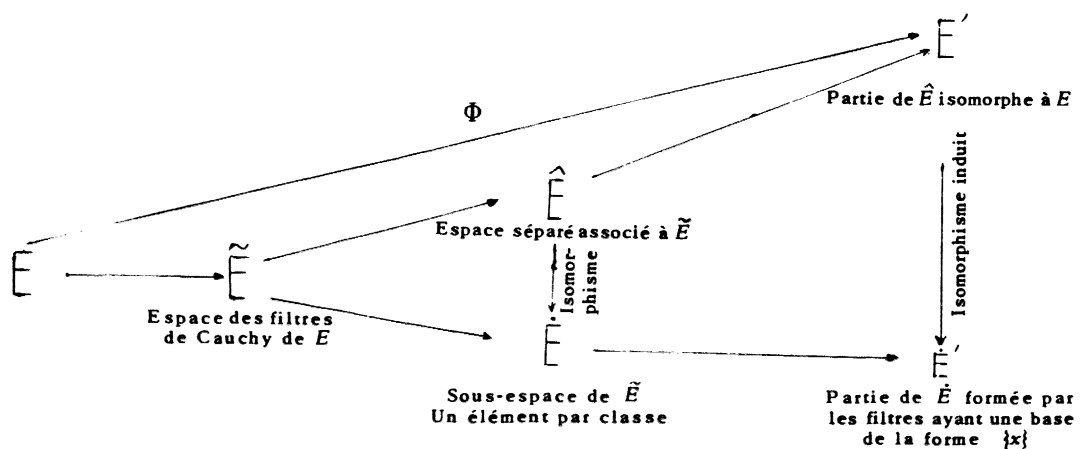
Mais un filtre complètement régulier est un filtre de Cauchy et puisque deux filtres

complètement réguliers ne sont jamais équivalents, d'après (Ch. II, th.2), la solution est représentée par l'ensemble des filtres complètement réguliers.

THEOREME 4: *La solution du théorème 2 est représentée par les filtres complètement réguliers maximaux.*

REMARQUE : Si E est un espace normal, en prenant tous les recouvrements finis de E par des ouverts $O_1 \dots O_n$, et en considérant pour chacun d'eux la partie de $E^2, \bigcup O_1^2$, nous définissons une structure uniforme d'espace précompact qui correspond donc à une solution du problème. Mais d'après ce qui a été dit au chap.3, n°4, c'est manifestement la plus fine des structures uniformes correspondant à une solution.

THEOREME 5 : *Sur un espace normal, la structure uniforme des recouvrements ouverts définit la solution la plus étendue.*



CHAPITRE CINQ

SOLUTION LA MOINS ETENDUE

1. Remarques sur le filtre $\mathcal{G}$.

REMARQUE 1 : Sur un espace topologique E séparé et non compact, l'ensemble des complémentaires des parties relativement compactes forme un filtre, $\mathcal{G}$.

Cet ensemble ne contient pas la partie vide puisque E n'est pas compact. La réunion de deux ensembles relativement compacts dans un espace séparé est un ensemble relativement compact, donc l'intersection de deux éléments de la famille est encore un élément de la famille. Toute partie d'un ensemble relativement compact est relativement compact, donc toute partie contenant un élément de la famille appartient aussi à la famille. C.Q.F.D.

REMARQUE 2 : Tout filtre sans point adhérent sur E est plus fin que $\mathcal{G}$.

Si $\mathcal{F}$ est un filtre et si $G \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$, tout élément de $\mathcal{F}$ rencontre $\overline{G}$ qui est relativement compact. La trace de $\mathcal{F}$ sur $\overline{G}$ qui est relativement compact est un filtre qui a un point adhérent; comme ce filtre est plus fin que $\mathcal{F}$, ce dernier a aussi un point adhérent.

REMARQUE 3 : Le filtre $\mathcal{G}$ n'est pas convergent.

Il existe un filtre $\mathcal{F}$ sans point adhérent puisque E n'est pas compact, et ce filtre est plus fin que $\mathcal{G}$ (Remarque 2). Donc si $\mathcal{G}$ était convergent, $\mathcal{F}$ le serait aussi et aurait donc au moins un point adhérent.

REMARQUE 4 : La condition nécessaire et suffisante pour que le filtre $\mathcal{G}$ soit sans point adhérent, est que l'espace E soit localement compact.

La condition est évidemment suffisante. Elle est nécessaire, car si $a \in E$ n'avait pas de voisinage compact, chacun de ses voisinages rencontrerait tous les éléments de $\mathcal{G}$, puisqu'il ne serait contenu dans aucun de leurs complémentaires et a serait adhérent à $\mathcal{G}$.

Nous nous proposons de trouver une solution obtenue en ajoutant un seul point à l'espace complètement régulier E .

2. Condition nécessaire d'existence. Une question se pose immédiatement: à quelles conditions le problème est-il possible?

Soit E un espace topologique compact, Ω un fermé dans $\hat{E}$, $\overline{\Omega}$ est ouvert et si $\hat{a} \in \overline{\Omega}$ il existe un voisinage compact (puisque E est compact) de $\hat{a}$ contenu dans $\overline{\Omega}$.

Le sous-espace $\overline{\Omega}$ est donc localement compact.

En particulier, si $(\hat{E}, \phi)$ est une solution du problème général telle que $\widehat{\phi(E)}$ soit fermé, alors $\phi(E)$ donc E , est localement compact.

Si en particulier $(\hat{E}, \phi)$ est une solution du problème posé dans ce §, $\{\omega\} = \widehat{\phi(E)}$ est fermée, car $\hat{E}$ est séparé, donc E est localement compact. Nous pouvons donc énoncer :

PROPOSITION 1 : *Pour que l'on puisse trouver une extension compacte d'un espace topologique E , obtenue en lui adjoignant un seul point, il faut que l'espace E soit localement compact.*

3. Etude suivant le premier aspect. L'ensemble des filtres qui représentent la solution se composera des filtres des voisinages et d'un filtre sans point adhérent, donc plus fin que $\mathcal{G}$ (Remarque 2). Soit G un élément de ce filtre; si nous notons notre solution (E, ϕ) , il est l'image réciproque par ϕ de la trace d'un voisinage V du point à l'infini ω . Ce voisinage contient un voisinage ouvert O de ω . Considérons un recouvrement quelconque de $\widehat{O}$ par des ouverts. Si nous lui adjoignons O , nous constituons un recouvrement de E par des ouverts, et nous pourrions en extraire un recouvrement fini de E , d'où un recouvrement fini de $\widehat{O}$ extrait de notre recouvrement initial. $\widehat{O}$ est donc compact (Chap.1, §10, prop.2), $\widehat{V}$ est donc relativement compact et par suite, tout élément de notre filtre est le complémentaire d'un ensemble relativement compact, donc un élément de $\mathcal{G}$. Pour que notre problème soit possible, il est donc nécessaire que le filtre $\mathcal{G}$ soit sans point adhérent, c'est-à-dire (Remarque 4) que l'espace E soit localement compact.

Nous retrouvons donc la proposition 1. Montrons que cette condition est aussi suffisante. Pour cela nous savons que nous devons adjoindre à E le filtre $\mathcal{G}$. L'espace ainsi construit correspond bien à une solution du problème. Pour le montrer il reste à établir que l'espace de ces filtres est compact. Il est immédiat de montrer qu'il est séparé. Pour établir qu'il satisfait à l'axiome C'' prenons un recouvrement de E par des ouverts. Il existe un élément O_1 de ce recouvrement qui contient le point ω . Son complémentaire est un ensemble de E relativement compact; on peut donc extraire du recouvrement de E un recouvrement fini $O_2, \dots, O_n$ de $\widehat{O_1}$. $O_2, \dots, O_n$ est un recouvrement fini de E extrait du recouvrement initial. C.Q.F.D.

THEOREME 1 : *La condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse rendre E compact en lui ajoutant un seul point, est qu'il soit localement compact. Il y a alors une seule telle solution.*

4. Etude suivant le deuxième aspect. Soit encore E un espace localement compact. Soient (g_i) la famille des fonctions numériques contenues dans E à valeur $(0, 1)$, et nulles dans le complémentaire d'un ensemble compact (ensemble qui dépend de g_i). Considérons la structure uniforme $\mathfrak{U}$ la moins fine qui rend les g_i uniformément continues. Cette structure est compatible avec la topologie de E , car tout voisinage $\mathfrak{U}$ d'un point $x_0 \in E$ contient un voisinage compact V de x_0 , et d'après O_{IV} il existe une application

continue de E dans $(0, 1)$ égale à 1 au point x_0 et à 0 dans $\bar{V}$. Cette application appartient donc à la famille (g_i) (et d'autre part, la topologie engendrée par la structure $\mathfrak{U}$ est évidemment moins fine que celle de E). L'espace E muni de la structure $\mathfrak{U}$ est précompact, d'après la proposition 5 du chapitre 2, § 5. Une solution correspond donc à cette structure uniforme; montrons que cette solution répond en même temps à notre problème du § actuel, c'est-à-dire que le complémentaire de E dans son complété $\hat{E}$ (pour la structure $\mathfrak{U}$) se compose d'un seul point. Soit $\mathfrak{G}$ le filtre des complémentaires des ensembles relativement compacts dans E . $\mathfrak{G}$ est un filtre de Cauchy pour la structure $\mathfrak{U}$ car si on prend un nombre fini quelconque d'indices $i_1, \dots, i_n$ l'ensemble des points $x \in E$ où toutes les fonctions $g_{i_1}, \dots, g_{i_n}$ s'annulent, est le complémentaire d'un ensemble relativement compact. Le filtre $\mathfrak{G}$, qui ne converge pas dans E , a donc pour limite un point $\omega \in \hat{E}$. Si maintenant $\mathfrak{F}$ est un filtre de Cauchy quelconque sur E (pour la structure $\mathfrak{U}$), ou bien il a un point adhérent, et alors il converge dans E (Chap. 2, § 3, prop. 4) ou bien il est plus fin que $\mathfrak{G}$ (Remarque 2) et a pour limite ω , ce qui prouve que ω est le seul point de $\hat{E}$ n'appartenant pas à E .

5. Utilisation des espaces quotients.

PROPOSITION 2: Si l'espace E est localement compact, la partie à l'infini est nécessairement fermée pour toute solution $(\hat{E}, \phi)$.

Démontrons que la partie $\phi(E)$ est ouverte. Soit $\hat{a} \in \phi(E)$; il lui correspond le filtre $\mathfrak{B}$ des voisinages de $\tilde{\phi}^{-1}(\hat{a}) = a$. $\mathfrak{B}$ contient un élément compact, V , puisque l'espace est localement compact. V ne peut être élément d'un filtre $\mathfrak{F}$ qui représente la solution si ce n'est qu'un filtre de voisinages, sans quoi $\mathfrak{F}$ aurait un point adhérent dans E , ce qui est impossible s'il n'est pas un filtre de voisinages. Le voisinage $\hat{V}$ de $\hat{a}$ correspondant à V sera donc contenu dans $\phi(E)$. C.Q.F.D.

PROPOSITION 3: Si la partie à l'infini est fermée pour une solution du problème, l'espace E est localement compact. Il en résulte qu'il en est de même pour toute solution.

La dernière partie de la proposition a été établie au cours du n° 2.

Nous avons vu au § 4 que, lorsque l'espace E est complètement régulier, il y a une solution au moins $(\tilde{E}, \tilde{\phi})$. Si E est de plus localement compact, la relation d'équivalence ρ , sur $\tilde{E}$, dont les classes sont constituées par les parties réduites à un seul point élément de $\tilde{\phi}(E)$ et par la partie $\tilde{\phi}(E)$, est une relation d'équivalence fermée. La proposition 2 et le théorème 3 du chapitre 3 nous montrent que $(\tilde{E}/\rho, \tilde{\tilde{\phi}})$, où $\tilde{\tilde{\phi}}$ est l'application composée de l'application canonique de $\tilde{E}$ sur $\tilde{E}/\rho$ et de $\tilde{\phi}$, est une solution du problème.

Nous voyons que cette solution est obtenue en ajoutant un seul point à l'espace E . Nous venons donc d'établir, par une autre voie, l'existence de la solution du théorème 1.

Cette méthode nous permet aussi de démontrer que le problème actuel n'a de solution

que si E est localement compact; c'est d'ailleurs à peu près cette démonstration que nous avons donnée au n° 2.

6. Solution la moins étendue.

THEOREME 2 : *Sur un espace E localement compact, la solution que nous venons d'obtenir est la moins étendue.*

Nous pouvons donner plusieurs démonstrations de cette proposition.

1°) Nous allons montrer que la structure uniforme du n° 3 est la moins fine des structures uniformes précompactes compatibles avec la topologie de E . En effet, si $(\hat{E}, \phi)$ est une solution, toute application continue de E dans $(0, 1)$, nulle dans le complémentaire d'un compact, peut être prolongée en une application continue, donc uniformément continue, de $\hat{E}$ dans $(0, 1)$. La structure uniforme correspondant à la solution $(\hat{E}, \phi)$ est donc plus fine que la structure du n° 3. Le résultat est alors une conséquence immédiate du théorème 1 du chapitre 3.

2°) Nous pouvons aussi appliquer le théorème 2 du chapitre 3 en tenant compte de la remarque 2.

3°) Le théorème 3 du chapitre 3 est aussi immédiatement applicable, grâce à la proposition 2.

Pour l'espace localement compact de Tychonoff étudié par Mr. J. Dieudonné, cette structure uniforme est la seule structure d'espace précompact compatible avec la topologie de E . Elle correspond donc en même temps à la solution la plus étendue. Nous connaissons donc tous les filtres complètement réguliers maximaux. Ce sont : les filtres de voisinage et le filtre $\mathcal{G}$. C'est le seul exemple d'espace où nous connaissions des filtres complètement réguliers maximaux non convergents.

CHAPITRE SIX

LES BOUTS

1. Relation sur les ouverts. Nous étudions la relation entre ouverts que nous noterons « $O \Subset P$ » et qui est équivalente de : « Il existe deux ouverts à frontières compactes, O_1 et P_1 , tels que $O \subset \overline{O_1} \subset P_1 \subset P$ ».

DEFINITION 1 : Nous appellerons *espace semi-compact*, un espace topologique tel que tout point admette un système fondamental de voisinages constitué par des ouverts à frontières compactes.

Sur un espace régulier et semi-compact, on a les propositions suivantes :

LEMME 1 : Si O et P sont deux ouverts tels que la frontière de O soit compacte et que $\overline{O} \subset P$, alors il existe P_1 ouvert à frontière compacte avec : $\overline{O} \subset P_1 \subset \overline{P_1} \subset P$.

Pour chaque point de la frontière de O , il existe un voisinage ouvert à frontière compacte, U , tel que $\overline{U} \subset P$. Un nombre fini de voisinages : $U_1, \dots, U_k$ recouvrent la frontière de O puisqu'elle est compacte. $P_1 = O \cup U_1 \cup \dots \cup U_k$ répond à la question.

Pour le montrer, il suffit de remarquer qu'une réunion finie de parties à frontières compactes a encore une frontière compacte. En effet, la frontière de la réunion est un fermé contenu dans la réunion des frontières des parties composantes et cette réunion de frontières est un compact.

LEMME 2 : Si $O \Subset P$ il existe Q tel que $O \Subset Q \Subset P$.

C'est une conséquence immédiate du lemme 1.

LEMME 3 : Tout espace E régulier et semi-compact est complètement régulier.

Soit a un élément de E , et V un voisinage de a , il existe un voisinage U de a , à frontière compacte, tel que $U \subset V$. On a $a \in \overset{\circ}{U}$, d'où : $\overset{\circ}{U} = \overline{\overline{U}} \subset \overline{\{a\}}$. Donc, d'après le lemme 1, il existe P_1 ouvert à frontière compacte tel que $\overline{\overline{U}} \subset P_1 \subset \overline{P_1} \subset \overline{\{a\}}$. $W = \overline{\overline{P_1}}$ est un voisinage de a puisque c'est un ouvert qui contient a . W a même frontière que P_1 , donc une frontière compacte, et on a $\overline{W} \subset U$; on a donc $W \Subset V$.

Le lemme 2 permet alors de construire une famille V_α de voisinages de a , à indices dyadiques de $(0, 1)$ satisfaisant à la propriété (1) de la démonstration du lemme 3 du chapitre 1. Il s'ensuit de même l'existence d'une application continue, f , de E dans $(0, 1)$ nulle dans W et égale à 1 dans $\overline{V}$.

2. Filtres de Freudenthal.

DEFINITION 2 : Nous appellerons *filtres de Freudenthal*, les filtres complètement réguliers qui admettent une base formée d'ouverts à frontières compactes.

REMARQUE 1 : La borne supérieure d'une famille de filtres de Freudenthal, si elle existe, est un filtre de Freudenthal.

La borne supérieure est un filtre complètement régulier, (chap.4, lemme 1); c'est un filtre de Freudenthal, car l'intersection d'une famille finie de parties à frontières compactes est encore une partie à frontière compacte, puisque cette frontière est un fermé contenu dans la réunion de frontières des éléments de l'intersection, et cette réunion est compacte.

REMARQUE 2 : Il existe un filtre de Freudenthal maximal plus fin que tout filtre de Freudenthal.

Puisque toute famille totalement ordonnée de filtres admet une borne supérieure, il résulte immédiatement de la Remarque 1 que l'ensemble des filtres de Freudenthal est inductif. Le théorème de Zorn nous démontre alors la proposition.

REMARQUE 3 : Les filtres de Freudenthal maximaux sont les filtres de Freudenthal qui satisfont à la propriété suivante :

Si O et P sont deux ouverts tels que $O \in P$ et si $\mathfrak{F}$ est tel que tous ses éléments rencontrent O , il existe $F \in \mathfrak{F}$ tel que $F \subset P$.

Si $\mathfrak{F}$ est un filtre de Freudenthal non maximal, il existe un filtre de Freudenthal maximal strictement plus fin, $\mathfrak{M}$, (Remarque 2). Il existe donc $P \in \mathfrak{M}$, $P \notin \mathfrak{F}$, et $O \in \mathfrak{M}$ avec une application f continue de E dans $(0, 1)$, nulle dans O et égale à 1 dans P . Grâce à l'application f , on peut écrire $\bar{O} \subset P$, et il en résulte, si on a choisi O et P à frontières compactes (ce qui est toujours possible), que l'on a $O \in P$. O a une intersection non vide avec tous les éléments de $\mathfrak{M}$, donc de $\mathfrak{F}$ et $P \notin \mathfrak{F}$, donc la propriété n'est pas vérifiée. Inversement, si O et P sont tels que $O \in P$, d'après la définition de la relation $\in$ il existe R_0 et R_1 , ouverts à frontières compactes, tels que :

$$O \subset R_0 \in R_1 \subset P$$

D'après le lemme 2, il existe $R_{1/2}$ tel que :

$$R_0 \in R_{1/2} \in R_1$$

et $R_{1/2}$ peut être choisi à frontière compacte.

On peut ainsi définir, pour tout nombre dyadique α de $(0, 1)$, un R_α ouvert à frontière compacte tel que la relation (1) du lemme 3, chap.1, soit vérifiée. Une démonstration analogue à celle de ce lemme permet d'établir l'existence d'une application continue f de E dans $(0, 1)$ nulle dans O et égale à 1 dans P . Si nous considérons les $f^{-1}(]0, \alpha[)$, où α est un nombre dyadique de l'intervalle $]0, 1[$, nous définissons une base d'un filtre de Freudenthal $\mathfrak{F}$. En effet, c'est un filtre complètement régulier et $f^{-1}(]0, \alpha[) = R_\alpha$ est un ouvert à frontière compacte.

Si $\mathfrak{F}$ est un filtre de Freudenthal maximal tel que tous ses éléments rencontrent O , la borne supérieure de $\mathfrak{F}$ et de $\mathfrak{F}'$ est encore un filtre de Freudenthal (Remarque 1), plus fin que $\mathfrak{F}$, donc qui lui est identique puisque $\mathfrak{F}$ est maximal, et plus fin que $\mathfrak{F}'$. Donc $\mathfrak{F}$ est plus fin que $\mathfrak{F}'$ et par suite $P \in \mathfrak{F}$. Il en résulte la deuxième partie de la proposition.

3. L'espace $\hat{E}$ des filtres de Freudenthal maximaux.

DEFINITION 3 : Nous noterons $\hat{E}$ l'espace construit sur l'ensemble des filtres de Freudenthal maximaux de E , comme il a été dit au chapitre 1, définition 6.

PROPOSITION 1 : L'espace $\hat{E}$ est séparé.

En effet, si $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}'$ sont deux filtres de Freudenthal maximaux distincts, il existe $F \in \mathfrak{F}$ et $F' \in \mathfrak{F}'$ sans points communs, sans quoi il existerait un filtre de Freudenthal $\mathfrak{F}''$ plus fin que $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}'$ à la fois, ce qui est impossible, puisque ces deux filtres sont maximaux et distincts.

DEFINITION 4 : Nous appellerons ϕ l'application de E dans $\hat{E}$, qui à tout $a \in E$, associe son filtre des voisinages. (Nous supposons l'espace E régulier et semi-compact).

Nous définissons bien une application dans $\hat{E}$, car le filtre des voisinages de a est un filtre complètement régulier maximal; c'est une conséquence du lemme 3 et du lemme 1 du chapitre I, et c'est un filtre de Freudenthal si E est semi-compact.

PROPOSITION 2 : ϕ est un homéomorphisme de E sur $\phi(E)$.

ϕ est biunivoque puisque E est séparé. Soit un ouvert $\hat{O}$ de $\hat{E}$, son image réciproque par ϕ est constituée par tous les $a \in E$ dont O est voisinage, c'est-à-dire par $\hat{O}$ qui est ouvert; ϕ est donc continu.

$\bar{\phi}^1$ est aussi continu car l'image par ϕ de tout ouvert de E est la trace sur $\phi(E)$ d'un ouvert de $\hat{E}$; c'est la définition des ouverts de $\hat{E}$.

LEMME 4 : Si A est fermé dans $\hat{E}$ et si $\hat{a} \notin A$ il existe une suite de voisinages de A , $\hat{U}_1, \dots, \hat{U}_n$, tels que $U_{i+1} \subseteq U_i$ et tels que $U_n \not\supset \hat{a}$, les U_i étant à frontières compactes.

Tout d'abord, il existe $V \in \hat{a}$ tel que $\hat{V} \cap A = \emptyset$ et V peut être choisi à frontière compacte puisque $\hat{a}$ est un filtre de Freudenthal. Il existe $\bar{V}_1 \subset \hat{a}$, tel que $\bar{V}_1 \subset V$ puisque $\hat{a}$ est complètement régulier, et V_1 peut encore être choisi à frontière compacte; il en résulte $V_1 \subseteq V$. Il résulte alors du lemme 2, par une démonstration analogue à celle du lemme 3, chap I, qu'il existe une application ϕ , continue de E dans $(0, 1)$, nulle dans V_1 et égale à 1 dans $\bar{V}$. Le $\bar{\phi}^1((0, \alpha), (\alpha \text{ dyadique}))$ définissent une base d'un filtre de Freudenthal k .

Si $b \in V_1$, $H \cap V_1 \neq \emptyset$ pour tous les $H \in b$ (chap. I, lemme 7); donc il existe $H_0 \in b$, $H_0 \subset V$, sans quoi la borne supérieure de b et de k serait un filtre de Freudenthal (Rem. I) strictement plus fin que b qui est maximal. Nous avons donc $V \in b$ d'où $b \in \hat{V}$, donc $\hat{V}_1 \subset \hat{V}$;

il en résulte $\widehat{V} \cap A = \emptyset$ d'où $A \subset \widehat{V} \subset \widehat{U}_1$; en posant $U_1 = \widehat{V}_1 \cap V$, il en résulte $\widehat{U}_1 \supset \widehat{V}$; puisque $V_1 \in \hat{a}$ on a $U_1 \in \hat{a}$ et $\widehat{U}_1$ est un voisinage de A puisque c'est un ouvert qui contient A .

Par récurrence, nous pouvons prendre $V_{n+1} \in g$ tel que $V_n \in V_{n+1} \in V$ (lemme 2) et V_{n+1} peut être choisi à frontière compacte. En posant: $U_n = \widehat{V}_n$ on aura $U_{n+1} \in U_n$. En effet, on a $\widehat{V}_n \subset V_{n+1}$ d'où $\widehat{V}_n \supset V_{n+1} = \widehat{V}_{n+1}$, c'est-à-dire $U_n \supset \overline{U_{n+1}}$ ce qui entraîne $U_{n+1} \in U_n$ puisque U_n et U_{n+1} , qui ont même frontière que U_n et U_{n+1} ont une frontière compacte.

THEOREME 1 : $(\widehat{E}, \phi)$ constitue une solution du problème.

D'après les propositions 1 et 2, il reste seulement à montrer que l'axiome C' est vérifié. Soit $\mathfrak{U}$ une famille de fermés de E telle que les intersections finies d'éléments de $\mathfrak{U}$ soient différentes de $\emptyset$. Nous allons montrer que l'intersection de la famille n'est pas vide. Pour tout $A \in \mathfrak{U}$ et tout $\hat{a} \in \widehat{A}$ il existe au moins une famille de parties de E satisfaisant au lemme 4. Soit $\mathfrak{U}$ l'ensemble des parties ainsi construites, lorsque A décrit $\mathfrak{U}$, que $\hat{a}$ décrit $\widehat{A}$ et que l'on considère toutes les suites satisfaisant au lemme 4.

L'ensemble $\mathfrak{B}$ des intersections finies d'éléments de $\mathfrak{U}$ constitue une base de filtre; il suffit de montrer pour cela qu'aucune de ses intersections finies n'est vide.

Soient $U_1, \dots, U_n$, n éléments de $\mathfrak{U}$, et $A_1, \dots, A_n$ les éléments de a correspondants. $\widehat{U}_i \supset A_i$ et $\bigcap_{i=1}^n A_i \neq \emptyset$, c'est l'hypothèse sur $\mathfrak{U}$; il en résulte que $\bigcap_{i=1}^n \widehat{U}_i \neq \emptyset$; or, (chap. 1, lemme 5) $\bigcap_{i=1}^n \widehat{U}_i = \widehat{\bigcap_{i=1}^n U_i} \neq \emptyset$; il en résulte $\bigcap_{i=1}^n U_i \neq \emptyset$.

Ce filtre est un filtre complètement régulier; cela résulte de la condition du lemme 4, $U_{i+1} \subset U_i$, et du lemme 2 par une démonstration analogue à celle du lemme 3 du chap. 1.

Ce filtre est un filtre de Freudenthal d'après le choix des U_i conformément au lemme 4. Il existe un filtre de Freudenthal maximal $\mathfrak{M}$ plus fin que ce filtre. $\mathfrak{M}$ est un élément de E .

Tous les U sont éléments de $\mathfrak{M}$, donc $\mathfrak{M}$ est un élément de tous les U ; or, s'il existait un $A \in \mathfrak{U}$ tel que $\mathfrak{M} \in A$, il existerait aussi, d'après le lemme 4, un U tel que $\mathfrak{M} \notin \widehat{U}$, contrairement à ce qui vient d'être dit. C.Q.F.D.

4. Propriétés de la solution bout. Nous venons de construire une solution du problème $(\widehat{E}, \phi)$. Nous l'appellerons «Solution bout». Nous allons établir un certain nombre de ses propriétés.

PROPOSITION 3 : Le sous-espace $\widehat{\phi(E)}$ a pour dimension 0.

Soit $\hat{a} \in \widehat{\phi(E)}$ et soit $\hat{O}$ un voisinage de $\hat{a}$; il existe l'ouvert à frontière compacte et élément de $\hat{a}$ tel que $\hat{P} \subset \hat{O}$. Nous allons montrer que $\hat{P} \cap \widehat{\phi(E)}$ n'a pas de point frontière relativement à $\widehat{\phi(E)}$, donc $\widehat{\phi(E)}$ aura pour dimension 0.

Pour cela, nous montrerons que : frontière $\hat{P} \subset \phi(E)$.

Soit $\hat{a} \in \text{front.}\hat{P}$. $\hat{a}$ adhère à $\hat{P}$ et à $\widehat{\bar{P}} = \widehat{\bar{P}}$, donc pour tout $A \in \hat{a}$, $A \cap P \neq \emptyset$ et $A \cap \bar{P} \neq \emptyset$; il en résulte $A \cap \text{front.}P \neq \emptyset$. En effet, posons $A \cap P = A_1$ et supposons que $A \cap \text{front.}P = \emptyset$. Il existe B élément de $\hat{a}$ ouvert à frontière compacte et une application continue de E dans $(0, 1)$ nulle dans B et égale à 1 dans $\bar{A}$, en particulier sur frontière de P . Posons $B \cap P = B_1$. Il existe une application continue f de $\bar{E}$ dans $(0, 1)$, nulle dans B et égale à 1 dans $\bar{A}$. Posons $f_1 \equiv$ l'application définie de la manière suivante : $f_1 = f$ dans P , $f_1 = 1$ dans $\bar{P}$.

f_1 est une application continue

1°) dans P qui est ouvert, où elle coïncide avec f .

2°) sur la frontière de P , au voisinage de laquelle elle est constante, ou bien coïncide avec f .

3°) dans $\bar{P}$, qui est ouvert et où elle est constante.

L'application f_1 est nulle dans B_1 et égale à 1 dans $\bar{A}_1$. La frontière de B_1 est compacte, car c'est un fermé contenu dans la frontière compacte de B puisque tout point de la frontière de B_1 est point frontière de B , parce que P est un voisinage ouvert de B_1 qui ne rencontre pas $\bar{B}_1 \cap B$.

Nous montrons donc que la borne supérieure de $\hat{a}$ et du filtre des $\bar{f}_1^1(0, \alpha)$ est un filtre de Freudenthal, strictement plus fin que $\hat{a}$ qui est maximal, ce qui est impossible; donc tout élément de $\hat{a}$ rencontre la frontière de P . La trace de $\hat{a}$ sur la frontière de P sera donc un filtre, et puisque la frontière P est compacte, ce filtre a au moins un point adhérent x . On a $\hat{a} = \mathfrak{H}(x)$, filtre des voisinages de x dans E ; en effet, $\hat{a}$ et $\mathfrak{H}(x)$ sont tous deux complètement réguliers et ont une borne supérieure; or, $\mathfrak{H}(x)$ est complètement régulier maximal, donc $\hat{a} \subset \mathfrak{H}(x)$; ceci entraîne $\hat{a} = \mathfrak{H}(x)$, (chap.2, n°7), donc $\hat{a} \in \phi(E)$, puisqu'il est un filtre de voisinage de E .

PROPOSITION 4 : La solution $(\hat{E}, \phi)$ satisfait à la propriété β' suivante :

β' : Aucun voisinage ouvert de $\alpha \in \phi(E)$ ne peut avoir pour trace sur $\phi(E)$ deux ouverts disjoints tels que tout élément de $\mathfrak{B}_\alpha$ les rencontre tous deux.

Soit $\alpha \in \phi(E)$ et soit $\hat{V}$ un voisinage ouvert de α tel qu'il existe P et Q ouverts de E avec $\phi(P \cup Q) = \hat{V} \cap \phi(E)$ ($P \cap Q = \emptyset$);

et tel encore que tout élément de $\mathfrak{B}_\alpha$ rencontre P et Q .

Soit $V' \in$ ouvert de α tel que $\bar{V}' \subset V$ (V' existe, puisque V est complètement régulier).

Posons : $P' = P \cap V'$ $Q' = Q \cap V'$

Nous avons : $\bar{P}' \subset \bar{V}' \subset V = P \cup Q$

D'autre part, $P' \cap Q = \emptyset$, donc $P' \subset \bar{Q}$, $\bar{P}' \subset \bar{Q}$, d'où $\bar{P}' \subset P$.

Donc $P' \subsetneq P$ car on peut toujours supposer V et V' à frontières compactes, ce qui entraîne que P et P' le sont aussi.

De même, $\bar{Q}' \subset Q$, donc $Q' \subsetneq Q$.

Tout élément de α rencontre P' car, si $W \cap P' = \emptyset$, $(W \cap V') \cap P = \emptyset$, en contradiction avec ce que nous avons supposé plus haut, puisque $W \cap V' \in \alpha$.

Il y a donc un élément de α contenu dans P (Remarque 3). De même, il y en a un contenu dans Q . L'intersection de ces deux éléments serait vide, ce qui est absurde.

5. Deuxième aspect. Nous allons étudier la structure uniforme $\mathcal{U}$ la moins fine de celles qui rendent uniformément continues les applications de la famille Φ . Φ est constituée par les applications continues de E dans $(0, 1)$, telles que $\tilde{f}(0, \alpha)$ ait une frontière compacte pour α dyadique.

Une telle structure uniforme existe. C'est la borne supérieure des structures images réciproques de celle de $(0, 1)$ par les applications $\phi \in \Phi$. La famille Φ n'est pas vide, comme nous allons le voir. Elle est compatible avec la topologie de E car, puisque les applications ϕ sont continues, la topologie définie par la structure $\mathcal{U}$ est moins fine que celle de E ; d'autre part, quel que soit un voisinage V de α , on l'obtiendra en prenant la coupe correspondant à α de l'image réciproque de l'entourage $(0, 1)$ défini par $|\alpha \cdot \beta| < 1$ par une application ϕ définie comme au cours du lemme 3.

C'est une structure d'espace précompact; c'est une conséquence immédiate du théorème 5 du chapitre II, § 5, et de la séparation de E .

PROPOSITION 5 : La structure uniforme $\mathcal{U}$ correspond à une solution du problème.

LEMME 5 : Si $f \in \Phi$ et si α et β sont des nombres dyadiques, $\tilde{f}(\alpha, \beta)$ a une frontière compacte.

En effet, $\tilde{f}(\alpha, \beta) = \tilde{f}(0, \beta) \cap \tilde{f}(0, \alpha)$ et la frontière de $\tilde{f}(\alpha, \beta)$ est un fermé contenu dans la réunion des frontières de $\tilde{f}(0, \beta)$ et de $\tilde{f}(0, \alpha)$ qui est compacte.

PROPOSITION 6 : Tout filtre de Freudenthal maximal $\mathfrak{F}$ est un filtre de Cauchy.

Soit un entourage U de E , image réciproque par $f \in \Phi$ de l'entourage $(0, 1)$ défini par $|\alpha - \beta| < \varepsilon$. Parmi les $\tilde{f}((k\frac{\varepsilon}{4}, (k+2)\frac{\varepsilon}{4}))$, il y en a un sur lequel $\mathfrak{F}$ induit un filtre, soit $\tilde{f}((k_0\frac{\varepsilon}{4}, (k_0+2)\frac{\varepsilon}{4}))$. Considérons les $\tilde{f}(\alpha, \beta)$; ils définissent une base d'un filtre de Freudenthal $\mathfrak{F}'$ lorsque α et β , dyadiques, varient en restant $\alpha < k_0\frac{\varepsilon}{4}$, $\beta > (k_0+2)\frac{\varepsilon}{4}$. $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}'$ ont une borne supérieure qui est un filtre de Freudenthal plus fin que $\mathfrak{F}'$ et identique à $\mathfrak{F}$, puisque $\mathfrak{F}$ est maximal, donc $\mathfrak{F}$ est plus fin que $\mathfrak{F}'$; or, $\mathfrak{F}'$ contient un élément petit d'ordre U .

PROPOSITION 7 : Il existe un filtre de Freudenthal maximal moins fin que tout filtre de Cauchy donné $\mathfrak{C}$.

Il existe des filtres de Freudenthal moins fins que $\mathfrak{C}$, par exemple le filtre réduit à la seule partie pleine. Prenons la borne supérieure $\mathfrak{E}$ de ces filtres; c'est un filtre de Freudenthal maximal, sinon il existerait $0 \in P$ tel que tout élément de $\mathfrak{E}$ rencontrerait 0 et $\overline{P}$. Mais il existerait alors une application $f \in \Phi$, nulle dans 0 et égale à 1 dans $\overline{P}$, donc $\mathfrak{E}$ ne contiendrait pas d'éléments petits d'ordre V , V étant l'entourage défini à partir

de f et de l'entourage de $(0, 1)$, défini par $|\alpha - \beta| < 1$. Si $\mathcal{G}$ ne contenait pas d'éléments petits d'ordre V , $\mathcal{G}$ n'en contiendrait pas d'ordre W tel que $W^2 \subset V$.

THEOREME 2 : *La structure uniforme $\mathcal{U}$ définit la solution bout.*

C'est une conséquence des Propositions 6 et 7 et du théorème 2 du Chapitre 3.

Bibliographie.

Problèmes généraux.

BOURBAKI, N. *Eléments de Mathématiques*, Livre III, Chap. 1, 2, (7).

Solution la plus étendue.

1. TYCHONOFF, Über die topologische Erweiterung von Räumen, *Math. Annalen*, 102, (1930).
2. CECH, On bicomact spaces, *Annals of Math.* 38, p. 823 à 845, (1937).
3. ALEXANDROFF, *Rec. (Math. Sbornik) N. S.* 5 (47), pages 403 à 423, (1939).
4. DIEUDONNE, J. Sur les espaces uniformes complets, *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, 3ème série, Tome 56 (1939).
5. BOURBAKI, N. Livre III, Chap. (7).

Solution la moins étendue.

BOURBAKI, N. Livre III, Chap. 1 et (7).

Solution bouts.

- FREUDENTHAL, H. Über die Enden topologischer Räume und Gruppen, *Math. Zeitschrift*, 133, (1931) p. 692 à 713.
- FREUDENTHAL, H. *Math. Zeitschrift*, 533, (1931) p. 692 à 713.
- HOPF, Heinz, Enden offener Räume und unendliche discontinuierliche Gruppen, *Commentarii mathematici*, Vol. 16, 1er. fasc. p. 81 à 100.