

SÉMINAIRE DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

CARLOS A. A. DE CAHVALHO

Sur les deuxièmes obstructions

Séminaire de topologie et géométrie différentielle, tome 1 (1957-1958), exp. n° 13, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SE_1957-1958__1__A5_0>

© Séminaire de topologie et géométrie différentielle
(Secrétariat mathématique, Paris), 1957-1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire de topologie et géométrie différentielle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

11 mars 1958

Séminaire de TOPOLOGIE
et de GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
(C. EHRESMANN)

Année 1957/1958

SUR LES DEUXIÈMES OBSTRUCTIONS.

par Carlos A. A. de CARVALHO.

1. Introduction.

Soit E un espace fibré localement trivial, de projection φ , dont la base K est un complexe localement fini connexe et dont la fibre F est un complexe fini asphérique en dimensions $< n$, $n \geq 2$. On utilise le symbole (E, φ, K) .

Soit G un groupe abélien. On désigne par $\bar{G}$ le faisceau, localement simple, de base K et de fibre G utilisé pour construire la cohomologie de Čech dans (E, φ, B) . Le plus souvent $\bar{G} = \pi_i$ où $\pi_i = \pi_i(F)$ pour $i = n, n+1$.

Soit K_0 un sous-complexe de K . Soit f_0 une section de E sur K_0 . Supposons que l'obstruction (dans le sens d'Eilenberg-Steenrod) $c^{n+1}(f_0) \in H^{n+1}(K, K_0; \pi_n)$ soit nulle. Soit f l'extension de f_0 à $K_0 \cup K_{n+1}$, où K_n désigne le squelette de dimension $n > 0$ d'une subdivision cellulaire S de (K, K_0) . La deuxième obstruction à l'extension d'une section qui coïncide avec f sur $K_0 \cup K_n$ est $c^{n+2}(f) \in H^{n+2}(K, K_0; \pi_{n+1})$. Nous devons exprimer $c^{n+2}(f)$ à l'aide des invariants définis pour des dimensions plus petites.

Dans le cas où $F = S^n$ ($n \geq 2$), S. D. LIAO [1] a trouvé des formules qui généralisent des résultats de STEENROD, BALTYSKII et HOPF. La méthode de LIAO consiste à plonger d'une façon convenable (E, φ, K) dans un espace fibré associé à (E, φ, K) dont la fibre est $S^n * S^n$ car $\pi_{n+1}(S^n * S^n) = 0$ (cf. paragraphe 4).

Pour étudier le cas général avec la même méthode on utilise les résultats de J. H. C. WHITEHEAD [3] comme ils ont été présentés par LIAO en [2], p. 545-549. On introduit une obstruction réduite $o^{n+2}(f) \in H^{n+2}(K, K_0; \pi_{n+1})$ où $\pi_{n+1} = \pi_{n+1}/\eta\pi_n$, $\eta: \pi_n(F) \rightarrow \pi_{n+1}(F)$ étant définie d'une façon naturelle (cf. paragraphe 4). La condition $o^{n+2}(f) = 0$ remplace $\pi_{n+1}(S^n * S^n) = 0$.

Nous nous bornons à démontrer le théorème d'extension de Liao.

REMARQUE. - Nous ne revenons pas sur les hypothèses qui ont été faites dans ce paragraphe. Ainsi

- 1° (E, φ, K) désigne toujours un espace fibré dont la base K et dont la fibre F ont les propriétés indiquées ci-dessus ;
- 2° $C^{n+1}(f_0) = 0$; si $K_0 = 0$ alors la classe fondamentale $C^{n+1}(E) = 0$;
- 3° La section f est une extension de f_0 à $K_0 \cup K_{n+1}$; si $K_0 = 0$ alors f est une section de E sur K_{n+1} ;
- 4° F désigne toujours un complexe fini asphérique en dimensions $< n$, $n \geq 2$;
- 5° K est un complexe localement fini connexe.

2. Plongement régulier.

Soit (E^2, φ^2, K^2) l'espace produit (cartésien) de (E, φ, K) par lui-même. Soit $(\tilde{E}^2, \tilde{\varphi}^2, K)$ l'espace fibré, de fibre F^2 , restriction de (E^2, φ^2, K^2) à l'image de K par l'application diagonale $K \rightarrow K^2$. Le groupe cyclique Z_2 opère sur $\tilde{E}^2$ de façon à induire l'identité sur la base. Par passage au quotient on obtient un espace fibré $(E^{[2]}, \tilde{\varphi}^{[2]}, K)$ dont la fibre est le produit cyclique $F^{[2]} = F * F$ et dont le groupe structural est isomorphe à celui de E .

Soit $\pi: F^2 \rightarrow F^{[2]}$ la projection canonique de F^2 sur l'espace des orbites $F^{[2]}$. Soit z un point donné de F . Désignons par $z(F)$ la partie de $F^{[2]}$ formée de tous les points $\pi(y, z)$, $y \in F$. L'application $y \rightarrow \pi(y, z)$ est un homéomorphisme de F sur $z(F)$. Elle définit un plongement régulier de F dans $F^{[2]}$.

Le groupe Z_2 qui opère sur F^2 est engendré par la transformation $t: (y_1, y_2) \rightarrow (y_2, y_1)$, $y_i \in F$. Soit $t^*: H^q(F^2; G) \rightarrow H^q(F^2; G)$ l'homomorphisme induit par t . Soit $1_F \in H^0(F; Z)$ l'unité de l'anneau de cohomologie de F . La classe $u \times 1_F \in H^q(F^2; G)$ pour chaque $u \in H^q(F; G)$. Soit $T: H^q(F; G) \rightarrow H^q(F^2; G)$ l'homomorphisme qui à chaque classe u associe la classe $F(u) = (1 + t^*)(u \times 1_F)$ élément d'un sous-groupe de $H^q(F^2; G)$. Soit $\pi^*: H^q(F^{[2]}; G) \rightarrow H^q(F^2; G)$ l'homomorphisme induit par la projection π . La considération des groupes de cohomologie (de Čech) invariants par Z_2 permet d'assurer que π^* est un isomorphisme de

$H^q(F^{[2]}; G)$ sur $F H^q(F; G)$. Soit $\mu: H^q(F; G) \rightarrow H^q(F^{[2]}; G)$ l'homomorphisme $u \rightarrow \mu(u) = \pi^{*-1} F(u)$. Soit $i^*: H^q(F^{[2]}; G) \rightarrow H^q(F; G)$ l'homomorphisme induit par le plongement régulier de F dans $F^{[2]}$. Pour montrer que l'homomorphisme μ possède la propriété $i^* \mu = 1$ l'identité, il suffit de considérer le diagramme :

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} H^q(F^{[2]}; G) & \xrightarrow{i^*} & H^q(s(F); G) \\ \pi^* \downarrow & \swarrow \mu & \downarrow \pi^* h_s^* \\ H^q(F^2; G) & \xrightarrow{h_s^*} & H^q(F; G) \end{array}$$

où h_s^* est l'homomorphisme induit par l'application $h_s: y \rightarrow (y, s)$, $y \in F$.

En général le plongement régulier de F dans $F^{[2]}$ ne s'étend pas à tout l'espace E . Pour qu'il en soit ainsi il faut l'existence d'une section g de E sur K . En effet, soit $h: E \rightarrow E^2$ l'application définie par $z \rightarrow (z, g \varphi(z))$, $z \in E$. Le plongement régulier i de E dans $E^{[2]}$ est défini par $i = \pi h: E \rightarrow E^{[2]}$ où $\pi: E^2 \rightarrow E^{[2]}$ est la projection canonique. Le plongement i est compatible avec les structures fibrées de E et de $E^{[2]}$.

La condition $C^{n+1}(f_0) = 0$ donne une section f de E sur $K_0 \cup K_{n+1}$. On est obligé, si on veut utiliser le i , d'introduire un plongement partiel partiel.

Supposons que $\dim K = n + 2$. Soit S' une subdivision simpliciale de S (cf. paragraphes 1) définie de la façon suivante : pour chaque $(n+2)$ -simplexe σ_i^{n+2} de S , $\sigma_i^{n+2} \notin K_0$, il existe deux $(n+2)$ -simplexes σ_{i-}^{n+2} et σ_{i+}^{n+2} tels que : $\sigma_{i-}^{n+2}, \sigma_{i+}^{n+2} \subset \text{Int } \sigma_i^{n+2}$; $\sigma_{i+}^{n+2} \cap \sigma_{i-}^{n+2} = 0$. Soit K_- le sous-complexe de K obtenu en enlevant en K les intérieurs de tous les σ_{i-}^{n+2} . De même, pour K_+ . Le bord de chaque σ_i^{n+2} ($\sigma_i^{n+2} \notin K_0$) est un rétract de déformation de $\sigma_{i-}^{n+2} - \text{Int } \sigma_{i-}^{n+2}$. Le relèvement des homotopies donne une extension f_- de f qui est une section de E sur K_- . On a de façon analogue une section f_+ de E sur K_+ . Alors (E_-, φ, K_-) peut être plongé régulièrement dans $(E_-^{[2]}, \varphi_-^{[2]}, K_-)$.

Soit K'_- le sous-complexe de K_- obtenu comme réunion de tous les $\partial \sigma_{i-}^{n+2}$ ($\sigma_i^{n+2} \notin K_0$). L'homomorphisme $i^*: H^q(F^{[2]}; G) \rightarrow H^q(F; G)$ admet une extension naturelle : $i^*: H^p(K_-, K'_-; H^q(F^{[2]}; G)) \rightarrow H^p(K_-, K'_-; H^q(F; G))$.

LEMME 1. - Il existe un homomorphisme

$$\mu: H^p(K_-, K'_-; \overline{H}^q(F; G)) \rightarrow H^p(K_-, K'_-; \overline{H}^q(F^{[2]}; G))$$

qui, composé avec i^* , donne l'identité. Pour $q = 0$, μ , ainsi que i^* , sont des isomorphismes.

DÉMONSTRATION. - En effet, l'homomorphisme $\mu: H^q(F; G) \rightarrow H^q(F^{[2]}; G)$ donne un isomorphisme $\mu': H^p(K_-, K'_-; \overline{H}^q(F; G)) \approx H^p(K_-, K'_-; \mu \overline{H}^q(F; G))$. L'inclusion $\mu \overline{H}^q(F; G) \subset \overline{H}^q(F^{[2]}; G)$ donne l'homomorphisme

$$\mu'': H^p(K_-, K'_-; \mu \overline{H}^q(F; G)) \rightarrow H^p(K_-, K'_-; \overline{H}^q(F^{[2]}; G)) \text{ et } \mu = \mu'' \circ \mu'$$

3. Extension de l'homomorphisme μ .

Supposons désormais que tous les faisceaux de coefficients sont simples. On pose pour simplifier la notation $\overline{\varphi}^{[2]} = \psi$; $\overline{E}^{[2]} = \psi^{-1}(K)$.

Si $F = S^n$ ($n \geq 2$) la suite de Gysin généralisée par THOM et CHERN-SPANIER, donne :

$$(2) \quad \dots \xrightarrow{d^{n+1}} H^p(K, K_0, G) \xrightarrow{\varphi^*} H^p(E, \varphi^{-1}(K_0); G) \xrightarrow{\beta} H^{p-n}(K, K_0; H^n(F; G)) \\ \xrightarrow{d^{n+1}} H^{p+1}(K, K_0; G) \rightarrow \dots$$

Comme $C^{n+1}(f_0) = 0$ et comme K est connexe, un raisonnement classique permet d'écrire la suite exacte :

$$(3) \quad 0 \rightarrow H^p(K, K_0; G) \xrightarrow{\varphi^*} H^p(E, \varphi^{-1}(K_0); G) \xrightarrow{\beta} H^{p-n}(K, K_0; H^n(F; G)) \rightarrow 0$$

On sait que pour $p = n$, (3) est une suite exacte même si $F \neq S^n$.

Encore sans l'hypothèse $F = S^n$, soit $1_K \in H^0(K; \mathbb{Z}) \approx H^0(K; H^n(F; \mathbb{Z}))$ l'unité de l'anneau de cohomologie de K . D'après (3) il existe $\theta \in H^n(E; \mathbb{Z})$ tel que $\beta(\theta) = 1_K$. On sait que (3) donne la décomposition de $H^p(E, \varphi^{-1}(K_0); G)$ en somme directe due à CHERN-SPANIER :

$$(4) \quad H^p(E, \varphi^{-1}(K_0); G) = \varphi^* H^p(K, K_0; G) \oplus \theta \cup \varphi^* H^{p-n}(K, K_0; G)$$

où le cup-produit est défini de façon naturelle (G est un $\mathbb{Z}$ -module à droite).

Comme pour deux espaces de même type d'homotopie leurs produits cycliques ont aussi le même type d'homotopie et comme F est un complexe fini et asphérique en dimensions $< n$ il en résulte que $F^{[2]}$ est un complexe fini asphérique en dimensions $< n$. Sous l'unique hypothèse de l'asphéricité de F , on sait que pour $p = n$, (2) contient une partie d'une suite exacte. On a donc :

$$(5) \quad 0 \rightarrow H^n(K, K_0; G) \xrightarrow{\psi^*} H^n(\psi^{-1}(K), \psi^{-1}(K_0); G) \xrightarrow{\beta} H^0(K, K_0; H^n(F^{[2]}, G)) \\ \xrightarrow{d^{n+1}} H^{n+1}(K, K_0; G) .$$

Supposons que $\dim K = n + 2$. On fait en (3) et en (5) : $K = K_-$ et $K_0 = 0$; $p = n$ et $G = \mathbb{Z}$. Le plongement régulier i de $(\psi^{-1}(K_-), \psi_2 K_-)$ dans $(\psi^{-1}(K_-), \psi_2 K_-)$ induit un homomorphisme entre les suites exactes :

$$0 \rightarrow H^n(K_-; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\varphi^*} H^n(\psi^{-1}(K_-); \mathbb{Z}) \xrightarrow{\beta} H^0(K_-; H^n(F; \mathbb{Z})) \rightarrow 0 \\ \uparrow i^* \quad \quad \quad \uparrow i^* \downarrow \mu \\ 0 \rightarrow H^n(K_-; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\psi^*} H^n(\psi^{-1}(K_-); \mathbb{Z}) \xrightarrow{\beta} H^0(K_-; H^n(F^{[2]}; \mathbb{Z})) \xrightarrow{d^{n+1}} H^{n+1}(K_-; \mathbb{Z})$$

où μ est l'homomorphisme du lemme 1. Soit $J = \mu H^0(K_-; H^n(F; \mathbb{Z}))$. $d^{n+1}(J) = 0$ car $d^{n+1} i^* J = d^{n+1}(H^0(K_-; H^n(F; \mathbb{Z}))) = 0$. Il existe donc un sous-groupe J' de $H^n(\psi^{-1}(K_-); \mathbb{Z})$ tel que $\beta(J') = J$. Pour $F = S^n$, soit $\theta \in H^n(\psi^{-1}(K_-); \mathbb{Z})$ tel que $\beta(\theta) = 1_K$. Il existe $\mu_1 \theta \in J'$ tel que $i^* \mu_1 \theta = \theta$.

LEMME (fondamental) 2. - Si $F = S^n$ ($n \geq 2$) il existe un homomorphisme $\mu : H^p(\psi^{-1}(K_-), \psi^{-1}(K'_-); G) \rightarrow H^p(\psi^{-1}(K_-), \psi^{-1}(K'_-); G)$ tel que

- $\mu \varphi^*(u) = \varphi^*(u)$ pour chaque $u \in H^p(K_-, K'_-; G)$;
- $\mu(\theta \cup \varphi^*(u)) = \mu_1 \theta \cup \varphi^*(u)$ pour chaque $u \in H^{p-n}(K_-, K'_-; G)$;
- $i^* \mu =$ l'identité.

DEMONSTRATION. - La suite (3) avec $K = K_-$ et $K_0 = K'_-$ montre que l'homomorphisme $\varphi^* : H^p(K_-, K'_-; G) \rightarrow H^p(\psi^{-1}(K_-), \psi^{-1}(K'_-); G)$ est injectif. La commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} & H^p(K_-, K'_-; G) & \\ \varphi^* \swarrow & & \searrow \psi^* \\ H^p(\psi^{-1}(K_-), \psi^{-1}(K'_-); G) & \xleftarrow{i^*} & H^p(\psi^{-1}(K_-), \psi^{-1}(K'_-); G) \end{array}$$

donne alors : $i^* : \psi^* H^p(K_-, K'_- ; G) \approx \varphi^* H^p(K_-, K'_- ; G)$ et $\varphi^*(u) = i^* \psi^*(u)$ pour chaque $u \in H^p(K_-, K'_- ; G)$. Ainsi

$$i^*(\mu_1 \otimes \psi^*(u)) = i^* \mu_1 \otimes i^* \psi^*(u) = \theta \otimes \varphi^*(u)$$

pour chaque $u \in H^{p-n}(K_-, K'_- ; G)$. On a donc

$$i^* : \mu_1 \otimes \psi^* H^{p-n}(K_-, K'_- ; G) \approx \theta \otimes \varphi^* H^{p-n}(K_-, K'_- ; G).$$

D'après (4) i^* définit alors un isomorphisme :

$$(6) \quad \begin{aligned} i^* : \psi^* H^p(K_-, K'_- ; G) \otimes \mu_1 \otimes \psi^* H^{p-n}(K_-, K'_- ; G) \\ \approx H^p(\varphi^{-1}(K_-), \varphi^{-1}(K'_- ; G) . \end{aligned}$$

Il suffit maintenant de définir μ comme l'inverse de l'isomorphisme (6). Il est évident que les propriétés (a), (b) et (c) sont vérifiées.

4. Obstructions réduites.

Soit $w : S^{n+1} \rightarrow S^n$ une application donnée qui représente un générateur de $\pi_{n+1}(S^n)$, avec l'invariant de Hopf 1 dans le cas où $n = 2$ (S^n et S^{n+1} sphères orientées). A chaque application $\alpha : S^n \rightarrow F_{n+1}$ on associe l'application $w \alpha : S^{n+1} \rightarrow F_{n+1}$ où F_n désigne la squelette de dimension n d'une subdivision cellulaire du complexe fini, asphérique en dimensions $\leq n$, F . L'ensemble des classes $[w \alpha]$ forme un sous-groupe $\gamma_{n+1} = \gamma_{n+1}(F)$ de $\pi_{n+1}(F_{n+1})$, et est un invariant topologique de F . J. H. C. WHITEHEAD a étudié en [3] des opérations cohomologiques $H^n(X, X_0 ; \pi_n) \rightarrow H^{n+2}(X, X_0 ; \gamma_{n+1})$. Il s'agit du carré de Pontrjagin p_1 pour $n = 2$ et du carré S_g^2 pour $n > 2$.

Soit $\nu : \gamma_{n+1}(F) \rightarrow \pi_{n+1}(F)$ la restriction à γ_{n+1} de l'homomorphisme induit par l'inclusion $F_{n+1} \subset F$. Soit

$$\bar{\nu} : H^{n+2}(X, X_0 ; \gamma_{n+1}) \rightarrow H^{n+2}(X, X_0 ; \pi_{n+1})$$

l'homomorphisme induit par ν . Soit $P_\omega = \bar{\nu} p_1$ et soit $Sq_\omega^2 = \bar{\nu} S^2$. LIAO a montré en [2], p. 545-549 que $P_\omega(K_2) = 0$ et que, pour $n > 2$, $Sq_\omega^2(K_n) = 0$ où $K_n \in H^n(F, H_n)$ est la classe fondamentale (obstruction à la construction) de l'espace F . Soit :

$$(7) \quad \dots \rightarrow H^q(F^{[2]}, F; G) \xrightarrow{j^*} H^q(F^{[2]}; G) \xrightarrow{i^*} H^q(F; G) \rightarrow \dots$$

la suite exacte associée au couple $(F^{[2]}, F)$ obtenu par le plongement régulier de F dans $F^{[2]}$. Pour $n > 2$, $Sq_{\omega}^2 \mu(K_n) \in H^{n+2}(F^{[2]}; \pi_{n+1})$ est tel que $i^* Sq_{\omega}^2 \mu(K_n) = Sq_{\omega}^2(K_n) = 0$. De même pour $P_{\omega} \mu(K_2) \in H^4(F^{[2]}; \pi_3)$. D'après (7) il existe $K_{n+2} \in H^{n+2}(F^{[2]}, F; \pi_{n+1})$ tel que : $j^*(K_{n+2}) = Sq_{\omega}^2 \mu(K_n)$ pour $n > 2$, et $j^*(K_4) = P_{\omega} \mu(K_2)$.

Comme (par l'asphéricité de F en dimensions $< n$) $\pi_n(F_{n+1}) \cong \pi_n(F)$, chaque classe $[\alpha] \in \pi_n(F_{n+1})$ détermine univoquement une classe de $\pi_n(F)$. L'application ω définit un homomorphisme $\omega^* : \pi_n(F) \rightarrow \gamma_{n+1}(F)$ qui, composé avec γ donne l'homomorphisme $\gamma = \gamma \omega^* : \pi_n(F) \rightarrow \pi_{n+1}(F)$. Désignons encore par $\gamma_{n+1} = \gamma \pi_n(F)$ et soit $\Gamma_{n+1} = \pi_{n+1}(F) / \gamma \pi_n(F)$. De la suite exacte :

$$0 \rightarrow \gamma_{n+1} \rightarrow \pi_{n+1} \xrightarrow{\xi} \Gamma_{n+1} \rightarrow 0$$

on déduit la suite exacte :

$$0 \rightarrow H^{n+2}(K, K_0; \gamma_{n+1}) \rightarrow H^{n+2}(K, K_0; F_{n+1}) \xrightarrow{\xi^*} H^{n+2}(K, K_0; F_{n+1}) \rightarrow 0$$

On appelle obstruction réduite ⁽¹⁾ $O^{n+2}(f) \in H^{n+2}(K, K_0; F_{n+1})$ l'image par ξ^* de la deuxième obstruction $c^{n+2}(f)$. Lorsqu'on suppose que $O^{n+2}(f) = 0$, essentiellement on ne considère que les deuxième obstructions à coefficients en $\gamma_{n+1}(F)$.

Supposons que $F = S^n$ ($n \geq 2$). Pour $n = 2$, $P_{\omega} = p_1$ est remplacé par le cup-produit défini (avec les hypothèses usuelles sur l'invariant de Hopf) par l'accouplement $\pi_n * \pi_n \rightarrow \pi_{n+1}$ (qu'on utilise aussi pour $n > 2$). Sq_{ω}^2 est remplacé par le carré de Steenrod Sq^2 . $K_n \in H^n(S^n, H_n)$ est un générateur de $H^n(S^n, Z)$ et K_{n+2} est un générateur de $H^{n+2}(S^n * S^n, S^n; \pi_{n+1})$.

$F_{n+1} = 0$, et l'obstruction réduite $O^{n+2}(f) = 0$. On a : $\pi_{n+1}(S^n * S^n) = 0$ (c'est ici que la condition $n \geq 2$ est essentielle). En effet, $S^2 * S^2$ est le plan projectif complexe et $\pi_3(S^2 * S^2) = 0$. Pour $n \geq 3$ on utilise la subdivision de $S^n * S^n$ en cellules ouvertes due à STEENROD : $C_0 \cup C_n \cup C_{2n}$. Soit $W^n = C_0 \cup C_n$ qui est homéomorphe à S^n . Il est évident que $H^q(S^n * S^n, W^n; Z) = 0$ pour $q < n+2$. L'isomorphisme de Hurewicz donne $\pi_{n+1}(S^n * S^n, W^n) = 0$.

⁽¹⁾ Cette notion résulte d'une suggestion qui nous a été faite par S. D. LIAO.

L'homomorphisme $d : \pi_{n+2}(S^n * S^n, W^n) \rightarrow \pi_{n+1}(W^n)$ est surjectif. La suite exacte d'homotopie donne alors $\pi_{n+1}(S^n * S^n) = 0$. Ceci permet d'énoncer :

LEMME (fondamental) 3. - Soit $f_\sigma : d\sigma^{n+2} \rightarrow S^n$ l'application qu'on obtient à partir de la restriction de la section f à $d\sigma^{n+2}$ pour chaque $(n+2)$ -cellule orientée σ^{n+2} de K , $\sigma^{n+2} \notin K_0$. f_σ se prolonge dans $S^n * S^n$ sur σ^{n+2} . Si f_σ est une telle extension, alors $f_\sigma^*(K_{n+2}) \in H^{n+2}(\sigma^{n+2}, d\sigma^{n+2}; \pi_{n+1})$ est l'élément représenté par la cochaîne $\alpha_f(\sigma^{n+2})$ où α_f est la classe de $\pi_{n+1}(S^n)$ représentée par f_σ .

Le cas général peut être obtenu à partir du lemme 3 en y ajoutant la condition $O^{n+2}(f) = 0$.

5. La classe $\theta(f)$.

Pour chaque $x \in K$, soit $K_x^n \in H^n(\varphi^{-1}(x); \pi_n)$ la classe fondamentale de $\varphi^{-1}(x)$ où φ est la projection de (E, φ, K) . Soit $K^n \in H^0(K; H^n(F; \pi_n))$ la classe dont la valeur en chaque sommet $x \in K$ est K_x^n . La suite (3) avec $K_0 = 0$, $p = n$ et $G = \pi_n$, permet d'assurer l'existence de $a \in H^n(E; \pi_n)$ tel que $\beta(a) = K^n$. Par définition : $\theta(f) = a - \varphi^* f^* a \in H^n(E; \pi_n)$. La classe $\theta(f)$ est indépendante de $a \in H^n(E; \pi_n)$ tel que $\beta(a) = K^n$. Il est évident que $\theta(f)$ est l'unique élément de $H^n(E; \pi_n)$ qui satisfait aux conditions : $f^* \theta(f) = 0$ et $\beta(\theta(f)) = K^n$. (f est définie sur K_{n+1}).

Soit $\rho^* : H^n(E; \pi_n) \rightarrow H^n(\varphi^{-1}(x); \pi_n)$ l'homomorphisme induit par l'inclusion $\rho : \varphi^{-1}(x) \subset E$, $x \in K$. On peut remarquer que la condition $\beta(a) = K^n$ où $a \in H^n(E; \pi_n)$ est équivalente à $\rho^*(a) = K_x^n$ pour un point arbitraire (K est connexe) $x \in K$.

Supposons désormais que $F = S^n$ ($n \geq 2$) et que $\dim K = n + 2$. Cette dernière hypothèse n'est pas essentielle. En effet, tous les invariants topologiques : $\theta(f)$, $C^{n+2}(f)$, etc., ainsi que les opérations cohomologiques dont il sera question commutent avec l'homomorphisme induit par l'inclusion $K_{n+2} \subset K$. D'un autre côté, l'inclusion $i : K_{n+1} \subset (K_+)_n$ donne $i^* f_+^* = f^*$. Alors $\theta(f)$ et $\theta(f_+)$, ainsi que $C^{n+2}(f)$ et $C^{n+2}(f_+)$ sont chaque couple, deux cocycles de la même classe de cohomologie. On peut donc raisonner comme si f était définie sur K_+ .

Soit K^n le sous-complexe de K réunion de tous les σ_{i-}^{n+2} . Soit $E^* = E \cup \psi^{-1}(K_-)$. E et $\psi^{-1}(K_-)$ sont des sous-ensembles fermés de E^* . On peut alors considérer le diagramme :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccc}
 & & i^* & \rightarrow & H^p(\varphi^{-1}(K_-), \varphi^{-1}(K'_-); G) \\
 & & & & \swarrow \mu \\
 H^p(E, \varphi^{-1}(K''); G) & \leftarrow & H^p(E^*, \varphi^{-1}(K'') \cup \psi^{-1}(K'_-); G) & \xrightarrow{h^*} & H^p(\psi^{-1}(K_-), \psi^{-1}(K'_-); G) \\
 i_1^* \downarrow & & \downarrow j_1^* & & \\
 (8) \quad H^p(E; G) & \xleftarrow{i_1^*} & H^p(E^*; G) & \xleftarrow{i_1^*} & H^p(E^*, E; G) \\
 i_1^* \downarrow & & \downarrow i_2^* & & \\
 H^p(\varphi^{-1}(K_-); G) & \xleftarrow{i_3^*} & H^p(\varphi^{-1}(K_-); G) & &
 \end{array}
 \end{array}$$

où : $G = \pi_n(S^n)$ ou $G = \pi_{n+1}(S^n)$. Les homomorphismes μ de (8) sont définis dans le lemme 2. Tous les autres homomorphismes de (8) sont induits par des inclusions. On a donc la commutativité dans les carrés et dans les triangles du diagramme (8). L'excision donne :

$$i^* : H^p(E, \varphi^{-1}(K''); G) \approx H^p(\varphi^{-1}(K_-), \varphi^{-1}(K'_-); G)$$

$$h^* : H^p(E^*, \varphi^{-1}(K'') \cup \psi^{-1}(K'_-); G) \approx H^p(\psi^{-1}(K_-), \psi^{-1}(K'_-); G)$$

L'application des homomorphismes de la dernière ligne de (8) donne, d'après la condition (c) du lemme 2, $i_3^* \mu i^* \theta(f) = i^* \theta(f)$. Un argument usuel permet d'assurer l'existence d'un $\theta_0(f) \in H^n(E^*; \pi_n(S^n))$ tel que $i_1^* \theta_0(f) = \theta(f)$ et $i_2^* \theta_0(f) = \mu i^* \theta(f)$. Il en résulte que : $i_1^* Sq^2 \theta_0(f) = Sq^2 \theta(f)$ et $i_2^* Sq^2 \theta_0(f) = \mu i^* Sq^2 \theta(f)$ pour $n > 2$. De façon analogue pour le cup-produit. On suppose, pour simplifier que Sq^2 représente aussi le cup-produit lorsque $n = 2$.

$$\text{Soit } i_1^* : H^{n+2}(E, \varphi^{-1}(K''); \pi_{n+1}(S^n)) \approx H^{n+2}(E; \pi_{n+1}(S^n)).$$

$$(i^* i_1^{*-1}) Sq^2 \theta(f) \in H^{n+2}(\varphi^{-1}(K_-), \varphi^{-1}(K'_-); \pi_{n+1}(S^n)).$$

D'après la commutativité de (8), $i_1^* j_1^* h^{*-1} \mu (i^* i_1^{*-1}) Sq^2 \theta(f) = Sq^2 \theta(f)$ et alors $i_1^* [Sq^2 \theta_0(f) - j_1^* h^{*-1} \mu (i^* i_1^{*-1}) Sq^2 \theta(f)] = 0$. Il existe donc $v^{n+2} \in H^{n+2}(E^*, E; \pi_{n+1}(S^n))$ tel que

$$j^* v^{n+2} = Sq^2 \theta_0(f) - j_1^* h^{*-1} \mu (i^* i_1^{*-1}) Sq^2 \theta(f).$$

Soit f la section de $K_0 \cup K_+$. Comme $\pi_{n+1}(S^n * S^n) = 0$, la restriction de

f à $K_+ \cap K_-$ se prolonge à une section f' de $\psi^{-1}(K_-)$ sur K_- . Soit f'' l'application $K \rightarrow E^*$ qui coïncide avec f sur K'' et qui coïncide avec f' sur K_- . f'' coïncide alors avec f sur K_+ et définit des applications $(K, K_+) \rightarrow (E^*, E)$ et $(K, K_0) \rightarrow (E^*, E)$. On obtient ainsi le diagramme commutatif :

$$(9) \quad \begin{array}{ccc} H^{n+2}(E^*, E; \pi_{n+1}(S^n)) & \xrightarrow{j^*} & H^{n+2}(E^*; \pi_{n+1}(S^n)) \\ f''^* \swarrow & & \searrow f''^* \\ H^{n+2}(K, K_+; \pi_{n+1}(S^n)) & \xrightarrow{j_+^*} & H^{n+2}(K, K_0; \pi_{n+1}(S^n)) \end{array}$$

A partir du lemme 3 on peut montrer [3], p. 175, par un raisonnement typique pour les obstructions, que $C^{n+2}(f) = f''^*(v^{n+2})$. Pour $K_0 = 0$ on peut compléter le 2e triangle du diagramme (9) pour obtenir : $C^{n+2}(f) = f''^*(j^* v^{n+2})$.

LEMME 4. - $f'^* \mu_1 i^* \theta(f) = 0$ et $f''^* \theta_0(f) = 0$, où μ_1 est défini dans le lemme 2.

DÉMONSTRATION. - Les carrés et les triangles du diagramme :

$$(10) \quad \begin{array}{ccccc} & & H^n(K; \pi_n(S^n)) & \xrightarrow{i^*} & H^n(K_-; \pi_n(S_n)) \\ & f''^* \nearrow & \uparrow f^* & & \uparrow f'^* \\ H^n(E^*; \pi_n(S^n)) & & & & H^n(\psi^{-1}(K_-); \pi_n(S^n)) \\ & i_1^* \searrow & & & \nwarrow i_3^* \\ & & H^n(E; \pi_n(S^n)) & \xrightarrow{i^*} & H^n(\varphi^{-1}(K_-); \pi_n(S^n)) \end{array}$$

sont commutatifs. Alors

$$f'^* \mu_1 i^* \theta(f) = f'^* i^* \theta(f) = i^* f'^* \theta(f)$$

et

$$f^* \theta(f) = 0.$$

$$f''^* \theta_0(f) = f^* i_1^* \theta_0(f) = f^* \theta(f) = \theta.$$

LEMME 5. - Soit $K_0 = 0$. Soit $\bar{i}^* : H^{n+2}(K, K''; G) \cong H^{n+2}(K_-, K'_-; G)$ l'isomorphisme induit par l'inclusion $\bar{i} : (K_-, K'_-) \subset (K, K'')$. Soit

$\bar{I}^* : H^{n+2}(K, K''; G) \rightarrow H^{n+2}(K; G)$ l'homomorphisme induit par l'inclusion $\bar{I} : (K, 0) \subset (K, K'')$. Comme K'' est la réunion des simplexes disjoints, $\bar{I}^*$ est aussi un isomorphisme. Soit $\bar{C}^{n+2}(f) = (\bar{I}^* \bar{I}^{*-1}) C^{n+2}(f)$ (avec $G = \pi_{n+1}(S^n)$). Alors : $\bar{C}^{n+2}(f) = -f'^* \mu(i^* i'^{-1}) Sq^2 \theta(f)$.

DEMONSTRATION. - D'après le lemme 4, $f''^* Sq^2 \theta_0(f) = 0$. On a alors : $C^{n+2}(f) = f''^*(j^* v^{n+2}) = -f''^* j_1^* h^{*-1} \mu(i^* i'^{-1}) Sq^2 \theta(f)$. La démonstration s'achève par la considération d'un diagramme commutatif convenable où on montre que $f'^* = (\bar{I}^* \bar{I}^{*-1}) f''^* j_1^* h^{*-1}$.

6. Théorème d'extension de Liao.

Le faisceau de coefficients $\pi_{n+1}(S^n)$ est simple. En effet, pour $n = 2$, cela résulte du fait que si g est un automorphisme de S^2 et $h : S^3 \rightarrow S^2$ alors $h \simeq gh$. Pour $n > 2$, il est évident car $\pi_{n+1}(S^n) = \mathbb{Z}_2$. Pour éliminer l'hypothèse que $\pi_n(S^n)$ soit simple, on considère la classe $\tilde{\theta}(f) \in H^n(E; \mathbb{Z}_2)$ image de $\theta(f)$ par la réduction modulo 2. $\tilde{\theta}(f)$ peut être définie à partir de la classe unité $\tilde{K}^n = \tilde{1}_K \in H^0(K; \mathbb{Z}_2)$.

THÉOREME d'extension. - Soit (E, φ, K) un espace fibré sphérique de fibre S^n ($n \geq 2$) dont la base K est un complexe localement fini connexe. Soit f une section de E sur K_{n+1} . Alors la deuxième obstruction $C^{n+2}(f)$ à l'extension d'une section qui coïncide avec f sur K_n est donnée par les formules suivantes :

$$\varphi^* C^{n+2}(f) = \tilde{\theta}(f) \cup \varphi^* \beta Sq^2 \tilde{\theta}(f) + Sq^2 \tilde{\theta}(f), \quad n > 2$$

$$\varphi^* C^4(f) = \tilde{\theta}(f) \cup \varphi^* \beta (\tilde{\theta}(f) \cup \tilde{\theta}(f)) + \tilde{\theta}(f) \cup \tilde{\theta}(f), \quad n = 2.$$

DEMONSTRATION. - Soit $i^* : H^p(E; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^p(\varphi^{-1}(K_-); \mathbb{Z}_2)$ l'homomorphisme induit par l'inclusion $\varphi^{-1}(K_-) \subset E$. Il est évident que $\beta(i^* \tilde{\theta}(f)) = \tilde{1}_K$. La suite (3) permet d'écrire le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} (11) & 0 \rightarrow H^p(K_-, K'_-; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\varphi^*} & H^p(\varphi^{-1}(K_-), \varphi^{-1}(K'_-); \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\beta} & H^{p-n}(K_-, K'_-; \mathbb{Z}_2) \rightarrow 0 \\ & \uparrow \bar{I}^* & & \uparrow i^* & & \uparrow \bar{I}^* \\ (12) & 0 \rightarrow H^p(K, K''; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\varphi^*} & H^p(E, \varphi^{-1}(K''); \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\beta} & H^{p-n}(K, K''; \mathbb{Z}_2) \rightarrow 0 \\ & \downarrow \bar{I}^* & & \downarrow i^* & & \downarrow \bar{I}^* \\ (13) & 0 \rightarrow H^p(K; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\varphi^*} & H^p(E; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\beta} & H^{p-n}(K; \mathbb{Z}_2) \rightarrow 0 \end{array}$$

où i^* , $\bar{i}^*$, i'^* et $\bar{i}'^*$ sont les isomorphismes définis dans le paragraphe 5.

$$\begin{aligned} \beta(i^* \tilde{\theta}(f) \cup \psi^* \beta(i^* i'^{* -1}) Sq^2 \tilde{\theta}(f)) &= \beta(i^* \tilde{\theta}(f)) \cup \beta(i^* i'^{* -1}) Sq^2 \tilde{\theta}(f) \\ &= \beta(i^* i'^{* -1}) Sq^2 (\tilde{\theta}(f)) . \end{aligned}$$

Si l'on pose.

$$\begin{aligned} Z^{n+2} &= i^* \tilde{\theta}(f) \cup \psi^* \beta(i^* i'^{* -1}) Sq^2 \tilde{\theta}(f) - (i^* i'^{* -1}) Sq^2 \tilde{\theta}(f) \in \\ &\in H^{n+2}(\varphi^{-1}(K_-), \varphi^{-1}(K'_-) ; Z_2) \end{aligned}$$

alors

$$\beta(Z^{n+2}) = 0$$

D'après (11), il existe $Z_1^{n+2} \in H^{n+2}(K_-, K'_- ; Z_2)$ tel que $Z^{n+2} = \varphi^*(Z_1^{n+2})$.
La section f' de $\psi^{-1}(K_-)$ sur K_- (cf paragraphe 5) donne :

$$f'^* \mu Z^{n+2} = f'^* \mu \varphi^*(Z_1^{n+2})$$

qui, d'après la condition (a) du lemme 2, donne

$$f'^* \psi^*(Z_1^{n+2}) = Z_1^{n+2} .$$

La condition (b) du même lemme 2 donne :

$$\begin{aligned} f'^* \mu(i^* \tilde{\theta}(f) \cup \psi^* \beta(i^* i'^{* -1}) Sq^2 \tilde{\theta}(f)) &= f'^* \mu_1 i^* \tilde{\theta}(f) \cup f'^* \psi^* \beta(i^* i'^{* -1}) Sq^2 \tilde{\theta}(f) \\ &= f'^* \mu_1 i^* \tilde{\theta}(f) \cup \beta(i^* i'^{* -1}) Sq^2 \tilde{\theta}(f) = 0 \end{aligned}$$

car le lemme 4 donne

$$f'^* \mu_1 i^* \tilde{\theta}(f) = 0 .$$

On a donc

$$Z_1^{n+2} = - f'^* \mu(i^* i'^{* -1}) Sq^2 \tilde{\theta}(f) .$$

D'après le lemme 5, $Z_1^{n+2} = \bar{C}^{n+2}(f)$. Alors :

$$\varphi^*(\bar{1}^* \bar{1}'^{*-1}) c^{n+2}(f) = i^* \tilde{\theta}(f) \cup \varphi^* \beta(i^* i'^{*-1}) Sq^2 \tilde{\theta}(f) - (i^* i'^{*-1}) Sq^2 \tilde{\theta}(f)$$

Mais les isomorphismes i^* et $\bar{1}^*$ entre (11) et (12) donnant

$$i^* \tilde{\theta}(f) \cup \varphi^* \beta(i^* i'^{*-1}) Sq^2 \tilde{\theta}(f) = i^*(\tilde{\theta}(f) \cup \varphi^* \beta(i'^{*-1}) Sq^2 \tilde{\theta}(f))$$

et

$$i'^{*-1} (i^* i'^{*-1}) Sq^2 \tilde{\theta}(f) = (i'^{*-1}) Sq^2 \tilde{\theta}(f) ,$$

donc :

$$\varphi^* \bar{1}^{*-1} \bar{c}^{n+2}(f) = \tilde{\theta}(f) \cup \varphi^* \beta(i'^{*-1}) Sq^2 \tilde{\theta}(f) - (i'^{*-1}) Sq^2 \tilde{\theta}(f)$$

La démonstration s'achève par la considération des isomorphismes i'^* et $\bar{1}'^*$ entre les suites (12) et (13).

7. Remarques (LIAO).

1° Le théorème d'extension (absolu) permet d'obtenir par un raisonnement classique, où on utilise l'homomorphisme de Steenrod, le théorème (d'extension) relatif et le théorème de classification correspondant.

2° D'après les résultats de THOM, $\beta(Sq^K \tilde{\theta}(f)) = w_2^K$, où w_2^K désigne la k -ième classe caractéristique de Stiefel-Whitney (réduite modulo 2).

3° Dans le cas orientable (groupe $SO(n)$) on peut utiliser certains résultats sur les transformations antipodiques pour simplifier les formules obtenues.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] LIAO (S. D.). - On the theory of obstructions of fiber bundles, Annals of Math., series 2, t. 60, 1954, p. 146-191.
- [2] LIAO (S. D.). - On the topology of cyclic product of spheres, Trans. Amer. math. Soc., t. 77, 1954, p. 520-551.
- [3] WHITEHEAD (J. H. C.). - On the theory of obstructions, Annals of Math., series 2, t. 54, 1951, p. 68-84.